# Capítulo 5

# Estadística

## 5.1. Año 2018

### 5.1.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 5.1.1** *(2,5 puntos)* Sabiendo que el peso de los estudiantes varones de segundo de bachillerato se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal, de media 74 kg y desviación típica 6 kg, se pide:

a) (1 punto) Determinar el porcentaje de estudiantes varones cuyo peso está comprendido entre los 68 y 80 kg.

b) (0,5 puntos) Estimar cuántos de los 1500 estudiantes varones, que se han presentado a las pruebas de la EvAU en una cierta universidad, pesan más de 80 kg.

c) (1 punto) Si se sabe que uno de estos estudiantes pesa más de 76 kg, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 86 kg?

**Solución:**
$N(74, 6)$

a) $P(68 \le X \le 80) = P\left(\frac{68-74}{6} \le Z \le \frac{80-74}{6}\right) = P(-1 \le Z \le 1) = P(Z \le 1) - P(Z \le -1) = P(Z \le 1) - (1 - P(Z \le 1) = 2P(Z \le 1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826 \Longrightarrow 68,26\,\%$

b) $P(X \ge 80) = 1 - P(X \le 80) = 1 - P\left(Z \le \frac{80-74}{6}\right) = 1 - P(Z \le 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587 \Longrightarrow 15,87\,\% \Longrightarrow 238$ estudiantes pesarán más de 80 $kg$.

c) $P(X \ge 86|X \ge 76) = \frac{P(\{X \ge 86\} \cap \{X \ge 76\})}{P(X \ge 76)} = \frac{P(X \ge 86)}{P(X \ge 76)} = \frac{1 - P(X \le 86)}{1 - P(X \le 76)} = \frac{1 - P\left(Z \le \frac{86-74}{6}\right)}{1 - P\left(Z \le \frac{76-74}{6}\right)} = \frac{1 - P(Z \le 2)}{1 - P(Z \le 0,33)} = \frac{1 - 0,9772}{1 - 0,6293} = 0,0615$

### 5.1.2. Ordinaria

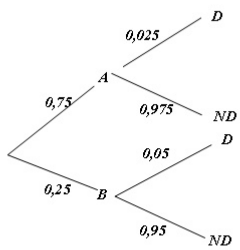
**Opción B**

**Problema 5.1.2** *(2,5 puntos)* En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: $A$ y $B$. El 75 % de los productos fabricados son de tipo $A$ y el 25 % de tipo $B$. Los productos de tipo $B$ salen defectuosos un 5 % de las veces, mientras que los de tipo $A$ salen defectuosos un 2,5 % de las veces.

a) (1 punto) Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?

b) (1,5 puntos) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo $A$. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

**Solución:**




a) $P(D) = P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B) = 0,025\cdot 0,75+0,05\cdot 0,25 = 0,03125$. Luego se esperan $5000 \cdot 0,03125 = 156,25$ tornillos defectuosos, redondeando por exceso 157.

b) $p = 0,025$, $q = 1 - p = 0,975$ y $n = 6000$. Se trata de una binomial $B(6000; 0,025)$ como $np = 6000 \cdot 0,025 = 150 > 5$ y $nq = 6000 \cdot 0,975 = 5850 > 5$ la binomial se comporta como una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(150; 12,09)$
Aplicando la corrección por continuidad de Yates
$P(X > 160) = P(X \geq 160,5) = P\left(Z \geq \frac{160,5-150}{12,09}\right) = P(Z \geq 0,87) = 1 - P(Z \leq 0,87) = 1 - 0,8078 = 0,1922$

### 5.1.3. Extraordinaria

**Opción B**

**Problema 5.1.3** *(2,5 puntos)* La variable aleatoria $X$ sigue una distribución normal de media $\mu = 8,5$ y desviación típica $\sigma = 2,5$. Se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular el valor $a$ tal que $P(X \leq a) = 0,05$.

b) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y 9,3.

**Solución:**

$N(8,5; 2,5)$

a) La tabla de la normal empieza con 0,5: $P(X \leq a) = 0,05 \Longrightarrow 1 - P\left(Z \leq \dfrac{a-8,5}{2,5}\right) = 1 - 0,05 \Longrightarrow P\left(Z \leq -\dfrac{a-8,5}{2,5}\right) = 0,95 \Longrightarrow -\dfrac{a-8,5}{2,5} = 1,645 \Longrightarrow a = 4,3875$

b) $P(8 \leq X \leq 9,3) = P\left(\dfrac{8-8,5}{2,5} \leq Z \leq \dfrac{9,3-8,5}{2,5}\right) = P(-0,2 \leq Z \leq 0,32) = P(Z \leq 0,32) - P(Z \leq -0,2) = P(Z \leq 0,32) - (1 - P(Z \leq 0,2)) = 0,6255 - (1 - 0,5793) = 0,2048$

## 5.2. Año 2019

### 5.2.1. Modelo

**Opción A**

**Problema 5.2.1** *(2,5 puntos)* El examen de oposición a la Administración Local de cierta ciudad consta de 300 preguntas, con respuesta verdadero o falso. Un opositor responde al azar todas las preguntas. Se considera la variable aleatoria $X$("número de respuestas acertadas") y se pide:

a) (1,5 puntos) Justificar que la variable $X$ se puede aproximar por una normal y obtener los parámetros correspondientes.

b) (1 punto) Utilizando la aproximación por la normal, hallar la probabilidad de que el opositor acierte a lo sumo 130 preguntas y la probabilidad de que acierte exactamente 160 preguntas.

**Solución:**

a) Se trata de una distribución binomial $B(300; 0,5)$ con $n = 300$, $p = 0,5$ y $q = 1 - p = 0,5$. Como $n > 10$, $np = 300 \cdot 0,5 = 150 > 5$ y $nq = 300 \cdot 0,5 = 150 > 5$ podemos aproximar esta binomial por una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(150; 8,66)$.

b) La probabilidad de que acierte a lo sumo 130 aplicando la corrección por continuidad de Yates sería:

$$P(X \leq 130,5) = P\left(Z \leq \frac{130,5-150}{8,66}\right) = P(Z \leq -2,25) =$$

$$1 - P(Z \leq 2,25) = 1 - 0,9878 = 0,0122$$

La probabilidad de que acierte exactamente 160 aplicando la correción por continuidad de Yates sería:

$$P(159,5 \leq X \leq 160,5) = P\left(\frac{159,5-150}{8,66} \leq Z \leq \frac{160,5-150}{8,66}\right) =$$

$$P(1,10 \leq Z \leq 1,21) = P(Z \leq 1,21) - P(Z \leq 1,10) =$$

$$0,8869 - 0,8643 = 0,0226$$

### 5.2.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 5.2.2** *(2,5 puntos)* La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10 %. Se pide:

a) (1 punto) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.

b) (1,5 puntos) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

**Solución:**

a) Se trata de una binomial $B(0,1;10)$:

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$$
$$1 - \left( \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} 0,1^0 \cdot 0,9^{10} + \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} 0,1^1 \cdot 0,9^9 \right) =$$
$$1 - (0,348678 + 0,387420) = 1 - 0,736098 = 0,263902$$

b) Se trata de una distribución binomial $B(200;0,1)$ con $n = 200$, $p = 0,1$ y $q = 1 - p = 0,9$. Como $n > 10$, $np = 200 \cdot 0,1 = 20 > 5$ y $nq = 200 \cdot 0,9 = 180 > 5$ podemos aproximar esta binomial por una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(20;4,24)$.

$$P(X \geq 10) = P(X > 9,5) = P\left(Z > \frac{9,5 - 20}{4,24}\right) = P(Z > -2,48) =$$
$$1 - P(Z < -2,48) = 1 - (1 - P(Z < 2,48)) = P(z < 2,48) = 0,9934$$

### 5.2.3. Ordinaria-Coincidente

**Opción B**

**Problema 5.2.3** *(2,5 puntos)* Una compañía de mensajería tiene una probabilidad del 2 % de dañar cada uno de sus envíos. Asumimos que las probabilidades de que varios envíos distintos resulten dañados son independientes entre sí. Se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la probabilidad de que en un lote de 10 paquetes hayan llegado con desperfectos exactamente 2 envíos.

b) (0,5 puntos) Hallar la probabilidad de que en un lote de 10 paquetes hayan llegado con desperfectos 2 o más envíos.

c) (1,5 puntos) Usando la aproximación por la normal adecuada, hallar la probabilidad de que en un lote de 2000 paquetes hayan llegado exactamente 30 paquetes defectuosos.

**Solución:**

a) Se trata de una binomial $B(0,02;10)$:

$$P(X = 2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} 0,02^2 \cdot 0,98^8 = 0,015314$$

b) Se trata de una binomial $B(0,02;10)$:

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$$
$$1 - \left( \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} 0,02^0 \cdot 0,98^{10} + \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} 0,02^1 \cdot 0,98^9 \right) =$$
$$1 - (0,817073 + 0,16675) = 0,016177$$

c) Se trata de una distribución binomial $B(2000; 0,02)$ con $n = 2000$, $p = 0,02$ y $q = 1 - p = 0,98$. Como $np = 2000 \cdot 0,02 = 40 > 5$ y $nq = 2000 \cdot 0,98 = 1960 > 5$ podemos aproximar esta binomial por una normal

$N(np, \sqrt{npq}) = N(40; 6,261)$.

$$P(X = 30) = P(29,5 < X < 30,5) = P\left(\frac{29,5 - 40}{6,261} < Z < \frac{30,5 - 40}{6,261}\right)$$

$$= P(-1,68 < Z < -1,52) = P(Z < -1,52) - P(z < -1,68) =$$

$$1 - P(Z < 1,52) - (1 - P(Z < 1,68) = P(z < 1,68) - P(Z < 1,52)$$

$$= 0,9535 - 0,9357 = 0,0178$$

### 5.2.4. Extraordinaria

**Opción A**

**Problema 5.2.4** *(2,5 puntos)* Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

a) (1,25 puntos) Se sabe que el 40 % del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.

b) (1,25 puntos) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, $X$, de media $5,6$ y desviación típica $\sigma$. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8,2$ es $0,67$, calcule $\sigma$.

**Solución:**

a) Se trata de una binomial $B(8; 0,4)$:

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$$

$$1 - \left(\left(\begin{array}{c} 8 \\ 0 \end{array}\right) 0,4^0 \cdot 0,6^8 + \left(\begin{array}{c} 8 \\ 1 \end{array}\right) 0,4^1 \cdot 0,6^7\right) =$$

$$1 - (0,6^8 + 8 \cdot 0,4 \cdot 0,6^7) = 0,8936$$

b) Se trata de una distribución normal $N(5,6; \sigma)$

$$P(X \leq 8,2) = P\left(Z \leq \frac{8,2 - 5,6}{\sigma}\right) = 0,67 \Longrightarrow$$

$$\frac{8,2 - 5,6}{\sigma} = 0,44 \Longrightarrow \sigma = 5,91$$

## 5.3. Año 2020

### 5.3.1. Modelo

**Opción B**

**Problema 5.3.1** *(2,5 puntos)* En cierta ciudad se estima que la temperatura máxima de cada día, en el mes de junio, sigue una distribución normal de media 30°C y varianza 25. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que un día cualquiera del mes la temperatura máxima esté entre 28°C y 32°C.

b) (1 punto) Calcular el número esperado de días del mes con máxima superior a 36°C.

c) (0,75 puntos) Determinar la temperatura máxima alcanzada el día 10 de junio, sabiendo que dicha temperatura fue superada exactamente el 50 % de los días del mes.

**Solución:**

$$\sigma^2 = Var(X) = 25 \Longrightarrow \sigma = 5 \Longrightarrow N(30, 5)$$

a) $P(28 \le X \le 32) = P\left(\dfrac{28-30}{5} < Z < \dfrac{32-30}{5}\right) = P(-0,4 < Z < 0,4) = P(Z < 0,4) - P(Z < -0,4) = P(Z < 0,4) - (1 - P(Z < 0,4)) = 2P(Z < 0,4) - 1 = 2 \cdot 0,6554 - 1 = 0,3108$

b) $P(X \ge 36) = P\left(Z > \dfrac{36-30}{5}\right) = P(Z > 1,2) = 1 - P(Z < 1,2) = 1 - 0,8849 = 0,1151.$
Como el mes de junio tiene 30 días tendremos $30P(X \ge 36) = 30 \cdot 0,1151 = 3,453 \Longrightarrow$ entre 3 o 4 días se superaran los $36^{\text{o}}$°C de temperatura.

c) $P(X \ge a) = P\left(Z > \dfrac{a-30}{5}\right) = 1 - P\left(Z < \dfrac{a-30}{5}\right) = 0,5 \Longrightarrow \dfrac{a-30}{5} = 0 \Longrightarrow a = 30°\text{C}.$

### 5.3.2. Ordinaria

**Opción A**

**Problema 5.3.2** *(2,5 puntos)* Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30 %. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40 %, en el tercero del 50 % y en el cuarto del 60 %. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.

b) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.

c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85 % de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

**Solución:**

a) La probabilidad $P_1$ de que no se lance la cuarta flecha será:
$P_1$ = probabilidad de acertar en el primer lanzamiento + probabilidad de fallar el primer lanzamiento y acertar el segundo + probabilidad de fallar el primer lanzamiento y fallar el segundo lanzamiento y acertar el tercer lanzamiento $= 0,3 + 0,7 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,79$

b) $P_2$ = probabilidad de no acierta en la primera y no acierta en la segunda y no acierta en la tercera y no acierta en la cuarta $= 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,084$

c) $B(10; 0,85)$:

$$P(X = 6) = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot 0,85^6 \cdot 0,15^4 = 0,04$$

### 5.3.3. Ordinaria-Coincidente

**Opción B**

**Problema 5.3.3** *(2,5 puntos)* El peso de las crías recién nacidas de una especie de primates sigue una distribución normal $X$ de media $\mu = 3353$ gramos. Sabiendo que $P(X > 3693) = 0,2$, se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular la desviación típica, $\sigma$, de la distribución de pesos.

b) (1 punto) Calcular el valor $x_0$ tal que $P(X < x_0) = 0,2$.

**Solución:**

$$N(3353; \sigma)$$

a) $P(X > 3693) = P\left(Z > \dfrac{3693 - 3353}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z < \dfrac{340}{\sigma}\right) = 0,2 \Longrightarrow P\left(Z < \dfrac{340}{\sigma}\right) = 0,8 \Longrightarrow \dfrac{340}{\sigma} = 0,845 \Longrightarrow \sigma = 402,37$ gramos.

b) $P(X < x_0) = P\left(Z < \dfrac{x_0 - 3353}{402,37}\right) = 1 - P\left(Z < -\dfrac{x_0 - 3353}{402,37}\right) = 0,2 \Longrightarrow$
$P\left(Z < -\dfrac{x_0 - 3353}{402,37}\right) = 0,8 \Longrightarrow -\dfrac{x_0 - 3353}{402,37} = 0,845 \Longrightarrow x_0 = 3013$ gramos.

### 5.3.4. Extraordinaria

**Opción B**

**Problema 5.3.4** *(2,5 puntos)* En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes $X$, $Y$. Sabemos que $P(X) = 0,4$ y que $P(X \cap \overline{Y}) = 0,08$ (donde $\overline{Y}$ es el suceso complementario de $Y$ ). Se pide:

a) (1 punto) Calcular $P(Y)$.

b) (0,5 puntos) Calcular $P(X \cup Y)$.

c) (1 punto) Si $X$ es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede $X$, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

**Solución:**

Tenemos $P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$, $P(X) = 0,4$ y $P(X \cap \overline{Y}) = 0,08$

a) $P(X \cap \overline{Y}) = P(X) - P(X \cap Y) \Longrightarrow P(X \cap Y) = P(X) - P(X \cap \overline{Y}) = 0,4 - 0,08 = 0,32$
$P(X \cap Y) = P(X)P(Y) \Longrightarrow 0,32 = 0,4P(Y) \Longrightarrow P(Y) = \dfrac{0,32}{0,4} = 0,8$

b) $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = 0,4 + 0,8 - 0,32 = 0,88$.

c) $p = P(\overline{X}) = 1 - P(X) = 0,6$ y sea $A$ el nº de aciertos con probabilidad $p$. Se trata de una distribución binomial $B(8; 0,6)$.

$$P(A \geq 2) = 1 - (P(A = 0) + P(A = 1)) =$$

$$1 - \left[ \binom{8}{0} 0,6^0 \cdot 0,4^8 + \binom{8}{1} 0,6^1 \cdot 0,4^7 \right] = 0,99148032$$

# 5.4. Año 2021

## 5.4.1. Modelo

### Opción A

**Problema 5.4.1** *(2,5 puntos)* En un instituto, uno de cada cuatro alumnos practica baloncesto. Se eligen 6 alumnos al azar y se considera la variable aleatoria $X$ que representa el número de estudiantes entre estos 6 que practican baloncesto. Se pide:

a) (1 punto) Identificar la distribución de la variable aleatoria $X$ y calcular $P(X = 0)$.

b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 5 de los 6 elegidos practiquen baloncesto.

c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 1 de los 6 practique baloncesto.

**Solución:**

a) Es una distribución binomial $X \sim B(6; 0,25)$.

$$P(X = 0) = \binom{6}{0} 0,25^0 \cdot 0,75^6 = 0,177979$$

b) $P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) = \binom{6}{5} 0,25^5 \cdot 0,75^1 + \binom{6}{6} 0,25^6 \cdot 0,75^0 = 0,004639$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,177979 = 0,822021$