

Ejercicio 1. (3 puntos). Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 6$$

- Calcúlense a, b para que la función tenga un máximo relativo en $x=1$ y un mínimo relativo en $x=2$.
- Para $a=b=0$, calcular sus puntos de inflexión.
- Para $a=b=0$ representar la gráfica de la función.

Ejercicio 2. (3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$$

- Determinense los puntos de corte con los ejes de coordenadas y su dominio.
- Hállense sus asíntotas horizontales, verticales y oblicuas si es que existen.
- Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Ejercicio 3. (2 puntos)

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 3x - b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Determinense los valores de a y b que hacen que f sea continua en $x = 1$ y que $f(3/2) = 1/4$.
- Para el caso en el que $a = 1$ y $b = 4$, hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x=3$.

Ejercicio 4. (2 puntos)

La función $B(x) = -x^2 + 9x - 16$ representa, en miles de euros, el beneficio neto de un proceso de venta, siendo x el número de artículos vendidos.

- Calcular el número de artículos que deben venderse para obtener el beneficio máximo y determinar dicho beneficio.
- Escribir la función que nos da el beneficio por artículo vendido. Encontrar si dicha función tiene un valor máximo o mínimo.

$$\textcircled{1} f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 6$$

a) Máximo en $x=1$
Mínimo en $x=2$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$$

$$f'(1) = 0 \quad 6 + 2a + b = 0$$

$$f'(2) = 0 \quad 24 + 4a + b = 0$$

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

$$-2a - b = 6$$

$$4a + b = -24$$

$$2a + b = -6$$

$$4a + b = -24$$

$$f'(x) = 0$$

$$6x^2 - 18x + 12 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array} \right\}$$

$$2a = -18$$

$$a = -\frac{18}{2} = \textcircled{-9}$$

$$b = -6 - 2a = -6 + 18 = 12$$

$$\textcircled{b=12}$$

$$f''(x) = 12x - 18$$

$$f''(1) = 12 - 18 = -6 \quad x=1 \quad \underline{\underline{\text{máximo}}}$$

$$f''(2) = 24 - 18 = +6 \quad x=2 \quad \underline{\underline{\text{mínimo}}}$$

b) $a=0 \quad b=0$

$$f(x) = 2x^3 - 6$$

$$f'(x) = 6x^2$$

$$f''(x) = 12x$$

$$12x = 0 \quad \textcircled{x=0}$$

$x=0$ pto.
Inflexión

$$f(0) = -6$$

$$(0, -6)$$

$(-\infty, 0)$ cóncava

$(0, \infty)$ convexa

① c) $(0, -6)$ pto inflexión

ptos de corte $(0, -6)$

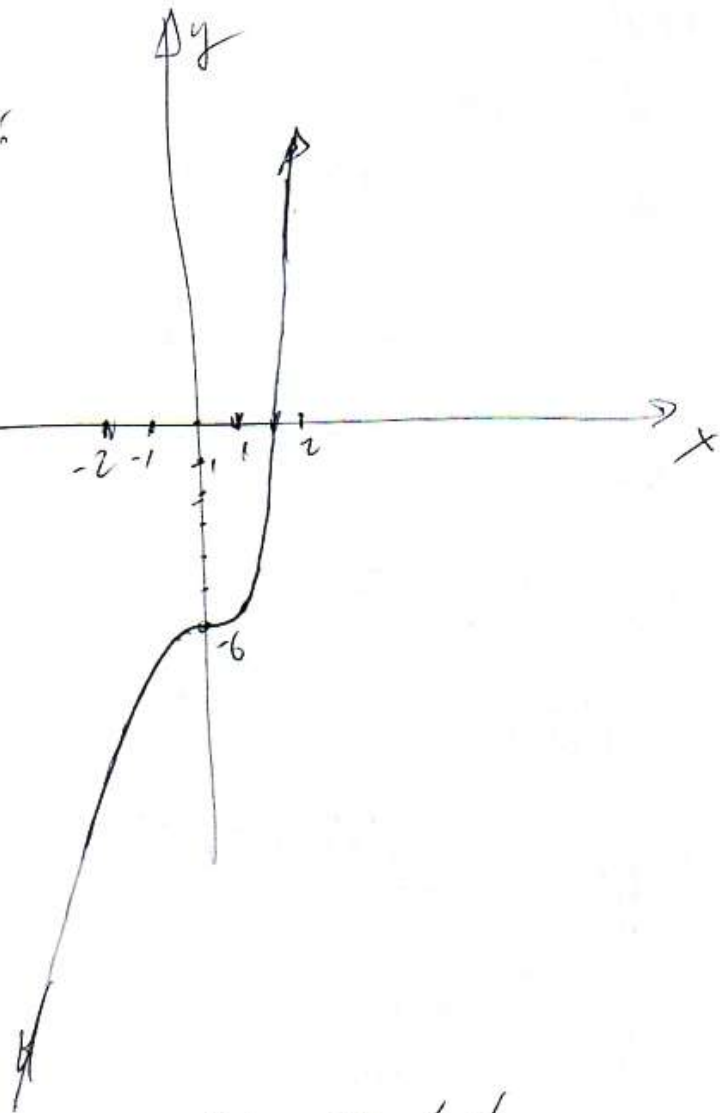
$$y=0$$

$$0 = 2x^3 - 6$$

$$6 = 2x^3$$

$$3 = x^3$$

$$x = \sqrt[3]{3} = 1.14$$



②

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

ptos de corte: $x=0 \quad y = \frac{0+3}{0+1} = 3 \quad (0, 3)$

$$y=0 \quad 0 = \frac{x^2+3}{x+1}$$

$$x^2+3=0 \quad \nexists$$

A. VERTICAL

$$(x = -1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2+3}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+3}{x+1} = +\infty$$

A. HORIZONTAL

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x+1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+3}{x+1} = -\infty$$

NO TIENE

② A. OBLICWA $g = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+3}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x \cdot (x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x^2+x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x+1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3 - x(x+1)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3 - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-x}{x+1} = -1$$

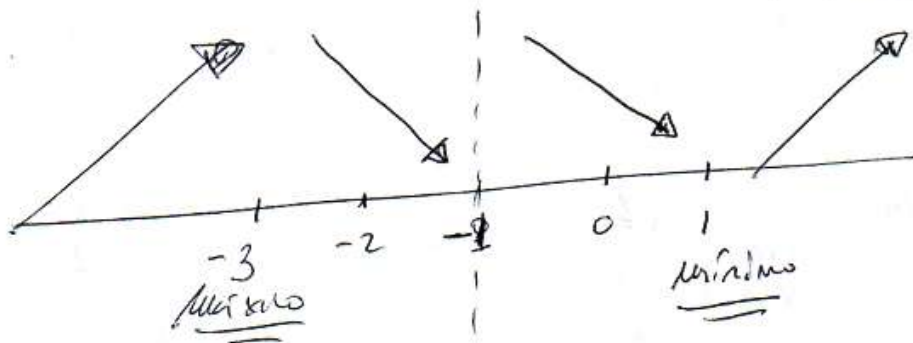
$g = x - 1$ Asintotă oblicwa

$$c) g' = \frac{(x^2+3)'(x+1) - (x^2+3) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1) - (x^2+3) \cdot 1}{(x+1)^2} =$$

$$g' = \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 3}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = 0 \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array} \right\}$$



$$f''(-2) = \frac{(-2)^2 + 2(-2) - 3}{(-2+1)^2} = 1$$

$$f''(0) = \frac{0+0-3}{(0+1)^2} = -3 < 0$$

Deoarece $f''(-2) = \frac{4-4-3}{1} = -3 < 0$

Deoarece

9) CRECE $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$

DECRECE $(-3, -1) \cup (-1, 1)$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 3x - b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Continua en $x=1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 - ax + 1 = 2 - a + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} -x^2 + 3x - b = -1 + 3 - b$$

$$2 - a + 1 = -1 + 3 - b$$

$$-a + b = -1 + 3 - 2 - 1$$

$$-a + b = -1 \Rightarrow \underline{a = b + 1} \quad a = 2 + 1 = 3$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} - b = \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - b = \frac{1}{4}$$

$$-\frac{9}{4} + \frac{18}{4} - \frac{4b}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{9 - 4b}{4} = \frac{1}{4}$$

$$9 - 4b = 1$$

$$9 - 1 = 4b$$

$$8 = 4b$$

$$\textcircled{b = 2}$$

③ b) $a=1$ $b=4$ recta t_g en $x=3$

$$f(x) = -x^2 + 3x - 4 \quad f(3) = -3^2 + 3 \cdot 3 - 4 = -4$$

$$f'(x) = -2x + 3 \quad f'(3) = -6 + 3 = -3$$

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3)$$

$$y + 4 = -3(x - 3) \Rightarrow y + 4 = -3x + 9$$

$$\boxed{y = -3x + 5}$$

④ $B(x) = -x^2 + 9x - 16$

a) $B'(x) = -2x + 9 \quad B'(x) = 0$

$$-2x + 9 = 0 \quad 2x = 9 \quad x = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

$$B(4) = -4^2 + 9 \cdot 4 - 16 = 4$$

$$B(4\frac{1}{2}) = -(4\frac{1}{2})^2 + 9 \cdot 4\frac{1}{2} - 16$$

$$B(5) = -5^2 + 9 \cdot 5 - 16 = 4$$

$$B(4\frac{1}{2}) = 4\frac{1}{2}$$

b) $\frac{B(x)}{x} = \frac{-x^2 + 9x - 16}{x} = -x + 9 - \frac{16}{x} \quad f'(x) = -1 + \frac{16}{x^2}$
por cociente

$$f(x) = \frac{-x^2 + 9x - 16}{x} \quad f'(x) = \frac{(-2x + 9)x - (-x^2 + 9x - 16) \cdot 1}{x^2} =$$

$$f'(x) = 0 \quad -x^2 + 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$\boxed{x = \pm 4}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 9x + x^2 - 9x + 16}{x^2} =$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 16}{x^2}$$

(4)

$x = -4$ no puede ser

$$x = 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{(-2x)x^2 - (-x^2+16) \cdot 2x}{x^4}$$

$$x = 4$$

Máximo

$$f'(x) = \frac{-2x^3 + 2x^3 - 32x}{x^4} = \frac{-32x}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-32}{x^3}$$

$$f''(4) = \frac{-32}{4^3} < 0$$

$$f(4) = \frac{-4^2 + 9 \cdot 4 - 16}{4} = 1$$