BLOQUE 1

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Una empresa del sector alimentario lanza al mercado dos nuevas bebidas, A y B, compuestas de zumos de frutas combinados. La composición de cada litro de bebida es la siguiente:

	Zumo de piña	Zumo de mango	Zumo de papaya
A	0,5 litros	0,5 litros	
B	0,4 litros		0,6 litros

El precio de venta fijado es de 1,5 euros por litro de A y de 1,75 euros por litro de B.

Semanalmente se cuenta con 20 000 litros de zumo de piña, con 15 000 de zumo de mango y con 15 000 de zumo de papaya.

Determinar los litros que deben producirse semanalmente de cada bebida para obtener unos ingresos semanales máximos. ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

Solución:

Se trata de un problema de programación lineal. Sea x el número de litros de bebida A e y el número de litros de bebida B a producir. Se dispone de 20000 litros de zumo de piña:

$$0.5x + 0.4y \leq 20000$$

Se dispone de 15000 litros de zumo de mango:

$$0.5x \leq 15000$$

Se dispone de 15000 litros de zumo de papaya:

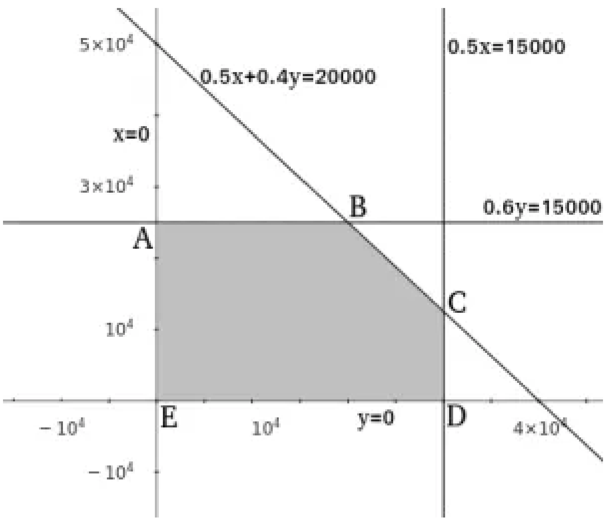
$$0.6y \leq 15000$$

Junto con las restricciones de positividad formamos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 0.5x + 0.4y \leq 20000 \\ 0.5x \leq 15000 \\ 0.6y \leq 15000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Escribimos las ecuaciones de las rectas y las representamos:

$$\begin{cases} 0.5x + 0.4y = 20000 \\ 0.5x = 15000 \\ 0.6y = 15000 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



La zona sombreada es la región factible o lugar que verifica todas las restricciones. Calculamos sus vértices:

$$A: \begin{cases} 0.6y = 15000 \\ x = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad A = (0, 25000)$$

$$B: \begin{cases} 0.6y = 15000 \\ 0.5x + 0.4y = 20000 \end{cases} \quad \rightarrow \quad B = (20000, 25000)$$

$$C: \begin{cases} 0.5x = 15000 \\ 0.5x + 0.4y = 20000 \end{cases} \quad \rightarrow \quad C = (30000, 12500)$$

$$D: \begin{cases} 0.5x = 15000 \\ y = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad D = (30000, 0)$$

$$E: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad E = (0, 0)$$

Si cada litro de bebida A se vende a 1.5€ y cada litro de bebida B se vende a 1.75€, la función ingresos es:

$$f(x, y) = 1.5x + 1.75y$$

Evaluamos la función ingresos en cada vértice:

$$A \rightarrow f(0, 25000) = 1.5 \cdot 0 + 1.75 \cdot 25000 = 43750$$

$$B \rightarrow f(20000, 25000) = 73750$$

$$C \rightarrow f(30000, 12500) = 66875$$

$$D \rightarrow f(30000, 0) = 45000$$

$$E \rightarrow f(0, 0) = 0$$

Los ingresos máximos se obtienen en el vértice B. Produciendo 20000 bebidas de tipo A y 25000 bebidas de tipo B se ingresan hasta 73750€.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una tienda de electrodomésticos ha vendido 750 televisores de tres modelos diferentes, A, B y C. Los ingresos totales obtenidos han sido de 230 400 euros. El precio de venta del modelo A era de 320 euros; el del modelo B, un 20 % más barato que A; y el del C, un 10 % más caro que A. Además, de A y C se han vendido, en total, el doble de unidades que de B.

A. [0,9 PUNTO] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular cuántas unidades se han vendido de cada modelo de televisor.

B. [0,8 PUNTO] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,8 PUNTOS] Resolverlo.

Solución:

a) Sea x, y, z el número de televisores de modelo A, B y C respectivamente. En total se han vendido 750 televisores:

$$x + y + z = 750$$

Los ingresos totales obtenidos han sido de 230 400 euros:

$$320x + (1 - 0.20) \cdot 320y + (1 + 0.10) \cdot 320z = 230400\ ;$$

$$320x + 256y + 352z = 230400\ ; \qquad \text{dividiendo entre } 32$$

$$10x + 8y + 11z = 7200$$

De A y C se han vendido el doble de unidades que de B: $x + z = 2y\ ;$

$$x - 2y + z = 0$$

El sistema resultantes es:
$$\begin{cases} x + y + z &= 750 \\ 10x + 8y + 11z &= 7200 \\ x - 2y + z &= 0 \end{cases}$$

b) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8 & 11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 750 \\ 7200 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escribimos las matrices de coeficientes y ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8 & 11 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 750 \\ 10 & 8 & 11 & 7200 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el rango de la matriz de coeficientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8 & 11 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 11 - 20 - 8 - 10 + 22 = 3 \neq 0$$

Luego, rg(M)=3=rg(M*)=n y, según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible determinado.

c) Resolvemos el sistema utilizando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 750 & 1 & 1 \\ 7200 & 8 & 11 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8 & 11 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{6000 - 14400 - 7200 + 16500}{3} = 300$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 750 & 1 \\ 10 & 7200 & 11 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8 & 11 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{7200 + 8250 - 7200 - 7500}{3} = 250$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 750 \\ 10 & 8 & 7200 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8 & 11 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{7200 - 15000 - 6000 + 14400}{3} = 200$$

La tienda ha vendido 300 televisores del modelo A, 250 del modelo B y 200 del modelo C.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

A. [2,5 PUNTOS] Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$ obtener sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

Solución:

El dominio de esta función racional es $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.
Para estudiar la monotonía de *f* comenzamos calculando sus puntos críticos:

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x-2)\cdot 1}{(x-2)^2}=0\ ;$$

$$(2x+1)(x-2)-(x^2+x-2)=0\ ;$$

$$2x^2-4x+x-2-x^2-x+2=0\ ;$$

$$x^2-4x=0\ ;$$

$$x(x-4)=0$$

Los puntos críticos están en x=0 y x=4.
Teniendo en cuenta el dominio de *f* y sus puntos críticos, estudiamos su monotonía en la siguiente tabla:

x	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,4)$	$(4,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
Monotonía $f(x)$	Crece	Decrece	Decrece	Crece

- Crece en $x\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$
- Decrece en $x\in(0,2)\cup(2,4)$
- Máximo en $x=0,\ \ f(0)=\frac{-2}{-2}=1,\ \ (0,1)$
- Mínimo en $x=4,\ \ f(4)=\frac{18}{2}=9,\ \ (4,9)$

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] Dada la función $f(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+5x+6}$

1. [0,25 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua?
2. [0,5 PUNTOS] ¿Se puede definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?
3. [0,5 PUNTOS] Calcular los dos límites laterales en x = –3. Interpretar gráficamente lo que ocurre en torno a dicho valor.

B. [1,25 PUNTOS] Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+2x-1 & si \quad x\le -1 \\ x^2-5 & si \quad -1<x\le 3 \\ \dfrac{b+x}{3x-2} & si \quad x>3 \end{cases}$

determinar los valores de a y b para los que la función es continua en x = –1 y en x = 3.

Solución:

A. a) La función *f* es una función racional que es continua en todo su dominio, es decir, en todo $\mathbb{R}$ salvo donde se anula el denominador:

$$x^2+5x+6=0\ ;$$

$$(x+2)(x+3)=0$$

f es discontinua en *x*=-2 y *x*=-3.

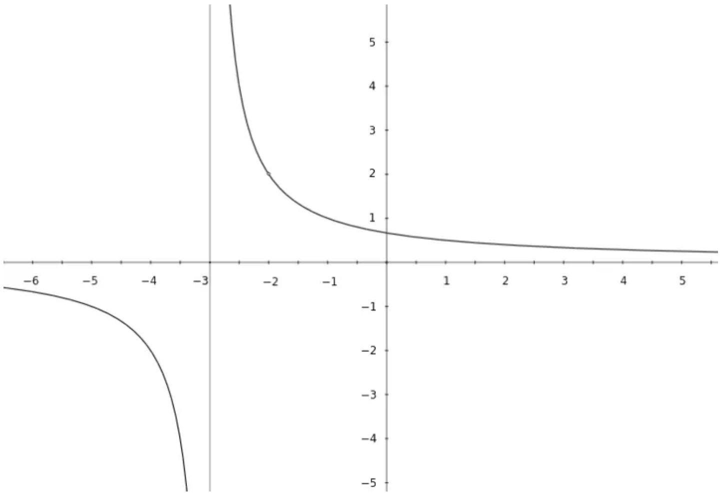
A. b) Estudiemos el tipo de discontinuidad en cada punto:

- $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{2x+4}{x^2+5x+6}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{2(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{2}{x+3}=2$
- $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{2x+4}{x^2+5x+6}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2}{x+3}=2$
- $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{2x+4}{x^2+5x+6}=\dfrac{-2}{0^-}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{2x+4}{x^2+5x+6}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty$

En *x*=-2 la discontinuidad es evitable; en *x*=-3 la discontinuidad es de salto infinito y no se puede evitar. Para evitar la discontinuidad en *x*=-2 definimos la función del siguiente modo:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+4}{x^2+5x+6} & \text{si} \quad x\neq -2 \\ 2 & \text{si} \quad x=-2 \end{cases}$$

A. c) Los límites laterales en *x*=-3 están calculados en el apartado b). Gráficamente estos límites se interpretan como una asíntota vertical de ecuación *x*=-3. La función tiende a $+\infty$ cuando *x* tiende a -3 por la derecha, y tiene a $-\infty$ cuando *x* tiende a -3 por la izquierda.



B. Estudiamos la continuidad en *x*=-1:

- $\lim\limits_{x \to -1^+} x^2 - 5 = -4$
- $\lim\limits_{x \to -1^-} ax^2 + 2x - 1 = a - 2 - 1 = a - 3$
- $f(-1) = a(-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1 = a - 3$

Para que *f* sea continua en *x*=-1 ha de ser $-4 = a - 3$.
Estudiamos la continuidad de *f* en *x*=3:

- $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{b + x}{3x - 2} = \dfrac{b + 3}{7}$
- $\lim\limits_{x \to 3^-} x^2 - 5 = 4$
- $f(3) = 3^2 - 5 = 4$

Para que *f* sea continua en *x*=3 ha de ser $\dfrac{b+3}{7} = 4$.
Unimos las dos ecuaciones obtenidas y tenemos un sistema:

$$\begin{cases} -4 = a - 3 \\ \\ \dfrac{b+3}{7} = 4 \end{cases}$$

La solución de este sistema es: $a = -1, \ b = 25$.

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] El precio de alquiler de viviendas en un determinado barrio de una gran ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 265 euros. Queremos que el error cometido al estimar el precio medio de alquiler con un nivel de confianza del 97 % sea 20,7 euros. ¿Cuántas viviendas hemos de tomar aleatoriamente para calcular la estimación?

B. [1,25 PUNTOS] En el caso de una población de tamaño pequeño, el precio de alquiler sigue una distribución normal con desviación típica 134 euros. Una muestra aleatoria de 357 viviendas da como resultado un alquiler medio de 448 euros. Obtener el intervalo de confianza del 93 % para el precio medio de alquiler.

Solución:

A. Para un nivel de confianza del 97%, según la tabla de probabilidades, tenemos $z_{\alpha/2} = 2.17$. Con un error $E = 20.7$, el número de viviendas para estimar el precio medio es:

$$n = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2.17 \cdot \frac{265}{20.7}\right)^2 = 771.7$$

Hay que estudiar 772 viviendas para estimar el precio medio del alquiler.

B. Para un nivel de confianza del 93% tenemos:

$$p = \frac{1 + 0.93}{2} = 0.97$$

Buscando el la tabla de probabilidades e interpolando tenemos que $z_{\alpha/2} = 1.881$.
El error máximo es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.881 \cdot \frac{134}{\sqrt{357}} = 13.34$$

Con una media muestral de $\bar{x} = 448$ tenemos el intervalo de confianza:

$$(\bar{x} - E, \bar{x} + E) = (434.7, 461.3)$$

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

Una empresa juguetera lanza al mercado un nuevo modelo de balón de playa, que fabrica en tres plantas, A, B y C, de las que salen respectivamente el 45 %, 21 % y el 34 % de la producción total. Se ha detectado un fallo en la máquina utilizada en cada planta para aplicar los colores. De hecho, sale defectuoso el 1 % de los balones procedentes de la planta A, el 3 % de los provenientes de la B, y el 2 % de los de la C.
Seleccionamos un balón al azar de entre todos los que han salido de las tres plantas:

A. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso y haya pasado por la máquina de la planta A?

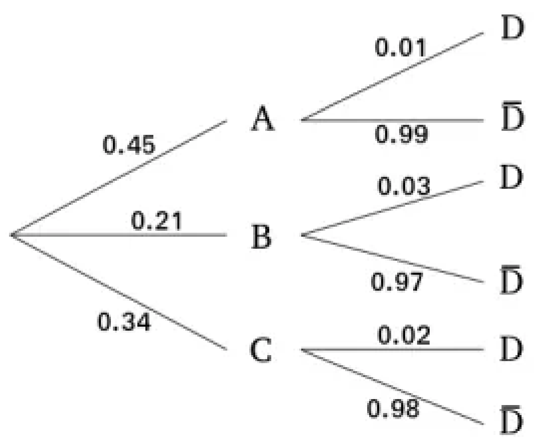
B. [1,25 PUNTOS] Si no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido de la máquina de la planta B?

Solución:

Sea A el suceso «balón de la planta A», sea B el suceso «balón de la planta B», sea C el suceso «balón de la planta C» y sea D el suceso «balón con colores defectuosos».
A partir de los datos del enunciado conocemos las siguientes probabilidades:

- $P[A] = 0.45$
- $P[B] = 0.21$
- $P[C] = 0.34$
- $P[D/A] = 0.01$
- $P[D/B] = 0.03$
- $P[D/C] = 0.02$

Con estos datos podemos construir el siguiente diagrama de árbol:



a) Nos piden la probabilidad $P[\overline{D} \cap A]$:

$$P[\overline{D} \cap A] = P[A] \cdot P[\overline{D}/A] = P[A] \cdot (1 - P[D/A]) =$$

$$= 0.45 \cdot (1 - 0.01) = 0.45 \cdot 0.99 = \boxed{0.4455}$$

b) Nos piden la probabilidad $P[B/\overline{D}]$. Utilizamos el teorema de Bayes:

$$P[B/\overline{D}] = \frac{P[B] \cdot P[\overline{D}/B]}{P[\overline{D}]} \qquad (1)$$

Necesitamos la probabilidad total $P[\overline{D}]$:

$$P[\overline{D}] = 1 - P[D] \ ;$$

$$P[D] = P[A] \cdot P[D/A] + P[B] \cdot P[D/B] + P[C] \cdot P[D/C] =$$

$$= 0.45 \cdot 0.01 + 0.21 \cdot 0.03 + 0.34 \cdot 0.02 = 0.4731 \ ;$$

$$P[\overline{D}] = 1 - 0.4731 = 0.5269$$

Sustituyendo en (1):

$$P[B/\overline{D}] = \frac{0.21 \cdot 0.97}{0.5269} = \boxed{0.387}$$