1. Sea $f:[-4,2]\rightarrow\Re$ la función definida por $f(x) = x^2e^x$.

(1) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(2) Hallar los máximos y mínimos relativos y absolutos de f.

2. Una cierta función h se define como el cociente de dos funciones derivables f y g, es decir: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. En un punto a de su dominio la función h tiene un mínimo relativo y sabemos que $f'(a) = 6$ y $g'(a) = 2$. ¿Se puede obtener el valor de h(a)? Razonar la respuesta.

3. Hallar b y c para que la función $f(x) = x^2+bx+c$ pase por el punto $P(2,0)$ y tenga un mínimo para x=3.

4. Determinar una función cuadrática que se anule para x=8 y tenga un mínimo en $P(6,-12)$.

5. Determinar a para que la función $f(x) = xe^{ax}$ tenga un máximo para x=1.

6. Sabemos que la temperatura en el interior de una cámara frigorífica viene dada por la expresión $f(t) = at^2+bt+c$, donde t representa las horas transcurridas desde que fue conectada a la red eléctrica y a, b y c son constantes reales. Al conectarla, y por efecto del calor, la temperatura interior asciende y alcanza su máximo a los tres cuartos de hora. A partir de ese momento comienza a descender y transcurrida una hora desde su conexión alcanza los cero grados centígrados. A las dos horas de su conexión la temperatura es de -3ºC. A partir de estos datos, determinar razonadamente los valores de a, b y c.

7. Si para el curso académico Octubre de 1995-Septiembre de 1996 expresamos el tiempo t en días, correspondiendo t=0 al día primero de octubre de 1995, el número de horas dedicadas al estudio por un estudiante, de un país lejano, a lo largo del curso y hasta el 30 de mayo sigue la ley:

N(t) = (Número de horas que ha estudiado al día) = $\frac{2}{(91)^2}t^2 - \frac{4}{91}t + 3$

Sabiendo que febrero de 1996 ha tenido 29 días, se pide:

(1) ¿A qué fecha corresponde el día del curso en el que menos ha estudiado y cuántas horas estudió dicho día?

(2) ¿En qué fecha de 1996 el número de horas de estudio es igual al de horas de estudio del primer día del curso?

8. La temperatura media de una ciudad andaluza, desde las 12 horas del mediodía hasta la medianoche de un cierto día de agosto, viene dada por la expresión $T(x) = ax^2+bx+c$, en la que x representa el número de horas transcurridas desde el mediodía.

(1) Calcular a, b y c sabiendo que a las 5 de la tarde se alcanzó una temperatura máxima de 35ºC y que a las 12 de mediodía se midieron 30ºC.

(2) Determinar de forma razonada los puntos en los que la función anterior alcanza sus extremos absolutos y relativos.

9. Una compañía de bebidas refrescantes lanza al mercado un nuevo producto. El primer mes, con un precio de lanzamiento de 0.50 euros unidad, obyuvo un beneficio de 10 millones de euros. El segundo mes el precio fue de 0.55 euros unidad y el beneficio de 11.5 millones. El tercer mes, el precio fue de 0.70 euros unidad y el beneficio de 12.1 millones. Ciertos estudios teóricos permiten conocer la relación entre el beneficio y el precio, y en este caso suponemos que el beneficio es una función cuadrática del precio por unidad. Con los datos obtenidos halla dicha función, y el precio para que el beneficio sea máximo.

Sea $f:[-4,2]\rightarrow\Re$ la función definida por $f(x) = x^2e^x$.

(1) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

(2) Hallar los máximos y mínimos relativos y absolutos de f.

(1) La función es creciente si la derivada es positiva:

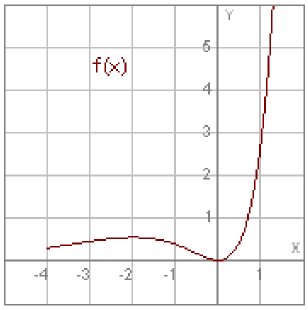
$$f'(x) = 2xe^x+x^2e^x = \left(2x+x^2\right)e^x$$

$$\left(2x+x^2\right)e^x > 0 \ ; \ 2x+x^2 > 0 \ ; \ x(x+2) > 0$$

Estudiamos los signos de los factores:

- - -	+ + +	+ + +	x+2
+ + +	+ + +	- - -	x
	-2	0	

Es positivo en $(-\infty,-2)$ y $(0,+\infty)$.



En el intervalo (-2,0) el producto es negativo y la función decrece.

Solución: Creciente en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$.
Decreciente en $(-2,0)$.

(2) Como es una función continua y en el -2 pasa de creciente a decreciente, tiene un máximo. En el 0 tendrá un mínimo, ya que pasa de decreciente a creciente.

Los transformados son:

$$f(-2) = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0.54. \quad f(0) = 0.$$

Para determinar los extremos absolutos, transformamos los extremos del intervalo:

$$f(-4) = 16e^{-4} = \frac{16}{e^4} \approx 0.29 \ ; \ f(2) = 4e^2 \approx 29.56.$$

Alcanza el máximo absoluto para x = 2. El mínimo está en x = 0.

Solución: Máximo relativo en x=-2. Mínimo en x=0.
Máximo absoluto en x = 2. Mínimo en x=0.

Una cierta función h se define como el cociente de dos funciones derivables f y g, es decir: $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. En un punto a de su dominio la función h tiene un mínimo relativo y sabemos que $f'(a) = 6$ y $g'(a) = 2$. ¿Se puede obtener el valor de h(a)? Razonar la respuesta.

Como h tiene un mínimo para x=a, debe ser h'(a) = 0. Si derivamos la función (es una división):

$$h'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Se cumple: $h'(a) = 0$; $\dfrac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{[g(a)]^2} = 0 \Rightarrow f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a) = 0$; $f'(a)\cdot g(a) = f(a)\cdot g'(a)$; $\dfrac{f'(a)}{g'(a)} = \dfrac{f(a)}{g(a)}$;

$\dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{6}{2}$; $\dfrac{f(a)}{g(a)} = 3$.

Es entonces: $h(a) = \dfrac{f(a)}{g(a)} = 3$.

Solución: $h(a) = 3$.

Hallar b y c para que la función $f(x) = x^2+bx+c$ pase por el punto $P(2,0)$ y tenga un mínimo para $x=3$.

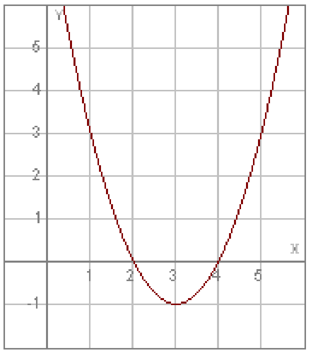
Imponemos las condiciones:

1. Pasa por $P(2,0)$. $f(2) = 0$: $4+2b+c = 0$; $2b+c = -4$.

2. Mínimo en $x=3$: $f'(3) = 0$: $f'(x) = 2x+b$; $6+b = 0$; $b = -6$.

Sustituyendo en la 1ª condición: $-12+c = -4$; $c = 8$.

Solución: $b = -6$; $c = 8$.



$y = x^2-6x+8$

Determinar una función cuadrática que se anule para $x=8$ y tenga un mínimo en $P\left(6,-12\right)$.

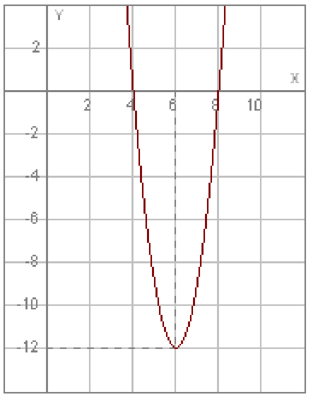
Sea la función $f(x) = ax^2+bx+c$.

Imponemos las condiciones del enunciado:

1. Se anula en $x=8$. $f(8) = 0$: $64a+8b+c = 0$.

2. Pasa por $P(6,-12)$. $f(6) = -12$: $36a+6b+c = -12$.

3. Mínimo en $x=6$. $f'(6) = 0$: $f'(x) = 2ax+b$; $12a+b = 0$.



$y = 3x^2-36x+96$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 64a+8b+c = 0 \\ 36a+6b+c = -12 \\ 12a+b = 0 \end{array}\right\}. \text{ Anulamos c restando la } 1^{a} \text{ y } 2^{a}:$$

$$\left.\begin{array}{r} 28a+2b = 12 \\ 12a+b = 0 \end{array}\right\} ; \left.\begin{array}{r} 14a+b = 6 \\ 12a+b = 0 \end{array}\right\} ; \ 2a = 6 \ ; \ a = 3 \ ; \ (2^{a}) \ 36+b = 0 \ ; \ b = -36.$$

Sustituimos en la 1^{a} condición: $192-288+c = 0$; $c = 96$.

Solución: $f(x) = 3x^2-36x+96$.

Determinar a para que la función $f(x) = xe^{ax}$ tenga un máximo para x=1.

Para que tenga un máximo en x=1, su derivada debe ser cero:

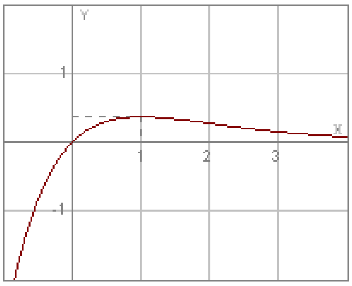
$f'(x) = e^{ax}+axe^{ax} = (1+ax)e^{ax}$.

Debe ser: $f'(1) = 0$; $(1+a)e^{a} = 0 \Rightarrow 1+a = 0$; $a = -1$.

Comprobemos que efectivamente es máximo, comprobando el signo que toma en la 2ª derivada:

$f'(x) = (1-x)e^{-x}$; $f''(x) = -e^{-x}-(1-x)e^{-x} = -e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x} = (x-2)e^{-x}$

$f''(1) = -e^{1} = -e < 0 \Rightarrow$ es un máximo.



$y = xe^{-x}$

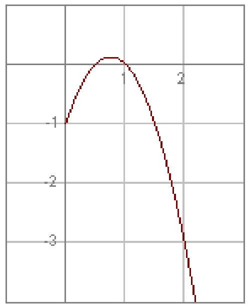
Solución: $a = -1$.

Sabemos que la temperatura en el interior de una cámara frigorífica viene dada por la expresión $f(t) = at^2+bt+c$, donde t representa las horas transcurridas desde que fue conectada a la red eléctrica y a, b y c son constantes reales. Al conectarla, y por efecto del calor, la temperatura interior asciende y alcanza su máximo a los tres cuartos de hora. A partir de ese momento comienza a descender y transcurrida una hora desde su conexión alcanza los cero grados centígrados. A las dos horas de su conexión la temperatura es de -3ºC. A partir de estos datos, determinar razonadamente los valores de a, b y c.

Se cumple:

1. Tiene un máximo para $t = \frac{3}{4}$:

$f'(t) = 2at+b \;;\; f'\left(\frac{3}{4}\right) = 0 \;;\; \frac{3a}{2}+b = 0 \;;\; 3a+2b = 0.$



$f(t) = -2t^2+3t-1,\ t > 0$

2. Se hace cero para t = 1:

$f(1) = 0 \;;\; a+b+c = 0.$

3. Para t = 2, toma el valor -3:

$f(2) = -3 \;;\; 4a+2b+c = -3.$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3a+2b = 0 \\ a+b+c = 0 \\ 4a+2b+c = -3 \end{array}\right\}$$. Eliminamos c restando la 3ª y la 2ª:

$$\left.\begin{array}{r} 3a+2b = 0 \\ 3a+b = -3 \end{array}\right\}$$ (1ª-2ª) $b = 3$. (2ª) $3a+3 = -3 \;;\; 3a = -6 \;;\; a = -2.$

Sustituyendo en la 2ª condición:

$-2+3+c = 0 \;;\; c = -1.$

Solución: $a = -2 \;;\; b = 3 \;;\; c = -1$

Si para el curso académico Octubre de 1995-Septiembre de 1996 expresamos el tiempo t en días, correspondiendo t=0 al día primero de octubre de 1995, el número de horas dedicadas al estudio por un estudiante, de un país lejano, a lo largo del curso y hasta el 30 de mayo sigue la ley:

$$N(t) = (\text{Número de horas que ha estudiado al día}) = \frac{2}{(91)^2}t^2 - \frac{4}{91}t + 3$$

Sabiendo que febrero de 1996 ha tenido 29 días, se pide:

(1) ¿A qué fecha corresponde el día del curso en el que menos ha estudiado y cuántas horas estudió dicho día?

(2) ¿En qué fecha de 1996 el número de horas de estudio es igual al de horas de estudio del primer día del curso?

(1) Derivamos dos veces:

$$N'(t) = \frac{2}{91^2}2t - \frac{4}{91} = \frac{4}{91^2}t - \frac{4}{91} \ ; \ N''(t) = \frac{4}{91^2} > 0.$$

Los valores que anulan la derivada son:

$$\frac{4}{91^2}t - \frac{4}{91} = 0 \ ; \ \frac{1}{91}t - 1 = 0 \ ; \ t-91 = 0 \ ; \ t = 91.$$

Como siempre es $N''(t) > 0$, el valor es un mínimo.

Transformando el valor: $N(91) = \frac{2}{91^2}91^2 - \frac{4}{91}91 + 3 = 2-4+3 = 1.$

Octubre, noviembre y diciembre suman 31+30+31 = 92 días. Como tomamos el 1 de octubre como 0, el valor 91 corresponde al 31 de diciembre de 1995.

Solución: El 31 de diciembre de 1995. Estudia 1 hora.

(2) El primer día estudia: $N(0) = 3$.

Debemos encontrar el valor de t que haga $N(t) = 3$, aparte del anterior:

$$\frac{2t^2}{91^2} - \frac{4t}{91} + 3 = 3 \ ; \ \frac{2t^2}{91^2} - \frac{4t}{91} = 0 \ ; \ \frac{t^2}{91} - 2t = 0 \ ; \ t^2 - 182t = 0 \ ; \ t(t-182) = 0 \ ; \ \begin{cases} t = 0 \\ t = 182 \end{cases}$$

Calculamos el día correspondiente. Como comienza por t=0, buscamos el día 183:

oct	nov	dic	ene	feb	mar
31	30	31	31	29	31
	61	92	123	152	183

Solución: El 31 de marzo de 1996.

La temperatura media de una ciudad andaluza, desde las 12 horas del mediodía hasta la medianoche de un cierto día de agosto, viene dada por la expresión $T(x) = ax^2+bx+c$, en la que x representa el número de horas transcurridas desde el mediodía.

(1) Calcular a, b y c sabiendo que a las 5 de la tarde se alcanzó una temperatura máxima de 35°C y que a las 12 de mediodía se midieron 30°C.

(2) Determinar de forma razonada los puntos en los que la función anterior alcanza sus extremos absolutos y relativos.

(1) Imponemos las condiciones:

1. A las 5 alcanza 35°C.

$T(5) = 35$; $25a+5b+c = 35$.

2. A las 5 la temperatura es máxima:

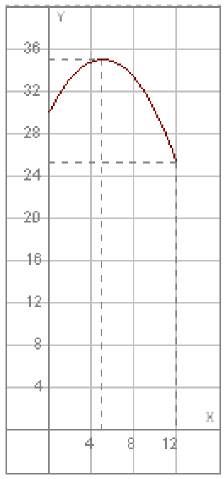
$T'(5) = 0$; $T'(x) = 2ax+b$; $10a+b = 0$.

3. A las 12 se alcanzan los 30° (se comienza a las 12):

$T(0) = 30$; $c = 30$.

Teniendo en cuenta el valor de c, resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 25a+5b = 5 \\ 10a+b = 0 \end{array}\right\} ; \left.\begin{array}{r} 5a+b = 1 \\ 10a+b = 0 \end{array}\right\} ; (2^a-1^a)\ 5a = -1 \ ; \ a = -\frac{1}{5}.\ (2^a)\ -2+b = 0 \ ; \ b = 2.$$



$T(x) = -\frac{1}{5}x^2+2x+30$

Solución: $a = -\frac{1}{5}$; $b = 2$; $c = 30$.

(2) Como es una parábola tiene el máximo para t = 5, según el enunciado, (5,35). Para hallar los extremos absolutos, transformamos los extremos del intervalo de definición:

$$T(x) = -\frac{1}{5}x^2+2x+30$$

$$T(0) = 30 \ ; \ T(12) = -\frac{144}{5}+24+30 = \frac{-144+270}{5} = \frac{126}{5} = 25.2.$$

Solución: Máximo absoluto y relativo: 35° a las 5 de la tarde.
Mínimo absoluto: 25.2° a las 12 de la noche.

Una compañía de bebidas refrescantes lanza al mercado un nuevo producto. El primer mes, con un precio de lanzamiento de 0.50 euros unidad, obyuvo un beneficio de 10 millones de euros. El segundo mes el precio fue de 0.55 euros unidad y el beneficio de 11.5 millones. El tercer mes, el precio fue de 0.70 euros unidad y el beneficio de 12.1 millones. Ciertos estudios teóricos permiten conocer la relación entre el beneficio y el precio, y en este caso suponemos que el beneficio es una función cuadrática del precio por unidad. Con los datos obtenidos halla dicha función, y el precio para que el beneficio sea máximo.

Consideremos la función cuadrática $B(p) = ap^2+bp+c$, siendo p el precio en euros por unidad y B el beneficio, en millones. Se cumple:

1. 1^{er} mes. $B(0.5) = 10$; $0.5^2a+0.5b+c = 10$; $0.25a+0.5b+c = 10$.
2. 2º mes. $B(0.55) = 11.5$; $0.3025a+0.55b+c = 11.5$.
3. 3^{er} mes. $B(0.7) = 12.1$; $0.49a+0.7b+c = 12.1$.

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 0.25a+0.5b+c = 10 \\ 0.3025a+0.55b+c = 11.5 \\ 0.49a+0.7b+c = 12.1 \end{array}\right\} \quad ; \quad \left.\begin{array}{r} (2^a-1^a)\ \ 0.0525a+0.05b = 1.5 \\ (3^a-2^a)\ \ 0.1875a+0.15b = 0.6 \end{array}\right\} \quad ; \quad \left.\begin{array}{r} (\times 3)\ \ 0.1575a+0.15b = 4.5 \\ 0.1875a+0.15b = 0.6 \end{array}\right\} \quad ;$$

(2^a-1^a) $0.03a = -3.9$; $a = -\dfrac{3.9}{0.03}$; $a = -130$.

En la 2^a: $-24.375+0.15b = 0.6$; $0.15b = 24.975$; $b = -\dfrac{24.975}{0.15}$; $b = 166.5$.

Sustituyendo en la 1^a condición: $-32.5+83.25+c = 10$; $c = -40.75$.

La función beneficio (en millones de euros) es: $B(p) = -130p^2+166.5p-40.75$.

Para calcular el máximo derivamos dos veces:

$B'(p) = -260p+166.5$; $B''(p) = -260 < 0$.

Igualamos la derivada a cero, para obtener los extremos:

$-260p+166.5 = 0$; $p = \dfrac{-166.5}{-260}$; $p \approx 0.64$.

Solución: Beneficio en millones: $B(p) = -130p^2+166.5p-40.75$.
Beneficio máximo para 0.64 euros unidad.