Ejercicio 1. (3 puntos). Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 6$$

a) Calcúlense a,b para que la función tenga un máximo relativo en x=1 y un mínimo relativo en x=2.
b) Para a=b=0, calcular sus puntos de inflexión.
c) Para a=b=0 representar la gráfica de la función.

Ejercicio 2. (3 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$$

a) Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas y su dominio.
b) Hállense sus asíntotas horizontales, verticales y oblicuas si es que existen.
c) Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Ejercicio 3. (2 puntos)
Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-ax+1 & si \quad x\le 1 \\ -x^2+3x-b & si \quad x>1 \end{cases}$$

a) Determínese los valores de a y b que hacen que f sea continua en x = 1 y que f(3/2) = 1/4.
b) Para el caso en el que a = 1 y b = 4, hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en x=3.

Ejercicio 4. (2 puntos)
La función $B(x)=-x^2+9x-16$ representa, en miles de euros, el beneficio neto de un proceso de venta, siendo x el número de artículos vendidos.

a) Calcular el número de artículos que deben venderse para obtener el beneficio máximo y determinar dicho beneficio.

b) Escribir la función que nos da el beneficio por artículo vendido. Encontrar si dicha función tiene un valor máximo o mínimo.

① $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 6$

a) Máximo en $x = 1$
Mínimo en $x = 2$

$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$

$f'(1) = 0 \quad 6 + 2a + b = 0$
$f'(2) = 0 \quad 24 + 4a + b = 0$

$2a + b = -6$
$4a + b = -24$

$-2a - \cancel{b} = 6$
$4a + \cancel{b} = -24$

$2a = -18$

$a = -\frac{18}{2} = -9$

$b = -6 - 2a = -6 + 18 = 12$

$b = 12$

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

$f'(x) = 0$

$6x^2 - 18x + 12 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

$f''(x) = 12x - 18$

$f''(1) = 12 - 18 = -6 \quad x = 1$ máximo

$f''(2) = 24 - 18 = +6 \quad x = 2$ mínimo

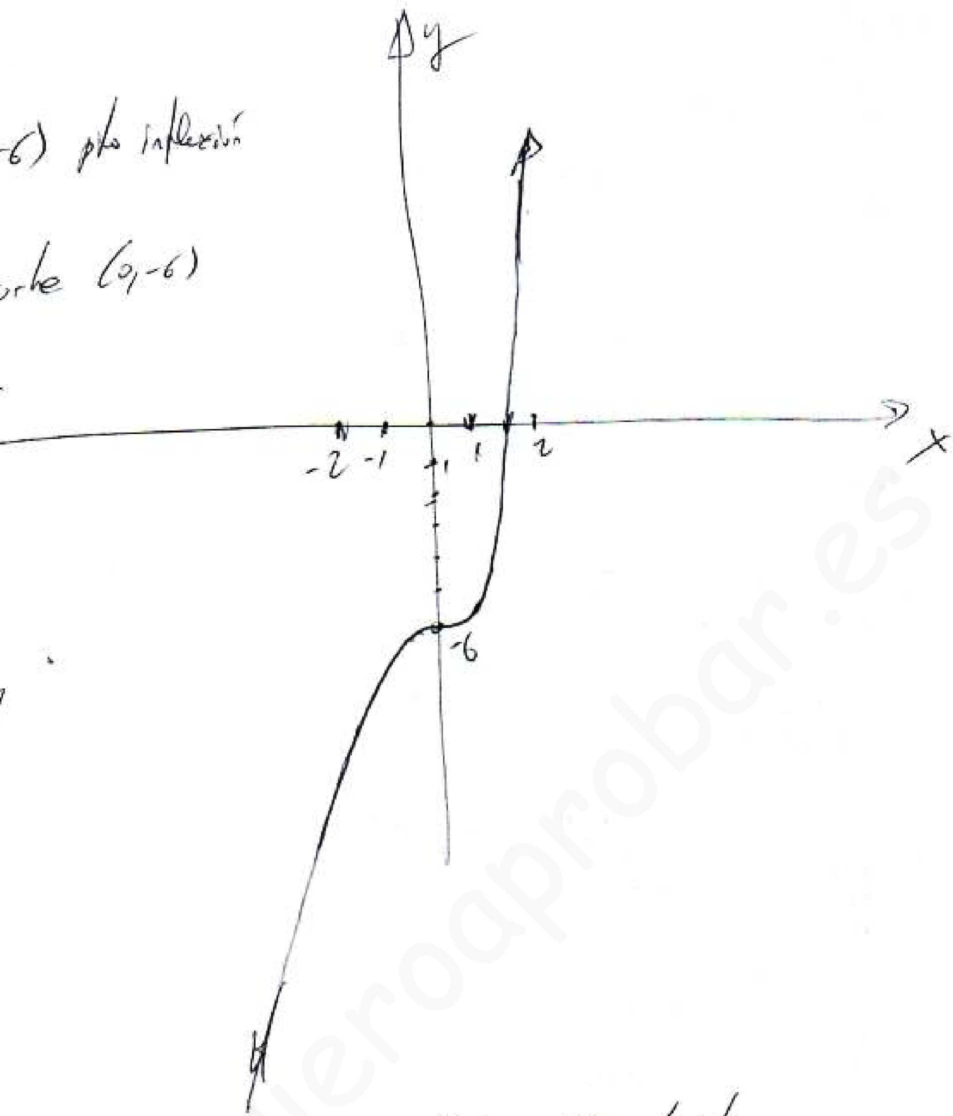
b) $a = 0 \quad b = 0 \quad f(x) = 2x^3 - 6 \quad f'(x) = 6x^2$

$f''(x) = 12x \quad 12x = 0 \quad x = 0$ $x = 0$ pto. inflexión

$f(0) = -6 \quad (0, -6)$

$(-\infty, 0)$ cóncava
$(0, \infty)$ convexa

① c) $(0,-6)$ pto inflexión



puntos de corte $(0,-6)$

$y=0$

$0=2x^3-6$

$6=2x^3$

$3=x^3$

$x=\sqrt[3]{3}=1'4$

② $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ Dom $f(x)=\mathbb{R}-\{-1\}$

Ptos de corte: $x=0 \quad y=\dfrac{0+3}{0+1}=3 \quad (0,3)$

$y=0 \quad 0=\dfrac{x^2+3}{x+1} \qquad x^2+3=0 \quad \nexists$

A. VERTICAL

$x=-1$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+3}{x+1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+3}{x+1}=+\infty$$

A. HORIZONTAL

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x^2+3}{x+1}=\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+3}{x+1}=-\infty$$

NO TIENE

② A. OBLICUA $\quad y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2+3}{x+1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3}{x \cdot (x+1)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3}{x^2+x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3}{x+1} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3}{x+1} - \frac{x(x+1)}{x+1} =$$

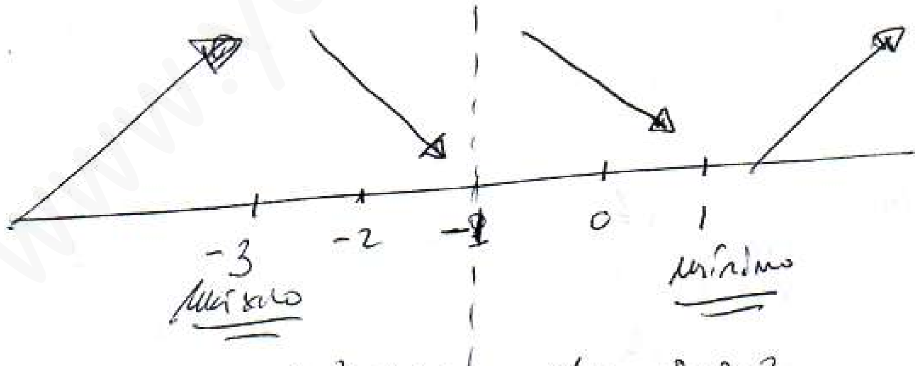
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2}-x}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3-x}{x+1} = -1$$

$y = x - 1$ Asíntota oblicua

c) $$y' = \frac{(x^2+3)'(x+1) - (x^2+3) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1) - (x^2+3) \cdot 1}{(x+1)^2} =$$

$$y' = \frac{2x^2+2x - x^2 - 3}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

$f'(x) = 0 \qquad \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = 0 \qquad x^2+2x-3=0 \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$



$f'(-2) = \frac{(-2)^2+2(-2)-3}{(-2+1)^2} = 1 \qquad f'(0) = \frac{0+0-3}{(0+1)^2} = -3 < 0$

Decrece $f'(-2) = \frac{4-4-3}{1} = -3 < 0 \qquad$ Decrece

c) CRECE $(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$

DECRECE $(-3,-1)\cup(-1,1)$

③

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-ax+1 & \text{si } x\leq 1 \\ -x^2+3x-b & \text{si } x>1 \end{cases}$$

a) Continua en $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1} 2x^2-ax+1 = 2-a+1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1} -x^2+3x-b = -1+3-b$$

$$2-a+1=-1+3-b$$

$$-a+b=-1+3-2-1$$

$$-a+b=-1 \Rightarrow \underline{a=b+1} \qquad a=2+1=3$$

$$a=3$$

$$f\left(\tfrac{3}{2}\right)=\frac{1}{4} \qquad f\left(\tfrac{3}{2}\right)=-\left(\tfrac{3}{2}\right)^2+3\cdot\frac{3}{2}-b=\frac{1}{4}$$

$$f\left(\tfrac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}-b=\frac{1}{4}$$

$$-\frac{9}{4}+\frac{18}{4}-\frac{4b}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{9-4b}{\cancel{4}}=\frac{1}{\cancel{4}} \qquad \begin{aligned} 9-4b&=1\\ 9-1&=4b\\ 8&=4b\\ b&=2 \end{aligned}$$

③ b) $a=1$ $b=4$ recta tg en $x=3$

$f(x) = -x^2+3x-4$ $\quad f(3) = -3^2+3\cdot3-4 = -4$

$f'(x) = -2x+3$ $\quad f'(3) = -6+3 = -3$

$y - f(3) = f'(3)(x-3)$

$y+4 = -3(x-3) \Rightarrow y+4 = -3x+9$

$\boxed{y=-3x+5}$

④ $B(x) = -x^2+9x-16$

a) $B'(x) = -2x+9$ $\quad B'(x)=0$

$-2x+9=0$ $\quad 2x=9$ $\quad x=\frac{9}{2}=4'5$

$B(4) = -4^2+9\cdot4-16=4$ $\quad B(4'5) = -(4'5)^2+9\cdot4'5-16$

$B(5) = -5^2+9\cdot5-16=4$ $\quad B(4'5)=4'25$

b) beneficio por artículo $= \frac{B(x)}{x} = \frac{-x^2+9x-16}{x} = -x+9-\frac{16}{x}$ $\quad f'(x) = -1+\frac{16}{x^2}$

$f(x)=\frac{-x^2+9x-16}{x}$ $\quad f'(x)=\frac{(-2x+9)x-(-x^2+9x-16)\cdot1}{x^2}=$

$f'(x)=0$ $\quad -x^2+16=0$ $\quad f'(x)=\frac{-2x^2+\cancel{9x}+x^2-\cancel{9x}+16}{x^2}=$

$x^2=16$

$\boxed{x=\pm4}$ $\quad f'(x)=\frac{-x^2+16}{x^2}$

(4)

$x=-4$ no puede ser

$x=4 \Rightarrow \quad f''(x)=\dfrac{(-2x)\,x^2-(-x^2+16)\cdot 2x}{x^4}$

$x=4$

Máximo

$$f''(x)=\frac{\cancel{-2x^3}\cancel{+2x^3}-32x}{x^4}=\frac{-32x}{x^4}$$

$$f''(x)=\frac{-32}{x^3} \qquad f''(4)=\frac{-32}{4^3}<0$$

$$f(4)=\frac{-4^2+9\cdot 4-16}{4}=1$$