Capítulo 1

Álgebra

1.1. Año 2000

1.1.1. Modelo

Opción A

Problema 1.1.1 *(3 puntos)* Sea el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x+ & \lambda y+ & 2z= & \lambda \\ 2x+ & \lambda y- & z= & 2 \\ \lambda x- & y+ & 2z= & \lambda \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

c) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & \lambda & 2 & \lambda \\ 2 & \lambda & -1 & 2 \\ \lambda & -1 & 2 & \lambda \end{array}\right), \quad |A| = -3\lambda^2 - 6\lambda - 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

- Si $\lambda \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ =nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado. (Solución única)
- Si $\lambda = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Como tiene dos filas iguales y el menor $\left|\begin{array}{rr} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{array}\right| = 3 \neq 0$ tenemos que Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A})$ <nº incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

b) Si $\lambda = -1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x- & y+ & 2z= & -1\\ 2x- & y- & z= & 2\end{array}\right. \left\{\begin{array}{rr} x= & 1+t\\ y= & t\\ z= & t\end{array}\right.$$

c) Si $\lambda = 2$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x+ & 2y+ & 2z= & 2\\ 2x+ & 2y- & z= & 2\\ 2x- & y+ & 2z= & 2\end{array}\right. \left\{\begin{array}{rr} x= & 2/3\\ y= & 2/3\\ z= & 2/3\end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.1.2 *(3 puntos)*

a) (1 punto) Encontrar los valores de λ para los que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 1\\ \lambda & 0 & 2\end{pmatrix}$$

es invertible.

b) (1 punto) Para $\lambda = 2$, hallar la inversa de A y comprobar el resultado.

c) (1 punto) Resolver el sistema

$$A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

para $\lambda = 1$

Solución:

a) $|A| = (\lambda-1)(3\lambda-4) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$ y $\lambda = \dfrac{4}{3}$.

Si $\lambda = 1$, o $\lambda = \dfrac{4}{3} \Longrightarrow$ No es invertible.

Si $\lambda \neq 1$, y $\lambda \neq \dfrac{4}{3} \Longrightarrow$ Si es invertible.

b) Si $\lambda = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2\\ 1 & 2 & -1/2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2\\ 1 & 2 & -1/2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

c) Con $\lambda = 1$ y $AX = O$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrr} & y- & z=0\\ - & y+ & z=0\\ x+ & & 2z=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} & y- & z=0\\ x+ & & 2z=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x= & -2t\\ y= & t\\ z= & t\end{array}\right.$$

1.1.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.1.3 *(3 puntos)* Para una matriz cuadrada, se define su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue, A y B son matrices cuadradas 2×2.

a) (0,5 puntos) Comprobar que se verifica:

$$Traza(A+B) = Traza(A) + Traza(B)$$

b) (1 punto) Comprobar que

$$Traza(A \cdot B) = Traza(B \cdot A)$$

c) (1 punto) Utilizando los resultados anteriores, demostrar que es imposible tener $AB - BA = I$, donde I denota la matriz identidad.

d) (0,5 puntos) Encontrar dos matrices A y B para las que:

$$Traza(AB) \neq Traza(A) \cdot Traza(B)$$

Solución:

a) Sean

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$Traza(A) = a_1 + a_4, \quad Traza(B) = b_1 + b_4$$

$$Traza(A) + Traza(B) = a_1 + b_1 + a_4 + b_4$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow Traza(A+B) = a_1 + b_1 + a_4 + b_4$$

Luego:

$$Traza(A+B) = Traza(A) + Traza(B)$$

b)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_3b_2 & a_2b_1 + a_4b_2 \\ a_1b_3 + a_3b_4 & a_2b_3 + a_4b_4 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Traza(AB) = a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_4 \\ Traza(BA) = a_1b_1 + a_3b_2 + a_2b_3 + a_4b_4 \end{array} \right. \Longrightarrow Traza(AB) = Traza(BA)$$

c) Suponemos que la igualdad es cierta, es decir:

$$AB - BA = I \Longrightarrow AB = BA + I \Longrightarrow Traza(AB) = Traza(BA + I) \Longrightarrow$$

$$Traza(AB) = Traza(BA) + Traza(I), \text{ como } Traza(AB) = Traza(BA)$$

$$\Longrightarrow 0 = 2$$

Luego esta igualdad es falsa.

d) Sea A una matriz cualquiera y $B = I$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = A \Longrightarrow Traza(A \cdot B) = Traza(A) = 4, \quad Traza(B) = 2$$
$$Traza(A) \cdot Traza(B) = 4 \cdot 2 = 8$$

Luego $Traza(A \cdot B) \neq Traza(A) \cdot Traza(B)$

Opción B

Problema 1.1.4 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} ax+ & y+ & z = & (a-1)(a+2) \\ x+ & ay+ & z = & (a-1)^2(a+2) \\ x+ & y+ & az = & (a-1)^3(a+2) \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Comprobar que es compatible para todo valor de a.

b) (1 punto) Describir en términos geométricos el conjunto de soluciones para $a = 1$ y para $a = -2$.

c) (1 punto) Resolverlo para $a = -2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & (a-1)(a+2) \\ 1 & a & 1 & (a-1)^2(a+2) \\ 1 & 1 & a & (a-1)^3(a+2) \end{array} \right), \quad |A| = a^3 - 3a + 2 = 0 \Longrightarrow a = 1, \quad a = -2$$

- ☛ Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ SCD.
- ☛ Si $a = 1$: (Homogéneo)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = \text{Rango}(A) < \text{nincógnitas} \Longrightarrow \text{SCI}$$

- ☛ Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right), \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 2 <$nº incógnitas$\Longrightarrow$ SCI

Para cualquier valor de a el sistema es, por tanto, compatible.

b) Si $a = 1$ se trata de tres planos coincidentes, $x + y + z = 0$.

Si $a = -2$ se cortan en una recta que calculamos en el siguiente apartado.

c)

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x- & 2y+ & z = & 0 \\ x+ & y+ & -2z = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrl} x- & 2y = & -z \\ x+ & y = & 2z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

1.1.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.1.5 *(3 puntos)* Considerar el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z= & 1\\ (\lambda-1)x+ & y+ & z= & \lambda\\ x+ & (\lambda-1)y- & z= & 0\end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro λ.

b) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 0$.

c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 3$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1\\ \lambda-1 & 1 & 1 & \lambda\\ 1 & \lambda-1 & -1 & 0\end{array}\right),\quad |A|=\lambda(\lambda-1)=0\Longrightarrow \lambda=0,\ \lambda=1$$

- Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) = 3 =Rango$\overline{A}$ =nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).
- Si $\lambda = 0$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 0\end{array}\right)$$

  Como la tercera fila es igual a la segunda multiplicada por -1, y como el menor $\left|\begin{array}{cc} 0 & 1\\ -1 & 1\end{array}\right| = 1 \neq 0$ Tenemos que Rango(A) = 2 =Rango$(\overline{A})$ <nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).
- Si $\lambda = 1$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)$$

  Como la primera fila es igual a la segunda, y como el menor $\left|\begin{array}{cc} 0 & 1\\ 1 & 0\end{array}\right| = -1 \neq 0$ Tenemos que Rango(A) = 2 =Rango$(\overline{A})$ <nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $\lambda = 0$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z= & 1\\ -x+ & y+ & z= & 0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rr} x= & 1\\ y= & 1-t\\ z= & t\end{array}\right.$$

c) Si $\lambda = 3$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z= & 1\\ 2x+ & y+ & z= & 3\\ x+ & 2y- & z= & 0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=0\\ z=1\end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.1.6 *(3 puntos)*

a) (2 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ 2x & - & kz = & 0 \\ x- & y+ & z = & 0 \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Discutir en función de los valores de λ y resolver en los casos de compatibilidad del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ 2x & - & 3z = & 0 \\ x- & y+ & z = & 0 \\ x+ & 2y+ & 2\lambda z = & \lambda \end{array}\right.$$

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -k \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = -2k - 12 = 0 \Longrightarrow k = -6$$

Se trata de un sistema homogéneo y, por tanto, es siempre compatible.

- Si $k \neq -6 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Como la solución es única, sólo tiene la trivial: $x = y = z = 0$
- Si $k = -6$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A) < \text{nincógnitas} \Longrightarrow \text{SCI}$$

El sistema en este caso es Compatible Indeterminado, si escogemos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, vemos que el Rango$(A) = 2$ y, además podemos eliminar la segunda fila, para la solución del sistema, y nos queda:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ x- & y+ & z = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x+ & y = & -5\lambda \\ x- & y = & -\lambda \\ & z = & \lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x = & -3\lambda \\ y = & -2\lambda \\ z = & \lambda \end{array}\right.$$

b) Ahora tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2\lambda & \lambda \end{array}\right) \text{ y que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

$$|\overline{A}| = \left|\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2\lambda & \lambda \end{array}\right| = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -18\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$$

- ☛ Si $\lambda \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 4 \neq \text{Rango}(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.(No tiene solución)
- ☛ Si $\lambda = 0$ se trata de un sistema homogéneo. Tenemos que Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas, ya que
$$\left| \begin{array}{rrr} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right| = -18 \neq 0 \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$
La única solución en este caso es la solución trivial: $x = y = z = 0$

1.2. Año 2001

1.2.1. Modelo

Opción A

Problema 1.2.1 *(2 puntos)* Comprobar que las siguientes matrices tienen el mismo determinante

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{array} \right) \text{ y } B = \left(\begin{array}{cc} \left| \begin{array}{cc} 1+a & 1 \\ 1 & 1-a \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| \\ & \\ \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 1+b & 1 \\ 1 & 1-b \end{array} \right| \end{array} \right)$$

Solución:

$$|B| = \left| \begin{array}{cc} -a^2 & 0 \\ 0 & 1-b^2 \end{array} \right| = a^2b^2$$

$$|A| = \left[\begin{array}{c} F_1 - F_2 \\ F_2 \\ F_3 - F_4 \\ F_4 \end{array} \right] = \left| \begin{array}{cccc} a & a & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b & b \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{array} \right| = ab \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{array} \right| = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_3 \\ F_3 \\ F_4 - F_1 \end{array} \right] =$$

$$ab \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-b \end{array} \right| = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \\ F_4 - F_3 \end{array} \right] = ab \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{array} \right| =$$

$$= -a^2b \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -b \end{array} \right| = a^2b^2 \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = a^2b^2$$

Problema 1.2.2 *(2 puntos)* Sea la matriz $A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{array} \right)$

a) calcular A^{-1}

b) Resolver el sistema $A \cdot \left[\left(\begin{array}{c} 5 \\ -1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \right] = \left(\begin{array}{c} 21 \\ 24 \end{array} \right)$

Solución:

a) $A^{-1} = \left(\begin{array}{cc} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{array} \right)$

b) $A(B+X)=C \Longrightarrow X=A^{-1}C-B$

$$\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c} 21 \\ 24 \end{array}\right)-\left(\begin{array}{c} 5 \\ -1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 7 \\ 4 \end{array}\right)$$

Opción B

Problema 1.2.3 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver cuando tenga más de una solución, el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y+ & 2z=3 \\ 2x- & y+ & kz=9 \\ x- & y- & 6z=5 \end{array}\right.$$

b) (1,5 puntos) Si el rango de la matriz $A=\left(\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & k & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{array}\right)$ es 2, determinar una combinación lineal nula de los vectores fila $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ y $\overrightarrow{F_3}$, así como una combinación lineal nula de los vectores columna $\overrightarrow{C_1}$, $\overrightarrow{C_2}$, $\overrightarrow{C_3}$ y $\overrightarrow{C_4}$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & k & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{array}\right),\quad |A|=2k+16=0 \Longrightarrow k=-8$$

- ☛ Si $\lambda \neq -8 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=n^{\underline{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado. (Solución única)
- ☛ Si $\lambda=-8$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -8 & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{array}\right),\quad \left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}\right|=-3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$|A|=0,\ \ |A_2|=0,\ \ |A_3|=0,\ \ |A_4|=0$$

Luego tenemos que Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A})<$n$^{\underline{o}}$ incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

Podemos tachar la tercera ecuación y nos queda el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y+ & 2z=3 \\ 2x- & y- & 8z=9 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} x=4+2\lambda \\ y=-1-4\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

b)

$$\overrightarrow{F_3}+a\overrightarrow{F_1}+b\overrightarrow{F_2}=(0,0,0,0) \Longrightarrow a=\frac{1}{3},\ \ b=-\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{F_1}-\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{O}$$

$$4\overrightarrow{C_1}-\overrightarrow{C_2}+0\overrightarrow{C_3}-\overrightarrow{C_4}=\overrightarrow{O}$$

1.2.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.2.4 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 2 \\ 2x- & y+ & 3z = & 2 \\ 5x- & y+ & az = & 6 \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & a & 6 \end{array}\right), \quad |A| = -3a + 24 = 0 \Longrightarrow a = 8$$

- Si $a \neq 8 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ SCD.
- Si $a = 8$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 8 & 6 \end{array}\right)$$

$\left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}\right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Estudiamos el Rango$(\overline{A})$:

$$|A_1| = |A| = 0, \quad |A_2| = \left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 6 \end{array}\right| = 0$$

$$|A_3| = \left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 6 \end{array}\right| = 0, \quad |A_3| = \left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 8 & 6 \end{array}\right| = 0$$

Luego Rango$(\overline{A}) = 2$ =Rango$(A) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ SCI. El sistema tiene infinitas soluciones.

b) Si $a = 8$ por el menor elegido podemos eliminar la tercera ecuación.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 2 \\ 2x- & y+ & 3z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x+ & y = & 2-2z \\ 2x- & y = & 2-3z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4/3 - 5/3\lambda \\ y = 2/3 - 1/3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 1.2.5 *(2 puntos)* Sea k un número natural y sean las matrices:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right), \quad C = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

a) (1 punto) Calcular A^k.

b) (1 punto) Hallar la matriz X que verifica la ecuación $A^kX = BC$.

Solución:

a)

$$A^1 = A, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A^kX = BC \Longrightarrow X = (A^k)^{-1}BC$

$$BC = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A^k)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -k & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.2.6 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real λ.

b) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = -3$.

c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad |\overline{A}| = (3+\lambda)(\lambda-1)^3 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1, \ \lambda = -3$$

- ☛ Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 4 \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ SI.

☛ Si $\lambda = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{array}\right| = -16 \neq 0$$

Tenemos que Rango$(\overline{A}) = 3$ =Rango(A) =nº de incógnitas $\Longrightarrow$ SCD.

☛ Si $\lambda = 1$:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que Rango$(\overline{A}) = 1$ =Rango(A) <nº de incógnitas $\Longrightarrow$ SCI.

b) Si $\lambda = -3$ quitamos la cuarta ecuación y nos queda el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & -3 \\ x+ & y+ & -3z = & 1 \\ x- & 3y+ & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

c) Si $\lambda = 1$ tenemos que suprimir tres ecuaciones y nos queda $x + y + z = 1$, se trata de un plano, en forma paramétrica será:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x = & 1- & \lambda & -\mu \\ y = & & \lambda & \\ z = & & & \mu \end{array}\right.$$

1.2.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.2.7 *(3 puntos)* Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax+ & y+ & 4z = & 1 \\ -x+ & ay- & 2z = & 1 \\ & y+ & z = & a \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.

c) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 4 & 1 \\ -1 & a & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right), \quad |A| = a^2 + 2a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ a = -3$$

☛ Si $a \neq 1$ y $a \neq -3 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado. (Solución única)

☛ Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Como la segunda columna y la cuarta son iguales Rango$(\overline{A})$ = Rango(A) < nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

☛ Si $a = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right), \ \left| \begin{array}{rr} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{array} \right| = 10 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2$ < pero el menor

$$\left| \begin{array}{rrr} -3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right| = -28 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(\overline{A}) = 3$.

Como Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$ Sistema Incompatible. (No tiene solución).

b) Para $a = 2$

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & y+ & 4z = & 1 \\ -x+ & 2y- & 2z = & 1 \\ & y+ & z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} x = & -\dfrac{13}{5} \\ y = & \dfrac{3}{5} \\ z = & \dfrac{7}{5} \end{array} \right.$$

c) Para $a = 1$

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 4z = & 1 \\ & y+ & z = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} x = & -3\lambda \\ y = & 1-\lambda \\ z = & \lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.2.8 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{array} \right)$ se pide:

a) (1 punto) Comprobar que verifica la igualdad $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.

b) (1 punto) Justificar que A tiene inversa y obtener A^{-1}.

c) (1 punto) Calcular A^{100}.

Solución:

a)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego $A^3 + I = -I + I = O$.

b) $A^3 + I = O \Longrightarrow A \cdot A^2 = -I \Longrightarrow A \cdot (-A^2) = I \Longrightarrow A^{-1} = -A^2$

$$A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Tenemos $A^1 = A$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, $A^3 = -I$, $A^4 = -A$, $A^5 = -A^2$, $A^6 = I$,...

Dividiendo 100 entre 6 el resto es 4 luego $A^{100} = A^4 = -A$.

1.3. Año 2002

1.3.1. Modelo

Opción A

Problema 1.3.1 *(3 puntos)* Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 + 2A = I$, donde I denota la matriz identidad.

a) (1 punto) Demostrar que A es no singular ($det(A) \neq 0$) y expresa A^{-1} en función de A e I.

b) (1 punto) Calcular dos números p y q tales que $A^3 = pI + qA$

c) (1 punto) Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

cumple la relación de partida, calcular el valor de k.

Solución:

a) Aplicamos la propiedad $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$:

$$A^2 + 2A = I \Longrightarrow (A + 2I)A = I \Longrightarrow |A + 2I||A| = |I| = 1$$

Si $|A| = 0 \Longrightarrow 0 = 1$, lo que es imposible y, por tanto, la matriz A no es singular ($|A| \neq 0$). Esto quiere decir que siempre tiene inversa:

$$A^2 + 2A = I \Longrightarrow (A + 2I)A = I \Longrightarrow A^{-1} = A + 2I$$

b) $A^2 = I - 2A$

$$A^3 = A^2 \cdot A = A - 2A^2 = A - 2I + 4A = -2I + 5A$$

Luego $p = -2$ y $q = 5$.

c)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & k^2 + 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & k + 2 \\ k + 2 & (k + 1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow k = -2$$

Opción B

Problema 1.3.2 *(3 puntos)* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Calcular A^{-1}.

b) (1 punto) Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $AX = BA \Longrightarrow X = A^{-1}BA$:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 1.3.3 *(2 puntos)* Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para cada número real O definimos la matriz $B = A - OI$, donde I denota la matriz identidad 2×2.

a) (1 punto) Hallar los valores de O que hacen que el determinante de B sea nulo.

b) (1 punto) Resolver el sistema

$$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para los diferentes valores de O.

Solución:

a)

$$B = A - OI = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} O & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - O & -3 \\ 1 & -2 - O \end{pmatrix}$$

$$|B| = O^2 - 1 \Longrightarrow O = \pm 1$$

b) Se trata de un sistema homogéneo

$$B = \begin{pmatrix} 2 - O & -3 \\ 1 & -2 - O \end{pmatrix}$$

Por el apartado anterior tenemos que:

Si $O \neq \pm 1 \Longrightarrow |B| \neq 0 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (solución única). La solución es la trivial $x = y = 0$.

Si $O = \pm 1 \Longrightarrow |B| = 0 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones):

- Si $O = 1$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

tenemos $x - 3y = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$

- Si $O = -1$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

tenemos $x - y = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$

1.3.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.3.4 *(2 puntos)* Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Solución:
Sea x la edad de la madre, y la edad del hijo mayor y z la del hijo menor:

$$\begin{cases} x - 14 = & 5(\quad y + z - 28) \\ x + 10 = & y + z + 20 \\ x - 42 = & y - z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x- & 5y- & 5z+ & 126 = 0 \\ x- & y- & z- & 10 = 0 \\ x- & y+ & z- & 42 = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos la 2^{a} ecuación por -5 y la sumamos a la 1^{a}:

$$\begin{cases} x- & 5y- & 5z+ & 126 = 0 \\ -5x+ & 5y+ & 5z+ & 50 = 0 \end{cases} \Longrightarrow -4x + 176 = 0 \Longrightarrow x = 44$$

Ahora por simple sustitución en la 2^{a} y la 3^{a} nos quedaría:

$$\begin{cases} y + z = & 34 \\ y - z = & 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 18 \\ z = 16 \end{cases}$$

Problema 1.3.5 *(2 puntos)* Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Es una matriz de dimensión 3×4 esto quiere decir que, el rango de la matriz como mucho será 3. Consideramos ahora las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & a+4 & -4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & a+4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus determinantes:
$|A_1| = -(a+4)(a-2) = 0 \Longrightarrow \ a = -4 \ a = 2$
$|A_2| = -8(a+4) = 0 \Longrightarrow \ a = -4$
$|A_3| = 12a + 48 = 0 \Longrightarrow \ a = -4$
$|A_4| = (a+4)(3a+2) = 0 \Longrightarrow \ a = -4 \ a = -\frac{2}{3}$ El único valor de a que anula todos los determinantes es $a = -4$. Además tenemos que $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Por tanto podemos concluir de la siguiente manera:
Si $a = -4$ el rango de A es 2
Si $a \neq -4$ el rango de A es 3

Opción B

Problema 1.3.6 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x- & y & & = & 2 \\ ax+ & y+ & 2z & = & 0 \\ x- & y+ & az & = & 1 \end{array} \right.$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) (0,5 punto) Resolver el sistema para $a = -1$.

c) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución:

a) Sean las matrices A y $\overline{A}$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular los valores de a que anulan el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^2 + a = 0 \Longrightarrow a = 0 \quad a = -1$$

Es decir, si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ tendríamos que $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas; el sistema sería compatible determinado.
Si $a = 0$:

- ☛ Tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = 2$$

- ☛ Tenemos $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow Rango(\overline{A}) = 3$$

- ☛ En conclusión si $a = 0$ el sistema sería incompatible.

b) Si $a = -1$:

- ☛ Tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = 2$$

- ☛ Tenemos $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donde podemos comprobar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

  Es decir, $Rango(\overline{A}) = 2$.
- ☛ En conclusión, si $a = -1$: $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

c) Si $a = -1$ ya hemos visto en el apartado anterior que el sistema es compatible indeterminado, resolvemos:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x- & y & & = 2 \\ -x+ & y+ & 2z & = 0 \\ x- & y- & z & = 1 \end{array} \right.$$

Si a la primera le restamos la tercera nos queda $z = 1$ y si hacemos $y = \lambda$ tendríamos el resultado:

$$\left\{\begin{array}{rll} x = & 2+ & \lambda \\ y = & & \lambda \\ z = & 1 & \end{array}\right.$$

d) Si $a = 2$ ya hemos comprobado que el sistema sería compatible determinado, resolvemos:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x- & y & & = & 2 \\ 2x+ & y+ & 2z & = & 0 \\ x- & y+ & 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

Si a la tercera le restamos la primera tenemos: $2z = -1 \Longrightarrow z = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x- & y = & 2 \\ 2x+ & y = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$ $\left\{\begin{array}{rr} x = & 1 \\ y = & -1 \end{array}\right.$ Es decir:

$$\left\{\begin{array}{rr} x = & 1 \\ y = & -1 \\ z = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

1.3.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.3.7 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependientes del parámetro real λ:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & y+ & \lambda z & = & \lambda^2 \\ & y- & z & = & \lambda \\ x+ & \lambda y+ & z & = & \lambda \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema en los caso en que sea posible.

c) (0,5 puntos) En el caso $\lambda = 2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0 \text{ siempre}$$

Si elegimos el menor

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 \text{ siempre}$$

Si elegimos el menor

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda \end{array}\right| = 2\lambda(1-\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \ \lambda = 1$$

Si $\lambda = 0$ o $\lambda = 1 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 2 <$nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) = 2$ y el sistema es incompatible.

b) Si $\lambda = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{array} \right.$$

Si $\lambda = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{array} \right.$$

c) Si $\lambda = 2$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 4 \\ & y- & z = & 2 \\ x+ & 2y+ & z = & 2 \end{array} \right.$$

Los tres planos se cortan dos a dos

Opción B

Problema 1.3.8 *(3 puntos)* Sea A una matriz cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden n.

Se pide:

a) (1 punto) Expresar A^{-1} en términos de A

b) (1 punto) Expresar A^n en términos de A e I, para cualquier número natural n.

c) (1 punto) Calcular a para que $A^2 = I$, siendo A la matriz:

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & a \end{array} \right)$$

Solución:

a) $A^2 = A \cdot A = I \Longrightarrow A = A^{-1}$

b) $A^1 = A$, $A^2 = I$, $A^3 = A$, $A^4 = I, \cdots$ luego:

$$A^n = \left\{ \begin{array}{lll} A & \text{si} & n \text{ es impar} \\ I & \text{si} & n \text{ es par} \end{array} \right.$$

c)

$$A^2 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & a \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & a \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & a+1 \\ 0 & a^2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a + 1 = 0 \Longrightarrow a = -1 \\ a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm 1 \end{array} \right. \Longrightarrow a = -1$$

1.4. Año 2003

1.4.1. Modelo

Opción A

Problema 1.4.1 *(3 puntos)* Sea M una matriz cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n. Se pide:

a) (1 punto) Estudiar si existe la matriz inversa de M. En caso afirmativo, expresar M^{-1} en términos de M e I.

b) (1 punto) Expresar M^3 como combinación lineal de M e I.

c) (1 punto) Hallar todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

Solución:

a)

$$M^2 - 2M = 3I \Longrightarrow (M-2)M = 3I \Longrightarrow \frac{1}{3}(M-2)M = I \Longrightarrow$$

$$M^{-1} = \frac{1}{3}(M-2)$$

b)

$$M^2 = 2M + 3I \Longrightarrow M^3 = (2M + 3I)M =$$

$$2M^2 + 3M = 2M^2 + 3M = 2(2M + 3I) + 3M = 7M + 6I$$

c)

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$3I + 2M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3+2a & 2b \\ 2b & 3+2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2a & 2b \\ 2b & 3+2a \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{c} a^2+b^2 = 3+2a \\ 2ab = 2b \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1, \;\; b = \pm 2 \\ a = -1, \;\; b = 0 \\ a = 3, \;\; b = 0 \end{array}\right.$$

Las matrices serían:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.4.2 *(3 puntos)* Hallar todas las matrices X tales que $XA = AX$, siendo A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a = a+c \Longrightarrow c = 0 \\ c+d = d \Longrightarrow c = 0 \\ a+b = b+d \Longrightarrow a = d \end{array}\right.$$

La matriz buscada es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 1.4.3 *(2 puntos)* Para cada valor del parámetro real k, se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2k \\ 3x- & 5y = & k^2 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (1 punto) Discutir el sistema según los valores de k.

b) (1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea compatible.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2k \\ 3 & -5 & k^2 \end{array}\right), \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|\overline{A}| = -k^2 + 4k - 3 = 0 \Longrightarrow k = 1, \ \ k = 3$$

Si $k = 1$ o $k = 3 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k \neq 1$ y $k \neq 3 \Longrightarrow$Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

b) Si $k = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 7 \\ y = 4 \end{array}\right.$$

Si $k = 2$:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

1.4.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.4.4 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrl} (m+2)x+ & (m-1)y- & z=3 \\ mx- & y+ & z=2 \\ x+ & my- & z=1 \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

b) (2 puntos) Discutirlo para los distintos valores de m.

Solución:

a) Para $m = 1$ el sistema queda de la siguiente manera

$$\left\{\begin{array}{rrl} 3x+ & & z=3 \\ x- & y+ & z=2 \\ x+ & y- & z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ y=1 \\ z=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{rrl} (m+2)x+ & (m-1)y- & z=3 \\ mx- & y+ & z=2 \\ x+ & my- & z=1 \end{array}\right.$$

$$A=\left(\begin{array}{ccr} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccrc} m+2 & m-1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$|A|=\left|\begin{array}{ccr} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{array}\right| = -m(m+1)$$

$$-m(m+1)=0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right.$$

- ☛ Cuando $m \neq 0$ y $m \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.

- ☛ Cuando $m = 0 \Longrightarrow |A| = 0$, y como el menor $\left|\begin{array}{cr} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{array}\right| = -2 \neq 0$ tenemos que Rango$(A) = 2$

  $$\overline{A}=\left(\begin{array}{crrc} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

  El menor $\left|\begin{array}{rrc} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3$

  En conclusión, cuando $m = 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3$, luego en este caso el sistema es incompatible.

☛ Cuando $m = -1 \Longrightarrow |A| = 0$, y como el menor $\left|\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{array}\right| = -3 \neq 0$ tenemos que Rango$(A) = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

El menor $\left|\begin{array}{ccc} -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3$

En conclusión, cuando $m = -1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3$, luego en este caso también el sistema es incompatible.

Opción B

Problema 1.4.5 *(2 puntos)* Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\left|\begin{array}{ccc} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = (a-b)^3$$

Solución:

$$\left|\begin{array}{ccc} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & a+b-2a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ -a+b & 2b-2a \end{array}\right| =$$

$$\left|\begin{array}{cc} a(b-a) & (b-a)(b+a) \\ b-a & 2(b-a) \end{array}\right| = (b-a)^2\left|\begin{array}{cc} a & b+a \\ 1 & 2 \end{array}\right| = (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3$$

Problema 1.4.6 *(2 puntos)* Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices B de dimensión 2×2 (distintas de la matriz nula), tales que

$$B \cdot \left(\begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{array}\right) = B \cdot \left(\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{array}\right)$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{cc} x & y \\ z & h \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} x & y \\ z & h \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \lambda x + 3y = & 3x + 9y \\ y = & 3y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} (\lambda - 3)x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \lambda z + 3h = & 3z + 9h \\ h = & 3h \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} (\lambda - 3)z = 0 \\ h = 0 \end{array}\right.$$

En conclusión, $\lambda = 3$ y x y z pueden ser cualquier valor que no cumpla $x = z = 0$.

$$B = \left(\begin{array}{cc} x & 0 \\ z & 0 \end{array}\right)$$

1.4.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.4.7 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & 4y+ & 3z=9 \\ mx+ & 2y+ & z=5 \\ x+ & y+ & z=2 \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Determinar los valores de m para que el sistema dado tenga solución única.

b) (1,5 puntos) Resolverlo para $m=1$.

Solución:

a)
$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & 4y+ & 3z=9 \\ mx+ & 2y+ & z=5 \\ x+ & y+ & z=2 \end{array}\right.$$

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 3 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{cccc} 3 & 4 & 3 & 9 \\ m & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 3 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right|=-m+1=0\Longrightarrow m=1$$

Si $m\neq 1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$A=$Rango$\overline{A}=3=$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.

b) Para $m=1$ el sistema queda de la siguiente manera

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & 4y+ & 3z=9 \\ x+ & 2y+ & z=5 \\ x+ & y+ & z=2 \end{array}\right.$$

Tenemos
$$A=\left(\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{cccc} 3 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Rango$(A)=2$ ya que $\left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right|=-1\neq 0$.

Calculando todos los determinantes posibles que se pueden hacer de orden 3 en la matriz $\overline{A}$, comprobamos que se anulan todos ellos, y por tanto, Rango$\overline{A}=2$.

En conclusión, si $m=1$ Rango$(A)=$Rango$\overline{A}=2<$nº de incógnitas, luego es este caso el sistema es compatible indeterminado.

Por el menor escogido anteriormente, podemos eliminar la primera ecuación y nos queda el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{lll} x+ & 2y+ & z=5 \\ x+ & y+ & z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x= & -1-t \\ y= & 3 \\ z= & t \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.4.8 *(2 puntos)* Un mayorista del sector turístico vende a la agencia de viajes A, 10 billetes a destinos nacionales, 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios, y 10 billetes a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a destinos internacionales no comunitarios, y cobra 13.000 euros. A una tercera agencia C le vende 10 billetes a destinos nacionales y 10 a destinos extranjeros europeos comunitarios, cobrando 7.000 euros. Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el precio de cada billete.

b) (0,5 puntos) Por razones de mercado, el mayorista se ve obligado a bajar un 20 por ciento el precio de todos los billetes nacionales. Hallar en qué porcentaje debe incrementar el precio de todos los billetes extranjeros europeos comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de todos los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constantes sus ingresos totales por las ventas a las tres agencias.

Solución:

a) $x =$ precio de un billete con destino nacional.

$y =$ precio de un billete con europeo comunitario.

$z =$ precio de un billete con internacional no comunitario.

$$\left\{\begin{array}{llll} 10x+ & 10y & +10z = & 12000 \\ 10x+ & & 20z = & 13000 \\ 10x+ & 10y & = & 7000 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{llll} x+ & y+ & z= & 1200 \\ x+ & & 2z= & 1300 \\ x+ & y & = & 700 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=300 \\ y=400 \\ z=500 \end{array}\right.$$

b) Si el precio de los billetes nacionales bajan un 20 por ciento costarían $0,8 \cdot x = 240$ euros, por lo que hay que subir el precio de los billetes europeos comunitarios en $300 - 240 = 60$ euros, lo que significa que el nuevo precio sería de $400 + 60 = 460$ euros, lo que supone una subida de estos billetes del 15 por ciento. $(400(1+t) = 460 \Longrightarrow t = 0,15)$

Problema 1.4.9 *(2 puntos)*

a) Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad $A + B = AB$. Comprobar que entonces se tiene la fórmula:

$$(I - B)^{-1} = -B^{-1}A$$

(Donde I denota la matriz identidad).

b) Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$
hallar la matriz B para la cual se verifica $A + B = AB$.

Solución:

a) $A + B = AB \Longrightarrow A + B - AB = 0 \Longrightarrow A - AB = -B \Longrightarrow$

$A(I - B) = -B \Longrightarrow -A(I - B)(I - B)^{-1} = B(I - B)^{-1} \Longrightarrow$

$B(I - B)^{-1} = -A \Longrightarrow B^{-1}B(I - B)^{-1} = -B^{-1}A \Longrightarrow$

$(I - B)^{-1} = -B^{-1}A$

b) LLamamos $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix}$, y tendremos:
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + z & -y + h \\ 2x - z & 2y - h \end{pmatrix}$$

Tenemos:
$$\left\{ \begin{array}{l} x - 1 = -x + z \\ 2 + z = 2x - z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = -1 \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} y + 1 = -y + h \\ -1 + h = 2y - h \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} h = 0 \\ y = -1/2 \end{array} \right.$$

Luego
$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.5. Año 2004

1.5.1. Modelo

Opción A

Problema 1.5.1 *(3 puntos)* Discutir según los valores del parámetro λ, y resolver en los casos que sea posible el sistema:
$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 6x+ & 4y+ & 2\lambda z = & 2 \\ \lambda x+ & y- & z = & 2 \\ 5x+ & 3y+ & 3z = & 2\lambda \end{array} \right.$$

Solución:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 4 & 2\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 2\lambda \end{array} \right), \quad |A| = 2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1, \ \lambda = 8/3$$

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $\lambda = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

$$\left| \begin{array}{cc} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{array} \right| = -12 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego el sistema es incompatible.

Si $\lambda = 8/3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 16/3 & 2 \\ 8/3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 16/3 \end{array} \right)$$

$$\left| \begin{array}{cc} 6 & 4 \\ 8/3 & 1 \end{array} \right| = -\frac{14}{3} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 4 & 16/3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 16/3 \end{array} \right| = -\frac{268}{9} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego el sistema es incompatible.

Sólo es compatible en los casos $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 3$, resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\left| \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 2\lambda \\ 2 & 1 & -1 \\ 2\lambda & 3 & 3 \end{array} \right|}{2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8)} = -\frac{2(\lambda^2 - \lambda + 3)}{3\lambda^2 - 11\lambda + 8}$$

$$y = \frac{\left| \begin{array}{ccc} 6 & 2 & 2\lambda \\ \lambda & 2 & -1 \\ 5 & 2\lambda & 3 \end{array} \right|}{2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8)} = \frac{2\lambda^3 - 7\lambda + 13}{3\lambda^2 - 11\lambda + 8}$$

$$z = \frac{\left| \begin{array}{ccc} 6 & 4 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2\lambda \end{array} \right|}{2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8)} = -\frac{4\lambda^2 - 9\lambda + 3}{3\lambda^2 - 11\lambda + 8}$$

Opción B

Problema 1.5.2 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & az = & 4 \\ x+ & ay+ & z = & 2 \\ x+ & 4y- & 5z = & 6 \end{array} \right.$$

Se pide:

a) (2 punto) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -a & 4 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array} \right), \quad |A| = a^2 - 9a + 14 = 0 \Longrightarrow a = 2, \;\; a = 7$$

Si $a \neq 1$ o $a \neq 3 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $a = 7$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 4 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array} \right)$$

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{array} \right| = 4 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{array} \right| = 10 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Como Rango$(\overline{A}) \neq$ Rango(A)Rango$(A) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array} \right)$$

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \right| = -1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0, \quad |A_2| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{array} \right| = 0$$

$$|A_3| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 6 \end{array} \right| = 0, \quad |A_4| = \left| \begin{array}{ccc} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \end{array} \right| = 0$$

Luego Rango$(\overline{A}) = 2$ =Rango(A) <nº de incógnitas $\Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado, es decir, admite infinitas soluciones.

b) Por el menor elegido cuando $a = 2$ para discutir el Rango(A) podemos decidir que la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras, por tanto, el sistema a resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & 2z = & 4 \\ x+ & 2y+ & z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 - 7\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

1.5.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.5.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr} (1-a)x- & 2y+ & 4z=0\\ x- & (1+a)y+ & z=0\\ -x+ & ay- & z=0 \end{array}\right.$$

a) (1,5 punto) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a) Sea la matriz

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 1-a & -2 & 4\\ 1 & -(1+a) & 1\\ -1 & a & -1 \end{array}\right)\Longrightarrow |A|=-a-3=0\Longrightarrow a=-3$$

Si $a\neq -3\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)=3$ y como el sistema es homogéneo resultaría que es compatible determinado. La solución en este caso sería $x=y=z=0$.

Si $a=-3$ tenemos

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 4 & -2 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -3 & -1 \end{array}\right),\ \left|\begin{array}{cc} 4 & -2\\ 1 & 2 \end{array}\right|=8+2=10\neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A)=2$ y como el sistema es homogéneo podemos concluir, en este caso que, el sistema es compatible indeterminado.

b) Resolvemos este último caso. Por el menor que hemos escogido podemos despreciar la tercera ecuación.

$$\left\{\begin{array}{rrr} 4x- & 2y+ & 4z=0\\ x+ & 2y+ & z=0 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rrr} 4x- & 2y= & -4z\\ x+ & 2y= & -z \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-\lambda\\ y=0\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.5.4 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & -1\\ 5 & -1 & 2 \end{array}\right);\quad B=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se pide:

a) (1 punto) Hallar A^{-1}.

b) (1 punto) Hallar la matriz X, tal que:

$$A \cdot X \cdot A^T = B$$

(donde A^T significa la matriz traspuesta de A).

Solución:

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

b)

$$AXA^T = B \Longrightarrow A^{-1}AXA^T(A^T)^{-1} = A^{-1}B(A^T)^{-1} \Longrightarrow X = A^{-1}B(A^T)^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 1.5.5 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{rr} x+ & 2y = 1 \\ 3x- & y = 2 \end{array} \right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax + by = c$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.

b) (1 punto) Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{rrr} 2x+ & 2y- & z = 1 \\ x+ & y+ & 2z = 1 \end{array} \right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante siga siendo compatible indeterminado.

Solución:

a) La tercera ecuación debe de ser una combinación lineal de las anteriores, ya que en caso contrario el sistema resultaría incompatible. La suma de las dos puede ser una solución:

$$4x + y = 3$$

b) La tercera ecuación tiene que ser una combinación lineal de las dos anteriores, pues en caso contrario, el sistema resultaría compatible determinado o incompatible. Como el término independiente tiene que ser 1, podemos multiplicar la primera por 2 y le restamos la segunda:

$$3x + 3y - 4z = 1$$

1.5.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.5.6 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determinar la matriz inversa de B.

b) (1 punto) Determinar una matriz X tal que $A = B \cdot X$.

Solución:

a)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A = BX \Longrightarrow B^{-1}A = B^{1}BX \Longrightarrow B^{-1}A = X$

$$X = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 & -11/3 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 1.5.7 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Si A es una matriz tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A?

b) (1 punto) Calcular un número k tal que:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = 0 \Longrightarrow |A| = 0$

b)

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} k^2 - 6k + 5 & 8(k-1) \\ 2 - 2k & k^2 + 2k - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} k^2 - 6k + 5 = 0 \\ 8(k-1) = 0 \\ 2 - 2k = 0 \\ k^2 + 2k - 3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow k = 1$$

Opción B

Problema 1.5.8 *(3 puntos)*

a) (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} \lambda x+ & 3y+ & z = & \lambda \\ x+ & \lambda y+ & \lambda z = & 1 \\ x+ & y- & z = & 1 \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda = 2$

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} \lambda & 3 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$|A| = -2\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2, \;\; \lambda = -1$$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ $= 3 =$n$^{\underline{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Si $\lambda = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Observamos que la tercera fila es la resta de la primera menos la segunda, y teniendo en cuenta que $\left| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \right| = 1 \neq 0$, podemos concluir en este caso:
Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 2 <$n$^{\underline{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

Si $\lambda = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Basta observar las columnas de la matriz para darnos cuenta que la primera y la cuarta son iguales y la tercera está multiplicada por -1. Si tenemos en cuenta que $\left| \begin{array}{rr} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{array} \right| = -4 \neq 0$, podemos concluir en este caso:
Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 2 <$n$^{\underline{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y+ & z = & 2 \\ x+ & 2y+ & 2z = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y = & 2- & z \\ x+ & 2y = & 1- & 2z \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} x = & 1+4t \\ y = & -3t \\ z = & t \end{array} \right.$$

1.6. Año 2005

1.6.1. Modelo

Opción A

Problema 1.6.1 *(3 puntos)*

a) (2 punto) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2\lambda x+ & 2y+ & \lambda z = & 1 \\ x+ & \lambda y- & z = & 1 \\ 4x+ & 3y+ & z = & 2\lambda \end{array}\right.$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior en los casos en que sea compatible.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2\lambda & 2 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2\lambda \end{array}\right), \quad |A| = -2\lambda^2 + 9\lambda - 10 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2, \quad \lambda = \frac{5}{2}$$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq \frac{5}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $\lambda = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Como el menor $\left|\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{array}\right| = 6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$. Por otro lado

$$\left|\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{array}\right| = 15 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso $\text{Rango}(\overline{A}) \neq \text{Rango}(A) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

Si $\lambda = \dfrac{5}{2}$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 2 & 5/2 & 1 \\ 1 & 5/2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Como el menor $\left|\begin{array}{cc} 5 & 2 \\ 1 & 5 \end{array}\right| = 23 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$. Por otro lado

$$\left|\begin{array}{rrr} 5 & 5/2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{array}\right| = -\frac{55}{2} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso $\text{Rango}(\overline{A}) \neq \text{Rango}(A) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

b) El sistema sólo es compatible cuando $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq \frac{5}{2}$ y $|A| = -2\lambda^2 + 9\lambda - 10$. Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2\lambda & 3 & 1 \end{array}\right|}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = \frac{2a^3 - 1}{2a^2 - 9a + 10}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2\lambda & 1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2+9\lambda-10}=-\frac{6a^2-2a-5}{2a^2-9a+10}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 4 & 3 & 2\lambda \end{vmatrix}}{-2\lambda^2+9\lambda-10}=-\frac{4a^3-14a+11}{2a^2-9a+10}$$

Opción B

Problema 1.6.2 *(2 puntos)* Considerar el siguiente sistema de ecuaciones, en el que a es un parámetro real:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -ax+ & 4y+ & az= & -a \\ 4x+ & ay- & az= & a \\ -x- & y+ & z= & 1 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (1 punto) Discutir el sistema

b) (1 punto) Resolver el sistema para $a=1$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -a & 4 & a & -a \\ 4 & a & -a & a \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad |A|=a^2-16=0 \Longrightarrow a=\pm 4$$

Si $a\neq \pm 4 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A})=3=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $a=4$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -4 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}=-32\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=2$. Como el menor

$$\begin{vmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-64\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overrightarrow{A})=3$$

Como Rango$(A)\neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

Si $a=-4$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -32 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$. Como el menor

$$\begin{vmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 64 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overrightarrow{A}) = 3$$

Como Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

b) Cuando $a = 1$:

$$\begin{cases} -x+ & 4y+ & z = & -1 \\ 4x+ & y- & z = & 1 \\ -x- & y+ & z = & 1 \end{cases} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad |A| = -15$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = -\frac{2}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{19}{15}$$

Problema 1.6.3 *(2 puntos)* Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Comprobar que

$$A^3 - 2A^2 = 0$$

b) (1 punto) Hallar A^n.

Solución:

a)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$2^2\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} = 2A$$

$$A^3 = 2^3\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} =$$

$$2^3\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} = 4A$$

$$A^3 - 2A^2 = 4A - 4A = 0$$

b) $A^n = 2^{n-1}A$

1.6.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.6.4 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} (m-1)x+ & y+ & z= & 3\\ mx+ & (m-1)y+ & 3z= & 2m-1\\ x+ & 2y+ & (m-2)z= & 4\end{array}\right.$$

a) (1,5 punto) Discutirlo según los distintos valores de m.

b) (1,5 puntos) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a) Sea la matriz

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m-1 & 1 & 1 & 3\\ m & m-1 & 3 & 2m-1\\ 1 & 2 & m-2 & 4\end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |A| = (m-2)(m+1)(m-4) = 0 \Longrightarrow m = 2,\ m = -1,\ m = 4$$

Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ y $m \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ =nº incógnitas luego en este caso el sistema sería compatible determinado.

Si $m = -1$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 3\\ -1 & -2 & 3 & -3\\ 1 & 2 & -3 & 4\end{array}\right),\ \begin{vmatrix} -2 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, para ello cogemos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3\\ -2 & 3 & -3\\ 2 & -3 & 4\end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Luego en este caso Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $m = 2$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right| = -1 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, para ello cogemos el determinate

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{array} \right| = -4 \neq 0$$

Luego en este caso Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $m = 4$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{array} \right| = 5 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, que está claro que es dos, ya que la última fila es la resta de las dos anteriores.

Luego en este caso Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2$ <nº incógnitas$\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Resolvemos este último caso. Por el menor que hemos escogido podemos despreciar la tercera ecuación.

$$\left\{ \begin{array}{rrr} 3x+ & y+ & z = 3 \\ 4x+ & 3y+ & 3z = 7 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} 3x+ & y = & 3- & z \\ 4x+ & 3y = & 7- & 3z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{2}{5} \\ \\ y = \dfrac{9}{5} - \lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.6.5 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x+ & 2y+ & 3z = 1 \\ 2x+ & y- & z = 2 \end{array} \right.$$

b) (1 punto) Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación: $5x + y + \alpha z = \beta$, el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y+ & 3z=1 \\ 2x+ & y- & z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y & =1- & 3z \\ 2x+ & y & =2+ & z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+\dfrac{5}{3}t \\ \\ y=-\dfrac{7}{3}t \\ \\ z=t \end{array}\right.$$

b) Para que el sistema siga siendo compatible indeterminado esta última ecuación tiene que ser combinación lineal de las dos anteriores, es decir, si ponemos

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right)$$

sería $a(1,2,3,1)+b(2,1,-1,2)=(5,1,\alpha,\beta) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+2b=5 \\ 2a+b=1 \end{array}\right. \Longrightarrow a=-1,\ b=3 \Longrightarrow \alpha = -6,\ \beta=5$

Problema 1.6.6 *(2 puntos)* Hallar una matriz X tal que:

$$A^{-1}XA=B$$

siendo $A=\left(\begin{array}{rr} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}\right)$

Solución:

Primero resolvemos la ecuación matricial:

$$A^{-1}XA=B \Longrightarrow XA=AB \Longrightarrow X=ABA^{-1}$$

Ahora calculamos A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{(Adjt(A))^T}{|A|}=\left(\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{array}\right)$$

Efectuamos el producto

$$X=ABA^{-1}=\left(\begin{array}{rr} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{array}\right)=$$

$$\left(\begin{array}{rr} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{array}\right)$$

1.6.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.6.7 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\left(\begin{array}{rr} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array}\right),\quad I=\left(\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

a) (1 punto) Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.

b) (1 punto) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.

c) (1 punto) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$.

Solución:

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 2\alpha \\ 0 & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ 2\alpha = 4 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = 2, \;\; \beta = -1$$

b)

$$A^5 = A^2A^2A = (2A - I)^2A = (4A^2 + I^2 - 4AI)A = (4A^2 - 4A + I)A =$$

$$4(2A - I)A - 4A^2 + A = 8A^2 - 4IA - 4(2A - I) + A =$$

$$8(2A - I) - 4A - 8A + 4I + A = 5A - 4I = 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$(A - X)(A + X) = A^2 - X^2 \Longrightarrow A^2 + AX - XA + X^2 = A^2 - X^2$$

$$\Longrightarrow AX - XA = 0 \Longrightarrow AX = XA$$

Serán todas aquellas matrices X que cumplan $AX = XA$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a + 2c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b + 2d = 2a + b \Longrightarrow a = d \\ c = c \\ d = d \end{cases}$$

Serán las matrices A de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.6.8 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Hallar A^{10}.

b) (1 puntos) Hallar la matriz inversa de B.

c) (1 punto) En el caso particular de $k = 0$, hallar B^{10}.

Solución:

a)

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = A^3\cdot A^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -k & k^2-t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$B\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nt \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.7. Año 2006

1.7.1. Modelo

Opción A

Problema 1.7.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y- & z= & k \\ x+ & 2y+ & 3z= & 2 \\ kx+ & ky- & 4z= & -1 \end{array}\right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & k \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ k & k & -4 & -1 \end{array}\right), \quad |A| = 4k-4=0 \Longrightarrow k=1$$

Si $k\neq 1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango($\overline{A}$) $=3=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$. Por otro lado se observa que la cuarta fila es la diferencia entre la primera y la segunda, luego el Rango$(\overline{A}) = 2$, en conclusión: Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas y en este caso el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y- & z = & 1 \\ x+ & 2y+ & 3z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -4 + 11\lambda \\ y = 3 - 7\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.7.2 *(3 puntos)* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1,5 punto) Hallar $(A - I)^2$.

b) (1,5 punto) Calcular A^4 haciendo uso del apartado anterior.

Solución:

a)

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $(A - I)^2 = A^2 - 2A + I = 0 \Longrightarrow A^2 = 2A - I$

$$A^4 = (A^2)^2 = 4A^2 - 4A + I = 4(2A - I) - 4A + I = 4A - 3I$$

$$A^4 = 4\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -4 & -7 & 4 \\ -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

1.7.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.7.3 *(2 puntos)* Dado el sistema homogéneo

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & ky & -z = 0 \\ kx- & y & +z = 0 \\ (k+1)x+ & y & = 0 \end{array}\right.$$

averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resolverlo en tales casos.

Solución:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ (k+1) & 1 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = k^2 - k - 2 = 0 \Longrightarrow k = -1, \;\; k = 2$$

Si $k \neq -1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0$ el sistema es compatible determinado $x = y = z = 0$.

Si $k = 2 \Longrightarrow$ SCI

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y - z = 0 \\ 3x + y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -\frac{1}{5}\lambda \\ y = \frac{3}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Si $k = -1 \Longrightarrow$ SCI

$$\left\{ \begin{array}{c} x - y - z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 1.7.4 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$ encontrar todas las matrices

$$P = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right)$$

tales que $AP = PA$.

Solución:

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} a & 2a + b \\ c & 2c + d \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + 2c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b + 2d = 2a + b \Longrightarrow a = d \\ c = c \\ d = 2c + d \Longrightarrow c = 0 \end{array} \right.$$

$$P = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & a \end{array} \right)$$

Opción B

Problema 1.7.5 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$M = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{array} \right)$$

a) (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.

b) (1,5 punto) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

Solución:

a)
$$|M| = -2a(a^2-1) = 0 \Longrightarrow a = 0,\ \ a = 1,\ \ a = -1$$
Si $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$ entonces $|M| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 3$.

Si $a = 0$
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$$
Si $a = 1$
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$$
Si $a = -1$
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$$

b) M es invertible para cualquier valor de a distinto de 0, 1 y -1.

Si $a = 2$
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

1.7.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.7.6 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Comprobar que $|A^2| = |A|^2$, y que $|A+I| = |A| + |I|$

b) (0,5 puntos) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple $|M^2| = |M|^2$?. Razonar la respuesta.

c) (1,5 puntos) Encontrar todas las matrices cuadradas M, de orden 2, tales que:
$$|M+I| = |M| + |I|$$

Solución:

a)
$$|A^2| = \left| \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$
$$|A|^2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(-1) = 1$$

Luego $|A^2| = |A|^2$.

$$|A+I| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A| + |I| = -1 + 1 = 0 \Longrightarrow |A+I| = |A| + |I|$$

b) Si podemos asegurar que $|M^2| = |M|^2$:

$$|M^2| = |M \cdot M| = |M| \cdot |M| = |M|^2$$

c)

$$M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb, \quad |I| = 1$$

$$|M+I| = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix} = (a+1)(d+1) - cd$$

$$(a+1)(d+1) - cd = ad - cb \Longrightarrow a = -d$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.7.7 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x+ & y- & 3z = 0 \\ 2x+ & 3y- & z = 5 \end{array} \right.$$

b) (1 punto) Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x+ & y- & 3z = 0 \\ 2x+ & 3y- & z = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -5 + 8\lambda \\ y = 5 - 5\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

b) $-5 + 8\lambda + 5 - 5\lambda + \lambda = 4 \Longrightarrow \lambda = 1$.

$$x = 3, \quad y = 0, \quad z = 1$$

Problema 1.7.8 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Hallar todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ distintas de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2 = A$

b) (1 punto) Para cualquiera de las matrices A obtenidas en el apartado 1.), calcular

$$M = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{10}$$

Solución:

a)

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a^2+ab \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 = a \\ a^2+ab = a \\ b^2 = b \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 0,\ \ a = 1 \\ a(a+b-1) = 0 \\ b(b-1) = 0 \Longrightarrow b = 0,\ \ b = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a = 0,\ \ b = 1 \\ a = 1,\ \ b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $A^2 = A$; $A^3 = A^2A = AA = A$; $A^4 = A^3A = AA = A \cdots A^{10} = A$ Luego:

$$M = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{10} = 10A = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.8. Año 2007

1.8.1. Modelo

Opción A

Problema 1.8.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ky+ & k^2z = & 1 \\ x+ & ky- & kz = & k^2 \\ -x+ & ky- & k^2z = & k^2 \end{array}\right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo para $k = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & k & k^2 & 1 \\ 1 & k & -k & k^2 \\ -1 & k & -k^2 & k^2 \end{array}\right),\quad |A| = 2k^2(k+1) = 0 \Longrightarrow k = 0,\quad k = -1$$

Si $k \neq 0$ y $k \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El Rango$(A) = 1$, dado que las tres filas son iguales. Sin embargo el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2$. Por tanto, Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene Solución). Si $k = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

La matriz tiene dos primeras filas iguales, luego Rango(A) =Rango$(\overline{A}) <$ nº incógnitas$\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones).

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & y+ & z = & 1 \\ -x- & y- & z = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = -1 \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.8.2 *(3 puntos)* Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro λ.

b) (1,5 punto) Determinar para qué valores de λ existe la matriz inversa de M. Calcular dicha inversa para $\lambda = 0$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(\lambda^3 - 3\lambda + 2) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \quad \lambda = -2$$

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(M) = 3$.

Si $\lambda = 1$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las tres filas son iguales y, por tanto, el Rango$(M) = 1$.

Si $\lambda = -2$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(M) = 2$.

b) Si $\lambda = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1.8.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.8.3 *(2 puntos)* Estudiar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro m.

Solución:

$$|A| = m(m-2) = 0 \Longrightarrow m = 0, \quad m = 2$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Si $m = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego en este caso el Rango$(A) = 2$.

Si $m = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (dos filas iguales)}$$

Luego en este caso el Rango$(A) = 2$.

Problema 1.8.4 *(2 puntos)* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$

Solución:

$$XAX^{-1} = B \Longrightarrow XA = BX$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a-9c & 9b-9d \\ 6a-9c & b-d \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 6a-9c = 0 \\ b-d = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b = d \\ c = 2/3a \end{array} \right.$$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2/3a & b \end{pmatrix}, \quad \text{p.e } X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.8.5 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1,5 puntos) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $AB = BA$.

b) (1,5 puntos) Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10}.

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a-c=0 \\ b-c=0 \end{array} \right.$$

Las condición que debería de cumplir sería $a = b = c$

b)

$$B^1 = \begin{pmatrix} 2^0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 2^1 & 2^1 & 0 \\ 2^1 & 2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^4 = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.8.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.8.6 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & (k+1)y+ & 2z = & -1 \\ kx+ & y+ & z = & k \\ (k-1)x- & 2y- & z = & k+1 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los distintos valores de k.

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & (k+1) & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ (k-1) & -2 & -1 & k+1 \end{array} \right)$$

$$|A| = 2k^2 - 5k + 2 = 0 \Longrightarrow k = \frac{1}{2}, \;\; k = 2$$

- ☛ Si $k\neq\frac{1}{2}$ y $k\neq 2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A})=3=$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.
- ☛ $k=\frac{1}{2}$:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3/2 & 2 & -1\\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2\\ -1/2 & -2 & -1 & 3/2 \end{array}\right)$$
Como $|A|=0$ y $\left|\begin{array}{cc} 1 & 3/2\\ 1/2 & 1 \end{array}\right|=-1/2\Longrightarrow$ Rango$(A)=2$. Por otra parte
$$\left|\begin{array}{ccc} 3/2 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1/2\\ -2 & -1 & 3/2 \end{array}\right|=-3\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$
Como Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A})\Longrightarrow$ Sistema Incompatible.
- ☛ $k=2$:
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$
Observamos que la tercera fila es la diferencia de la segunda menos la primera, y como $\left|\begin{array}{cc} 1 & 3\\ 2 & 1 \end{array}\right|=-5\neq 0\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

b)
$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y+ & 2z= & -1\\ 2x+ & y+ & z= & 2 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=7/5-1/5\lambda\\ y=-4/5-3/5\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.8.7 *(2 puntos)* Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica
$$XA^2+BA=A^2$$
siendo $A=\left(\begin{array}{rrr} 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ y $B=\left(\begin{array}{rrr} 0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Solución:
$$XA^2+BA=A^2\Longrightarrow XA^2=A^2-BA\Longrightarrow X=(A^2-BA)(A^2)^{-1}$$
$$A^2=A\cdot A=\left(\begin{array}{rrr} 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{rrr} 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=I_3$$
$$(A^2)^{-1}=I_3$$
$$B\cdot A=\left(\begin{array}{rrr} 0 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 0 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{rrr} 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)=2I_3$$
Luego:
$$X=(A^2-BA)(A^2)^{-1}=(I_3-2I_3)I_3=-I_3=\left(\begin{array}{rrr} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Problema 1.8.8 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & 3z = & 3 \\ 2x+ & 3y+ & z = & 5 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular a y b de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $ax+y+bz = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.

b) (1 punto) Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4.

Solución:

a) Para que las soluciones del sistema resultante sean las mismas que las del sistema del enunciado necesariamente la ecuación $ax+y+bz = 1$ tiene que ser combinación lineal de las otras dos, de esa manera el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & 3z = & 3 \\ 2x+ & 3y+ & z = & 5 \\ ax+ & y+ & bz = & 1 \end{array}\right. \quad \text{es Sistema Compatible Indeterminado}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por k y la segunda por l su suma será la ecuación $ax + y + bz = 1$, es decir $F_3 = kF_1 + lF_2$:

$$\left\{\begin{array}{l} a = k + 2l \\ 2k + 3l = 1 \\ -3k + l = b \\ 3k + 5l = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = 2 \\ l = -1 \\ a = 0 \\ b = -7 \end{array}\right.$$

La ecuación sería $y - 7z = 1$

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & 3z = & 3 \\ 2x+ & 3y+ & z = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - 11\lambda \\ y = 1 + 7\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Luego $(1 - 11\lambda) + (1 + 7\lambda) + \lambda = 4 \Longrightarrow \lambda = -\dfrac{2}{3}$ y sustituyendo tenemos:

$$x = \frac{25}{3}, \; y = -\frac{11}{3}, \; z = \frac{2}{3}$$

1.9. Año 2008

1.9.1. Modelo

Opción A

Problema 1.9.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & mz = & m+2 \\ 2x+ & (m+1)y+ & (m+1)z = & -m \\ (m+2)x+ & 3y+ & (2m+1)z = & 3m+4 \end{array}\right.$$

a) (2 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real m.

b) (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & m & m+2 \\ 2 & m+1 & m+1 & -m \\ m+2 & 3 & 2m+1 & 3m+4 \end{array}\right)$$

$$|A| = -(m+2)(m-1)^2 = 0 \Longrightarrow m = 1, \quad m = -2$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $m = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{array}\right), \quad \left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}\right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = 2F_1 - F_2$ podemos decir que Rango$(\overline{A}) = 2$ =Rango$(A) <$ nº de incógnitas y, por tanto, el sistema es Compatible Indeterminado.

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

A la vista de la matriz se ve que el Rango$(A) = 1$ al tener las tres filas iguales, pero Rango$(\overline{A}) = 2 \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene Solución).

b)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & 2z = & 0 \\ 2x- & y- & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2/3 + \lambda \\ y = -2/3 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.9.2 *(3 puntos)* Sean las matrices:

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{cc} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{array}\right)$$

a) (1 punto) Hallar una matriz X tal que $AXA^{-1} = B$.

b) (1 punto) Calcular A^{10}.

c) (1 punto) Hallar todas las matrices M que satisfacen

$$(A - M)(A + M) = A^2 - M^2$$

Solución:

a) $AXA^{-1} = B \Longrightarrow X = A^{-1}BA$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = A^{-1}BA =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$A^2 + AM - MA - M^2 = A^2 - M^2 \Longrightarrow AM = MA$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a+c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b+d = a+b \Longrightarrow a = d \\ c = c \\ d = c+d \Longrightarrow c = 0 \end{cases}$$

La matriz buscada es:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

1.9.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.9.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x- & ay = & 2 \\ ax- & y = & a+1 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro a. Resolverlo cuando la solución sea única.

b) (1 punto) Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene solución en la que $y = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 2 \\ a & -1 & a+1 \end{array}\right), \quad |A| = -1 + a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado (solución única). Su solución sería, aplicando Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -a \\ a+1 & -1 \end{vmatrix}}{-1+a^2} = \frac{a+2}{a+1}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & a+1 \end{vmatrix}}{-1+a^2} = -\frac{1}{a+1}$$

Si $a = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

En este caso Rango$(A) = 1$, mientras que Rango$(\overline{A}) = 2$ ya que el menor $\left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{array} \right| = 2 \neq 0$.
Como Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (no tiene solución).

Si $a = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Está claro, que las dos filas son iguales y, por tanto, Rango$(A) = 1 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado (infinitas soluciones). Las soluciones, en este caso y aunque no las pida el problema son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \end{array} \right.$$

b)

$$2 = -\frac{1}{a+1} \Longrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

Cuando $a = 1$ e $y = 2 \Longrightarrow x = 4$, luego las soluciones de a pedidas son $a = 1$ y $a = -\dfrac{3}{2}$.

Opción B

Problema 1.9.4 *(3 puntos)* Dada la siguiente matriz de orden n:

$$A_n = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 9 \end{array} \right)$$

se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_2.

b) (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_3.

c) (2 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_5.

Solución:

a)

$$A_2 = \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{array} \right| = 10$$

b)

$$A_2 = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & 9 \end{array} \right| = 10^2 = 100$$

c)

$$A_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 10^4 = 10000$$

1.9.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.9.5 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el rango de A según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos) Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para $a = 1$.

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = -2(a+1)(a^2+a-1) = 0 \Longrightarrow a = -1, \ a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

En los tres casos el Rango$(A) = 2$

b) Si $a \neq -1$ y $a \neq \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ la matriz A es invertible.

Si $a = -1$ o $a = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ la matriz A no es invertible.

Cuando $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.9.6 *(2 puntos)* Resolver el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & -2y & + \ z & -3v & = & -4 \\ x & +2y & + \ z & +3v & = & 4 \\ 2x & -4y & +2z & -6v & = & -8 \\ 2x & & +2z & & = & 0 \end{array} \right.$$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & -6 & -8 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observando la matriz vemos que, la 1ª columna es igual a la 3ª, y la segunda es igual a la 4ª multiplicada por dos, luego el Rango(A) =Rango($\overline{A}$) $= 2 < 4$ nº de incógnitas y se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con $4 - 2 = 2$ grados de libertad. Es decir, necesitaremos dos parámetros para su solución.

Como las dos primeras filas son linealmente independientes el sistema a resolver será:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrr} x & -2y & +z & -3v & = & -4 \\ x & +2y & +z & +3v & = & 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda \\ \\ y = \dfrac{4 - 3\mu}{2} \\ \\ z = \lambda \\ v = \mu \end{array} \right.$$

Problema 1.9.7 *(2 puntos)* El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

Solución:

x: nº de billetes de 50 euros

y: nº de billetes de 20 euros

z: nº de billetes de 10 euros

$$\left\{ \begin{array}{c} 50x + 20y + 10z = 7000 \\ x + y + z = 225 \\ x + z = 2y \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 100 \\ y = 75 \\ z = 50 \end{array} \right.$$

1.10. Año 2009

1.10.1. Modelo

Opción A

Problema 1.10.1 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2k \\ 3x- & 5y = & k \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.

b) (1 punto) Resolverlo en los casos en que sea posible.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2k \\ 3 & -5 & k \end{array} \right)$$

$$|\overline{A}| = 3(k-1) = 0 \Longrightarrow k = 1$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ el Rango$(A) = 2$ independientemente del valor de k.

Si $k \neq 1 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) = 2 =$ nº de incógnitas y el sistema es Incompatible, es decir, no tiene solución.

Si $k = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{array} \right), \ |\overline{A}| = 0 \ \text{y} \ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Luego en este caso Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado, es decir, tiene solución única.

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrl} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 7 \\ y = 4 \end{array} \right.$$

Problema 1.10.2 *(2 puntos)* Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} = (x+1)(x-1)\begin{vmatrix} 2(x-1) & 1 & x+1 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ x-1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} =$$

$$(x+1)^2(x-1)\begin{vmatrix} 2(x-1) & 1 & 1 \\ x-1 & x+1 & 1 \\ x-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = (x+1)^2(x-1)\begin{vmatrix} 2(x-1) & 1 & 1 \\ -(x-1) & x & 0 \\ -(x-1) & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(x+1)^2(x-1)^2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(x^2-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 0 \end{vmatrix} = x(x^2-1)^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

Opción B

Problema 1.10.3 *(3 puntos)* Si $A = (C_1, C_2, C_3)$ es una matriz cuadrada de orden 3 con columnas C_1, C_2, C_3, y se sabe que $det(A) = 4$, se pide:

a) (1 punto) Calcular $det(A^3)$ y $det(3A)$.

b) (2 puntos) Calcular $det(B)$ y $det(B^{-1})$, siendo $B = (2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)$ la matriz cuyas columnas son:
$$2C_3, C_1 - C_2, 5C_1$$

Solución:

a) ☛ $|A^3| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 4^3 = 64$

☛ $|3A| = |(3C_1, 3C_2, 3C_3)| = 3^3|A| = 27 \cdot 4 = 108$

b) ☛ $|B| = |(2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)| = -10|(C_1, C_1 - C_2, C_3)| =$
$$= -10\,[(C_1, C_1, C_3) - (C_1, C_2, C_3)] = 10|A| = 40$$

☛ Si $|B \cdot B^{-1}| = 1 \Longrightarrow |B| \cdot |B^{-1}| = 1 \Longrightarrow |B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|} = \dfrac{1}{40}$

1.10.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.10.4 *(3 puntos)* Dado el sistema:
$$\left\{\begin{array}{rrrr} 4x+ & 4\lambda y+ & 2z = & 2\lambda \\ \lambda x+ & y- & \lambda z = & \lambda \\ 4\lambda x+ & 4\lambda y+ & \lambda z = & 9 \end{array}\right. ,$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

Solución:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 4\lambda & 2 & 2\lambda \\ \lambda & 1 & -\lambda & \lambda \\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda & 9 \end{array}\right) \quad |A| = -4\lambda(5\lambda^2 - 6\lambda + 1) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \;\; \lambda = 1 \;\; \lambda = \frac{1}{5}$$

☛ Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$ y $k \neq 1/5 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

☛ Si $\lambda = 0$
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

Como
$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -18 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$
Luego el sistema es incompatible.

☛ Si $\lambda = 1$
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$
Sistema es Incompatible.

☛ Si $\lambda = 1/5$
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 4/5 & 2 & 2/5 \\ 1/5 & 1 & -1/5 & 1/5 \\ 4/5 & 4/5 & 1/5 & 9 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$
Sistema es Incompatible.

Si $\lambda = -1$
$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 4x- & 4y+ & 2z = & -2 \\ -x+ & y+ & z = & -1 \\ -4x- & 4y- & z = & 9 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.10.5 *(2 puntos)* Dado el sistema:
$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = \lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{array} \right.$$

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

b) (0,5 punto) Resolver el sistema cuando sea posible

Solución:

a)
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & \lambda \\ \lambda & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \quad |\overline{A}| = -(\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0 \Longrightarrow \lambda = 2 \;\; \lambda = 6$$

☛ Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 6 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ $\neq$Rango$(\overline{A})$ luego en este caso el sistema será Incompatible.

☛ Si $\lambda = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema es Compatible Determinado.

☛ Si $\lambda = 6$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 6 \\ 6 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Determinado.

b) Cuando $\lambda = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -2 \end{array} \right.$$

Cuando $\lambda = 6$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 6 \\ 6x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -4 \\ y = -14 \end{array} \right.$$

Problema 1.10.6 *(2 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{array} \right)$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar el rango de A según los distintos valores del parámetro a.

b) (1 punto) Obtener la matriz inversa de A para $a = -1$

Solución:

a) $A = a^3 - 3a + 2 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ a = -2$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Si $a = 1$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1$$

Si $a = -2$:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

b) Si $a = -1$:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \Longrightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{array} \right)$$

1.10.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.10.7 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

a) (1,25 puntos) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M es invertible.

b) (0,5 puntos) Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible.

c) (1,25 puntos) Para $m = -1$ calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de M.

Solución:

a) $|M| = 2m(m-1) = 0 \Longrightarrow m = 0,\ \ m = 1.$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1 \Longrightarrow$ existe M^{-1}.

Si $m = 0$ o $m = 1 \Longrightarrow$ no existe M^{-1}.

b) M^{25} no es invertible si $|M^{25}| = 0 \Longrightarrow |M|^{25} = 0 \Longrightarrow |M| = 0$. Luego M^{25} es invertible si $m \neq 0$ y $m \neq 1$

c)

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 & 1 \\ 1/4 & -1/4 & 1 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.10.8 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + z = 0 \\ \lambda x - y + 2z = 0 \\ x - \lambda y + 2z = 0 \end{cases},$$

se pide:

a) (1 punto) Obtener los valores de parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de:

$$x = y = z = 0$$

b) (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = 5$.

Solución:

Se trata de un sistema homogéneo

a)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ \lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \end{pmatrix} \quad |A| = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \;\; \lambda = 5$$

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 5 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$nº incógnitas luego en este caso el sistema será Compatible Determinado y la única solución es la trivial.

$$x = y = z = 0$$

- Si $\lambda = 1$ o $\lambda = 5 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2 <$nº incógnitas luego en este caso el sistema será Compatible Indeterminado y tendrá infinitas soluciones.

b) Cuando $\lambda = 5$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y + z = 0 \\ 5x - y + 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y = -\lambda \\ 5x - y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{3}\lambda \\ \\ y = \dfrac{1}{3}\lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 1.10.9 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $AXB = A + B$

Solución:

$$AXB = A + B \Longrightarrow X = A^{-1}(A + B)B^{-1}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ -3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(A + B)B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ -3/2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -5/3 & -4/3 \end{pmatrix}$$

1.10.4. Reserva

Opción A

Problema 1.10.10 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-y=\sqrt{3} \\ 3x+2z=2\sqrt{5} \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto) Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible determinado.

b) (1 punto) Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Solución:

Añadimos una tercera ecuación:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-y=\sqrt{3} \\ 3x+2z=2\sqrt{5} \\ ax+by+cz=d \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 3 & 0 & 2 & 2\sqrt{5} \\ a & b & c & d \end{array}\right) \Longrightarrow |A|=-2a-4b+3c$$

a) Para que sea compatible determinado $|A|\neq 0$ y una solución posible puede ser $a=2$, $b=0$ y $c=0$.

b) Para que sea compatible indeterminado $|A|=0$, es decir, la fila $F_3=\alpha F_1+\beta F_2$:

$$\left\{\begin{array}{l} a=2\alpha+3\beta \\ b=-\alpha \\ c=2\beta \\ d=\alpha\sqrt{3}+\beta 2\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Bastaría tomar cualquier $\alpha\neq 0$ o cualquier $\beta\neq 0$, por ejemplo, si $\alpha\neq 0$ y $\beta=1$ tenemos:

$$a=3, b=0, c=2 \;\text{ y }\; d=2\sqrt{5}$$

Problema 1.10.11 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{array}\right), \quad B=\left(\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Hallar una matriz X que verifique la ecuación matricial $XB=A+B$

Solución:

$$XB=A+B\Longrightarrow X=(A+B)B^{-1}$$

$$X=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \end{array}\right)\left(\begin{array}{rrr} -4 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{rrr} -7 & -3 & 9 \\ -1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

Opción B

Problema 1.10.12 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} (m+1)x+ & y+ & z= & 0\\ x+ & (m+1)y+ & z= & m\\ x+ & y+ & (m+1)z= & m^2 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $m = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} (m+1) & 1 & 1 & 0\\ 1 & (m+1) & 1 & m\\ 1 & 1 & (m+1) & m^2 \end{array}\right)$$

$$|A| = m^2(m+3) = 0 \Longrightarrow m = 0 \;\; m = -3$$

- Si $m \neq 0$ y $\lambda \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$nº incógnitas luego en este caso el sistema será Compatible Determinado.

- Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 1 <$ nº de incógnitas, y el sistema es compatible indeterminado.

- Si $m = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

En este caso Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3$, y el sistema es incompatible. Los determinantes:

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 9 \end{array}\right| = 18 \neq 0, \quad \left|\begin{array}{rr} 1 & 1\\ -2 & 1 \end{array}\right| = 3 \neq 0$$

b) Cuando $m = 0 \Longrightarrow x + y + z = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\lambda - \mu\\ y = \lambda\\ z = \mu \end{array}\right.$$

1.11. Año 2010

1.11.1. Modelo

Opción A

Problema 1.11.1 *(2 puntos)* Obtener, para todo número natural n, el valor de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Solución:

Si $n = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $n = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Si $n = n$

$$\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Problema 1.11.2 *(2 puntos)* Discutir razonadamente, en función del parámetro k, el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ky+ & z = & k+2 \\ kx+ & y+ & z = & k \\ x+ & y+ & kz = & -2(k+1) \end{array}\right.$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & k+2 \\ k & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k & -2(k+1) \end{array}\right) \quad |A| = -k^3 + 3k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 1 \;\; k = -2$$

- Si $k \neq 1$ y $k \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $k = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Sistema es Incompatible.

☛ Si $k=-2$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos:

$$F_3=-(F_1+F_2)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Rango}(\overline{A})=2\\ \text{Rango}(A)=2\end{array}\right.\Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado.

Opción B

Problema 1.11.3 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & & z= & 2\\ x+ & \lambda y- & z= & 4\\ -\lambda x- & y- & z= & -5 \end{array}\right.$$

a) (1 punto) Discutirlo para los distintos valores del parámetro λ

b) (1 punto) Resolverlo cuando el sistema sea compatible indeterminado.

c) (1 punto) Resolverlo para $\lambda=-2$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & \lambda & -1 & 4\\ -\lambda & -1 & -1 & -5 \end{array}\right)\quad |A|=\lambda^2-\lambda-2=0\Longrightarrow\lambda=-1\ \ \lambda=2$$

☛ Si $\lambda\neq-1$ y $\lambda\neq 2\Longrightarrow|A|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)=$Rango$(\overline{A})=3=$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

☛ Si $\lambda=-1$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 4\\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Rango}(\overline{A})=3\\ \text{Rango}(A)=2\end{array}\right.\Longrightarrow$$

Sistema es Incompatible.

☛ Si $\lambda=2$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 4\\ -2 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Rango}(\overline{A})=2\\ \text{Rango}(A)=2\end{array}\right.\Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado.

b) El sistema es compatible indeterminado cuando $\lambda=2$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & & z= & 2\\ x+ & 2y- & z= & 4 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=2-\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

c)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & & z= & 2\\ x- & 2y- & z= & 4\\ 2x- & y- & z= & -5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-3\\ y=-6\\ z=5 \end{array}\right.$$

1.11.2. Ordinaria-General

Opción A

Problema 1.11.4 *(2 puntos)* Dado el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ky- & z= & 0\\ 2x- & y+ & 2z= & 0\\ x- & 4y+ & kz= & 0 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar para qué valores del parámetro k el sistema tiene soluciones distintas de $x=y=z=0$.

b) (1 punto) Resolverlo para el casa de $k=3$.

Solución:

a)

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 1 & k & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & -4 & k \end{array}\right) \quad |A|=-2k^2+k+15=0 \Longrightarrow k=3 \;\; k=-5/2$$

- ☛ Si $k\neq 3$ y $k\neq -5/2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado y la única solución sería la trivial $x=y=z=0$
- ☛ Si $k=3$ o $k=-5/2 \Longrightarrow |A|=0 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado y tendría infinitas soluciones distintas de la trivial.

b) Si $k=3$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & z= & 0\\ 2x- & y+ & 2z= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{5}{7}\lambda\\ y=\frac{4}{7}\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 1.11.5 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A=\left(\begin{array}{rr} 1 & 1\\ 1 & -2 \end{array}\right),\quad I=\left(\begin{array}{rr} 1 & 0\\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

se pide:

a) (1 punto) Hallar dos constantes a y b, tales que $A^2=aA+bI$.

b) (1 punto) Sin calcular explícitamente A^3 y A^4, y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5.

Solución:

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 3 \end{array} \right.$$

$$A^2 = -A + 3I$$

b) $A^3 = A^2 \cdot A = (-A + 3I)A = -A^2 + 3A = A - 3I + 3A = 4A - 3I$

$$A^3 = 4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = (4A - 3I)A = 4A^2 - 3A = 4(-A + 3I) - 3A = -7A + 12I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = (-7A + 12I)A = -7A^2 + 12A = -7(-A + 3I) + 12A = 19A - 21I$$

$$A^5 = 19\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 21\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 19 \\ 19 & -59 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.11.6 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & ay- & z = & a \\ ax+ & & 2z = & -2 \\ x+ & & z = & -2 \end{array} \right.$$

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resolverlo en el caso de $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & a & -1 & a \\ a & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \quad |A| = 2a - a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0 \;\; a = 2$$

- ☛ Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- ☛ Si $a = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema es Compatible Indeterminado.

- ☛ Si $a = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible.

b) El sistema es compatible indeterminado cuando $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & z = & 0 \\ & 2z = & -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = -\lambda \end{array}\right.$$

1.11.3. Ordinaria-Específica

Opción A

Problema 1.11.7 *(3 puntos)* Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 3$, y utilizando las propiedades de los determinantes, calcular:

a) (1 punto) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4$

b) (1 punto) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix}$

c) (1 punto) $\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\left|\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}^4\right| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}^4 = 2^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}^4 = 6^4$

b) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \end{vmatrix} = 3 \cdot 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 30$

c) $\begin{vmatrix} 3\alpha+2 & 3\beta+4 & 3\gamma+6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha+6 & \beta & \gamma+3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$

$-4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = -12$

Opción B

Problema 1.11.8 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & my+ & 3z = & 3 \\ x+ & y- & 2z = & 0 \\ 5x+ & (m+1)y+ & z = & 9 \end{array}\right.$$

a) (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para el caso de $m = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & m & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & m+1 & 1 & 9 \end{array} \right) \quad |A| = -2(2m+3) = 0 \Longrightarrow m = -\frac{3}{2}$$

- Si $m \neq -3/2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $m = -3/2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3/2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & -1/2 & 1 & 9 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 9 \end{array} \right| = -30 \neq 0$$

Sistema Incompatible.

b) Si $m = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & & 3z = & 3 \\ x+ & y- & 2z = & 0 \\ 5x+ & y+ & z = & 9 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -5 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

Problema 1.11.9 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{array} \right)$ estudiar para que valores de a tiene inversa y calcularla siempre que sea posible.

Solución:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = a$$

Si $a = 0 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ la matriz no tiene inversa.

Si $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ la matriz si tiene inversa:

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1/a - a & -1/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/a & 1/a \end{array} \right)$$

1.11.4. Extraordinaria-General

Opción A

Problema 1.11.10 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (2 puntos). Estudiar el rango de A según los valores del parámetro m

b) (1 punto). En el caso de $m = 0$, resolver el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución

a)

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^3 - 3m^2 + 4 = 0 \Longrightarrow m = -1,\ m = 2$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} m-1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & m-1 \end{vmatrix} = m^3 - 3m^2 + 4 = 0 \Longrightarrow m = -1,\ m = 2$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m-1 & m & 1 \\ 1 & 2 & m-1 \end{vmatrix} = -m^3 + 3m^2 - 4 = 0 \Longrightarrow m = -1,\ m = 2$$

Si $m = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Si $m = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1$$

Si $m \neq -1$ y $m \neq 2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

b) Si $m = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} -x+ & y+ & & t = & 0 \\ x- & y+ & & t = & 0 \\ x+ & y+ & 2z- & t = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} x = & -\lambda \\ y = & -\lambda \\ z = & \lambda \\ t = & 0 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.11.11 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la compatibilidad del sistema

b) (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea compatible determinado. Razonar la respuesta.

c) (0,5 puntos). Añadir una ecuación para que el sistema sea incompatible. Razonar la respuesta.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Rango$\overline{A}$ =Rango$(A) = 2 <$n$^{\underline{o}}$ de incógnitas, luego el sistema es compatible indeterminado.

b) Se elige una ecuación linealmente independiente de las otras dos por ejemplo $x + z = 1$ (Los tres planos se tienen que cortar en un sólo punto)

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Rango$\overline{A}$ =Rango$(A) = 3 =$n$^{\underline{o}}$ de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado.

c) Se elige una ecuación de forma que los términos en x, y y z dependan de las otras dos pero el término independiente no. (Los planos se cortarían dos a dos sin coincidir los tres en una recta). Por ejemplo: $3x + y = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Rango$\overline{A} = 3 \neq$Rango$(A) = 2 =$ luego el sistema es incompatible.

Problema 1.11.12 *(2 puntos)* Dada la matriz:

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de A según los valores del parámetro a.

b) (1 punto). ¿Para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1}? Calcular A^{-1} para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix} = a(2-a) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = 2$$

Si $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Si $a = 2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

En conclusión, Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3$. Por el contrario, si $a = 0$ o $a = 2 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$.

b) Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Longrightarrow$ existe inversa.

Si $a = 0$ o $a = 2 \Longrightarrow$ no existe inversa. Si $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.11.5. Extraordinaria-Específica

Opción A

Problema 1.11.13 *(3 puntos)* El sistema $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

tiene diferentes soluciones según sea la matriz B

a) (1 punto). Determinar, si existen, el valor o valores de a para los que el sistema es compatible determinado (independientemente del valor de B).

b) (0,5 puntos). Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o los valores de b para los que el sistema es incompatible.

c) (1,5 puntos). Si $a = 4$, y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix}$, determinar, si existen, el valor o los valores de c para los que el sistema es compatible indeterminado. Resolver el sistema.

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 5 & a \end{vmatrix} = 0$ sea cual sea el valor de a, luego el sistema no compatible determinado en ningún caso.

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ b \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 4 & b \end{array}\right)$$

$$|A_1| = |C_1C_2C_3| = 0, \quad |A_2| = |C_1C_2C_4| = 2b + 5 = 0 \Longrightarrow b = -\frac{5}{2}$$

$$|A_3| = |C_1C_3C_4| = 0, \quad |A_2| = |C_2C_3C_4| = -2b - 5 = 0 \Longrightarrow b = -\frac{5}{2}$$

El sistema es imcompatible para cualquier valor distinto de -5/2.

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 10 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & c \\ 4 & 5 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

Sabemos que Rango$(A) = 2$, luego tenemos que encontrar c de forma que la segunda fila sea combinación lineal de las otras dos, de esa forma Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas. Tendremos $F_2 = mF_1 + nF_2$:

$$(0, 2, 0, c) = m(1, 0, 1, 0) + n(4, 5, 4, 10) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 = m + 4n \\ 2 = 5n \\ 0 = m + 4n \\ c = 10n \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} m = -4n \\ n = 2/5 \\ c = 10n \end{array}\right. \Longrightarrow c = 4$$

Es decir cuando $c = 4$ tenemos que $F_2 = -8/5F_1+2/5F_2$ y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

$$\left\{ \begin{array}{c} x+z=0 \\ 2y=4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-\lambda \\ y=2 \\ z=\lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.11.14 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & kz= & k \\ x+ & ky+ & z= & k^2 \\ kx+ & y+ & z= & 1 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro k.

b) (1 punto). Resolverlo para $k = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ 1 & k & 1 & k^2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array} \right); \quad |A| = -k^3+3k-2 = 0 \Longrightarrow k=1,\ k=-2$$

- Si $k \neq 1$ y $k \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ =nº de incógnitas, luego el sistema sería compatible determinado.
- Si $k = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right); \text{ y } \left| \begin{array}{rrr} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = -9 \neq 0$$

En este caso tenemos $|A| = 0$ y $\left| \begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{array} \right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Por tanto, Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A})$ y el sistema es incompatible.

- Si $k = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Claramente Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 1 <$ nº de incógnitas y se trata de un sistem compatible indeterminado.

b) Si $k = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y & & = 0 \\ x+ & & z= & 0 \\ & y+ & z= & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-1/2 \\ y=1/2 \\ z=1/2 \end{array} \right.$$

1.12. Año 2011

1.12.1. Modelo

Opción A

Problema 1.12.1 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\begin{cases} \lambda x & & + & \lambda z = & 2 \\ x+ & \lambda y- & & z = & 1 \\ x+ & 3y+ & & z = & 2\lambda \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema para $\lambda = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & \lambda & 2 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2\lambda \end{array}\right) \quad |A| = -6\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$$

- ☛ Si $\lambda \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A})$ $= 3 =$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- ☛ Si $\lambda = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \Longrightarrow$$

Sistema es Incompatible.

b)

$$\begin{cases} x & & + & z = & 2 \\ x+ & y- & & z = & 1 \\ x+ & 3y+ & & z = & 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3/2 \\ y = 0 \\ z = 1/2 \end{cases}$$

Opción B

Problema 1.12.2 *(3 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Calcular $A^2 - 4A + 3I$

b) (1 punto). Demostrar que la matriz inversa A^{-1} de A es $\dfrac{1}{3}(4I - A)$.

c) (1 punto). Hallar la matriz inversa de la matriz $A - 2I$.

Solución:

a)

$$A^2 - 4A + 3I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^2 - 4\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^2 - 4A + 3I = O \Longrightarrow A(A - 4I) = -3I \Longrightarrow A\left(-\frac{1}{3}(A - 4I)\right) = I \Longrightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(4I - A)$$

c)

$$(A - 2I)^2 = (A - 2I)(A - 2I) = A^2 - 2IA - 2AI + 4I^2 = A^2 - 4A + 4I =$$

$$A^2 - 4A + 3I + I = O + I = I \Longrightarrow (A - 2I)^{-1} = A - 2I$$

.

1.12.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.12.3 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Calcular el rango de A en función de los valores de a.

b) (1 punto). En el caso de $a = 2$, discutir el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de b, y resolverlo cuando sea posible.

c) (1 punto). En el caso de $a = 1$, resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = 4 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm 2$, por tanto, si $a \neq \pm 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Si $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Luego en este caso $\text{Rango}(A) = 2$.

Si $a = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Luego en este caso $\text{Rango}(A) = 2$

b) Si $a = 2$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & b \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0 \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Luego el $\text{Rango}(A) = 2$ independientemente del valor de b. Tal y como se había estudiado en el apartado anterior.

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix} = 6(b-3) = 0 \Longrightarrow b = 3$$

Si $b \neq 3 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$ y el sistema sería Incompatible, por el contrario, si $b = 3$ el $\text{Rango}(\overline{A}) = 2$, y en este caso sería Compatible Indeterminado. En este último caso:

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{cases}$$

Opción B

Problema 1.12.4 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & (m-1) \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}$$

según los valores de m.

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema en los casos $m = 0$ y $m = 1$.

Solución:

a)
$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & (m-1)z = & m \\ & (m-1)y+ & z = & m \\ (m-2)x+ & & = & m+2 \end{array}\right.$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & (m-1) & m \\ 0 & m-1 & 1 & m \\ m-2 & 0 & 0 & m+2 \end{array}\right) \quad |A| = -m(m-2)^2 = 0 \Longrightarrow m = 0, \;\; m = 2$$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $m = 0$
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$
Sistema es Compatible Indeterminado.

- Si $m = 2$
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$
Sistema es Incompatible.

b) Si $m = 0$
$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y- & z = & 0 \\ -2x & & = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Si $m = 1$
$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y & = & 1 \\ & & z = & 1 \\ -x & & = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

1.12.3. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.12.5 *(2 puntos).* Calcular el rango de la matriz

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \\ a+2 & 0 & a \end{array}\right)$$

según los valores del parámetro a.

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & 0 & -a \end{vmatrix} = 2(a+2) = 0 \Longrightarrow a = -2$$

Si $a = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Luego Rango$(A) = 3, \ \forall\, a \in \Re$

Problema 1.12.6 *(2 puntos).* Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz M.

b) (1 punto). Hallar la matriz M^2.

c) (0,5 puntos). Hallar la matriz M^{25}.

Solución:

a)

$$|M| = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1$$

b)

$$M^2 = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

c)

$$M^n = \left\{ \begin{array}{lcl} M & \text{si} & n \text{ impar} \\ I & \text{si} & n \text{ par} \end{array} \right. \Longrightarrow M^{25} = M$$

Opción B

Problema 1.12.7 *(3 puntos).* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 2x+ & 4y & & = \ 4k \\ -k^3x+ & k^2y+ & kz & = \ 0 \\ x+ & ky & & = \ k^2 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo en función del valor del parámetro k.

b) (0,5 puntos). Resolver el sistema para $k = 1$.

c) (0,5 puntos). Resolver el sistema para $k = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 0 & 4k \\ -k^3 & k^2 & k & 0 \\ 1 & k & 0 & k^2 \end{array} \right); \quad |A| = \left| \begin{array}{rrr} 2 & 4 & 0 \\ -k^3 & k^2 & k \\ 1 & k & 0 \end{array} \right| = 2k(2-k) = 0 \Longrightarrow k = 0, \ \ k = 2$$

- ☛ Si $k \neq 0$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ *SCD* Sistema compatible determinado.
- ☛ Si $k = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right); \quad \left| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{array} \right| = -4 \neq 0 \Longrightarrow$$

  Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de ncógnitas $\Longrightarrow$ *SCI* Sistema compatible indeterminado.
- ☛ Si $k = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 0 & 8 \\ -8 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right); \quad 2F_3 = F_1 \text{ y } \left| \begin{array}{rr} 2 & 4 \\ -8 & 4 \end{array} \right| = 40 \neq 0 \Longrightarrow$$

  Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de ncógnitas $\Longrightarrow$ *SCI* Sistema compatible indeterminado.

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 2x+ & 4y & & = 4 \\ -x+ & y+ & z = & 0 \\ x+ & y & & = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

c)

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 2x+ & 4y & & = 8 \\ -8x+ & 4y+ & 2z = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4/5 + 1/5\lambda \\ y = 8/5 - 1/10\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

1.13. Año 2012

1.13.1. Modelo

Opción A

Problema 1.13.1 *(3 puntos)* Dado el sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 2 \\ -3x+ & 2y+ & 3z = & -2 \\ 2x+ & my- & 5z = & -4 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m.

b) (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & m & -5 & -4 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = -9m - 27 = 0 \Longrightarrow m = -3$$

Si $m \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -5 & -4 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 0, \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{array} \right| = 5 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2$.

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -4 \end{array} \right| = -44 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$ Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

b) Para $m = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 2 \\ -3x+ & 2y+ & 3z = & -2 \\ 2x+ & y- & 5z = & -4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.13.2 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x+ & 2y = & 1 \\ 3x+ & y = & -a \\ -3x+ & 2ay = & 7 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro a.

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema cuando sea compatible.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -a \\ -3 & 2a & 7 \end{array} \right) \Longrightarrow |\overline{A}| = 2a^2 + 12a - 32 = 0 \Longrightarrow a = 2, \ \ a = -8$$

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} \right| = -5 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Si $a \neq 2$ y $a \neq -8 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $a = 2 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Si $a = -8 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

b) Si $a = 2$:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y = & 1 \\ 3x+ & y = & -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 1 \end{array}\right.$$

Si $a = -8$:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y = & 1 \\ 3x+ & y = & 8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -1 \end{array}\right.$$

1.13.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.13.3 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \left(\begin{array}{rrr} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{array}\right), \; B = \left(\begin{array}{r} 12 \\ 6 \\ 8 \end{array}\right), \; C = \left(\begin{array}{r} 4 \\ 3 \\ 3 \end{array}\right), \; X = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el rango de A en función de los valores de k.

b) (0,75 puntos) Para $k = 2$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = B$.

c) (0,75 puntos) Para $k = 1$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = C$.

Solución:

a)

$$|A| = 4k(k^2 - 1) = 0 \Longrightarrow k = 0, \;\; k = \pm 1$$

- Si $k \neq 0$ o $k \neq \pm 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$
- Si $k = 0$:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

- Si $k = 1$:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

- Si $k = -1$:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

b) Si $k = 2$:

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/12 & -1/2 & 1/3 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/12 & 1/2 & -1/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 8/3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/12 & -1/2 & 1/3 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/12 & 1/2 & -1/6 \end{pmatrix}$$

c) Si $k = 1$ el sistema $AX = C$ tiene como matriz asociada:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right), \text{ Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

Opción B

Problema 1.13.4 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de la matriz B en función de a.

b) (1 punto). Para $a = 0$, calcular la matriz X que verifica $AX = B$.

Solución:

a)

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -7 \\ 3 & 2-a & 3+a \end{vmatrix} = 40(1-a) = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Luego si $a \neq 1 \Longrightarrow$Rango$(B) = 3$. Si $a = 1$:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|B_1| = |B_2| = |B_3| = |B_4| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(B) = 2$$

b) Si $a = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B:$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.13.5 *(2 puntos)* Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - F_4 \\ F_2 - F_4 \\ F_3 - F_4 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)(y-1)(z-1)$$

1.13.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.13.6 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 3x+ & 2y+ & (a-1)z = & 1 \\ -x+ & ay+ & z = & 0 \\ 2x+ & y- & 2z = & 3 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir sus soluciones según los valores de a.

b) (1 punto). Hallar la solución del sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & (a-1) & 1 \\ -1 & a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right); \ |A| = -2\left(a + \frac{1}{2}\right)(a+2) = 0 \Longrightarrow$$

$$a = -\frac{1}{2}, \ a = -2$$

☛ Si $a = -\dfrac{1}{2}$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1/2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso el sistema es Incompatible.

☛ Si $a = --2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso el sistema es Incompatible.

b)

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 3x+ & 2y & = & 1 \\ -x+ & y+ & z = & 0 \\ 2x+ & y- & 2z = & 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1/3 \\ y = 1 \\ z = -4/3 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.13.7 *(3 puntos)* . Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1$, calcular los siguientes determinantes:

$a)$ (1,5 puntos) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{vmatrix}$, $b)$ (1,5 puntos) $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

Solución:

$$a) \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3x & y & 2z \\ 6 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -6$$

$$b) \quad \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2-x & 2-y & -z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ x & y & z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{bmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

1.13.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.13.8 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x+ & ay+ & 4z = & 6\\ x+ & (a+1)y+ & z = & 3\\ (a-1)x- & ay- & 3z = & -3 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo para $a = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & a & 4 & 6\\ 1 & (a+1) & 1 & 3\\ (a-1) & -a & -3 & -3 \end{array}\right) \quad |A| = -3a^2 - 8a - 5 = 0 \Longrightarrow a = -1,\ \ a = -5/3$$

- ☛ Si $k \neq -1$ o $k \neq -5/3 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = nº de incógnitas, y el sistema es compatible determinado (solución única).

- ☛ Si $k = -5/3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -5/3 & 4 & 6\\ 1 & -2/3 & 1 & 3\\ -8/3 & 5/3 & -3 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow \left|\begin{array}{cc} 4 & 6\\ 1 & 3 \end{array}\right| = 6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{rrr} 3 & 4 & 6\\ 1 & 1 & 3\\ -8/3 & -3 & -3 \end{array}\right| = -4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

  Luego Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A})$ y el sistema es incompatible (no tiene solución).

- ☛ Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 4 & 6\\ 1 & 0 & 1 & 3\\ -2 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right);\ F_3 = F_2 - F_1$$

  Luego en este caso el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $a = -1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 3x- & y+ & 4z = & 6\\ x+ & & z = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 - \lambda\\ y = 3 + \lambda\\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.13.9 *(3 puntos)* Sean $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ y $\overrightarrow{d} \in R^3$, vectores columna. Si

$$det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}) = -1, \quad det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}) = 3, \quad det(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}) = -2$$

calcular razonadamente el determinante de las siguientes matrices:

a) (0,5 puntos). $det(\overrightarrow{a}, 3\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b})$.

b) (0,75 puntos). $det(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{d})$.

c) (0,75 puntos). $det(\overrightarrow{d} + 3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{d})$

Solución:

a) $det(\overrightarrow{a}, 3\overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}) = 3det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{b}) = -3det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}) = 3$

b) $det(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{d}) = det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{d}) + det(-\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, -\overrightarrow{d}) = -3 - 2 = -5$

c) $det(\overrightarrow{d} + 3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{d}) = det(\overrightarrow{d}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + det(\overrightarrow{d}, 2\overrightarrow{a}, -3\overrightarrow{a}) + det(\overrightarrow{d}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}) + det(3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + det(3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, -3\overrightarrow{a}) + det(3\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}) = -2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 6 = 4$

Problema 1.13.10 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & & 2z = & 2 \\ ax- & y+ & z = & -8 \\ 2x+ & & az = & 4 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 punto). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo para $a = -5$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ a & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & a & 4 \end{array}\right); \quad |A| = -a - 4 = 0 \Longrightarrow a = -4$$

- Si $a \neq -4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
- Si $a = -4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right); |A| = 0, \quad \left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0; |A_2| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & -8 \\ 2 & 0 & 4 \end{array}\right| = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & -8 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0; \; |A_4| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -8 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Luego cuando $a = -4$ tenemos que Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b)

$$\begin{cases} x- & & 2z = & 2 \\ -5x- & y+ & z = & -8 \\ 2x- & & 5z = & 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases}$$

1.14. Año 2013

1.14.1. Modelo

Opción A

Problema 1.14.1 *(3 puntos)* Dado el sistema

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & (m+3)z = & 3 \\ x+ & y+ & (4+m-m^2)z = & 3 \\ 2x+ & 4y+ & 3(m+2)z = & 8 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m.

b) (1 punto). Resolverlo para $m = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 1 & 1 & 4+m-m^2 & 3 \\ 2 & 4 & 3(m+2) & 8 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = -m = 0 \Longrightarrow m = 0$$

Si $m \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 0, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$ Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

b) Para $m=-2$:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x+ & 2y+ & z & = & 3 \\ x+ & y- & 2z & = & 3 \\ 2x+ & 4y+ & & = & 8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2 \\ y=3 \\ z=-1 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.14.2 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Dada la matriz $A=\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}\right)$ y la matriz $X=\left(\begin{array}{cc} x & y \\ z & t \end{array}\right)$ obtener las relaciones que deben cumplir x, y, z, t para que la matriz X verifique $AX=XA$.

b) (0,5 puntos). Dar un ejemplo de matriz X distinta de la matriz nula y de la matriz identidad que cumpla la igualdad anterior.

c) (0,5 puntos). Calcular la inversa de la matriz A.

Solución:

a)

$$AX=XA \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc} x & y \\ z & t \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} x & y \\ z & t \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc} x+2z & y+2t \\ 2x+z & 2y+t \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} x+2y & 2x+y \\ z+2t & 2z+t \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x+2z=x+2y \Longrightarrow z=y \\ y+2t=2x+y \Longrightarrow t=x \\ 2x+z=z+2t \Longrightarrow t=x \\ 2y+t=2z+t \Longrightarrow z=y \end{array}\right. \Longrightarrow X=\left(\begin{array}{cc} x & y \\ y & x \end{array}\right).$$

b) $X=\left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{array}\right)$.

c) $A^{-1}=\left(\begin{array}{cc} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{array}\right)$.

Problema 1.14.3 *(2 puntos)* De las matrices cuadradas A y B se sabe que:

$$A+B=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{array}\right), \quad A^2-AB+BA-B^2=\left(\begin{array}{rrr} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

a) (1 punto). Calcular la matriz $A-B$.

b) (1 punto). Calcular las matrices A y B.

Solución:

a)

$$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$A-B=(A+B)^{-1}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1/4 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\\ \\ A-B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ \\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

1.14.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.14.4 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax+ & 7y+ & 5z= & 0\\ x+ & ay+ & z= & 3\\ & y+ & z= & -2\end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a=4$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a=2$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0\\ 1 & a & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -2\end{array}\right)\Longrightarrow |A|=a^2-a-2=0\Longrightarrow a=-1,\ \ a=2$$

Si $a\neq -1$ y $a\neq 2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incóngitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.
Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 5 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -2\end{array}\right)\Longrightarrow |A|=0,\ \begin{vmatrix} -1 & 7\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-6\neq 0\Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$ Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.
Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 0, \ \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2$.

$$|A_1| = |A| = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \ |A_4| = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Como Rango$(A) =$ Rango$(\overline{A}) <$ nº incógnitas $\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado(infinitas soluciones).

b) Para $a = 4$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 4x+ & 7y+ & 5z = & 0 \\ x+ & 4y+ & z = & 3 \\ & y+ & z = & -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{array} \right.$$

c) Para $a = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & z = & 3 \\ & y+ & z = & -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 7 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.14.5 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de λ para el cual la ecuación matricial $XA = B$ tiene solución única.

b) (1 punto). Calcular la matriz X para $\lambda = 4$.

c) (1 punto). Calcular el determinante de la matriz A^2B en función de λ.

Solución:

a) $|A| = \lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$. Si $\lambda \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$ por tanto la solución del sistema $XA = B \Longrightarrow X = BA^{-1}$ tiene solución única.

b) Si $\lambda = 4$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 8/5 \\ 1/5 & -1/5 & -2/5 \\ -1/5 & 1/5 & -3/5 \end{pmatrix}; \quad X = BA^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 & 8/5 \\ 1/5 & -1/5 & -2/5 \\ -1/5 & 1/5 & -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2/5 & 3/5 & 11/5 \\ 3/5 & 7/5 & 14/5 \end{pmatrix}$$

c) $|A^2B| = |A||A||B| = -(\lambda + 1)^2$

1.14.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.14.6 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} \lambda x+ & 2y- & 3z = & 2\lambda \\ x+ & y+ & z = & 1 \\ 2x- & 3y+ & 2z = & 2 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutirlo según los valores de λ.

b) (1,5 puntos). Para los valores de λ tales que el sistema tiene solución única, obtener esta solución en función de λ.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 2 & -3 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 5\lambda + 15 = 0 \Longrightarrow \lambda = -3$$

Si $\lambda \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = nº de incóngitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.
Si $\lambda = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 0, \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2$.

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$ Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

b) Para un $\lambda \neq -3$ cualquiera:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{5\lambda + 15} = \frac{2\lambda + 3}{\lambda + 3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 2\lambda & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{5\lambda + 15} = 0; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{5\lambda + 15} = -\frac{\lambda}{\lambda + 3}$$

Opción B

Problema 1.14.7 *(2 puntos)* Sean A y B matrices 2 con determinantes: $\det A = 5$, $\det B = 3$. Se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar det $\left[B^{-1}A^2B^2\right]$

b) (0,5 puntos). Hallar det $\left[A + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A\right]$.

c) (1 punto). Si c_1 y c_2 son las columnas de la matriz A (es decir, $A = (c_1\ c_2)$), hallar la solución del sistema:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (c_2)$$

Solución:

a) $|B^{-1}A^2B^2| = |B^{-1}||A^2||B^2| = |B|^{-1}|A|^2|B|^2 = \dfrac{1}{3}\cdot 25 \cdot 9 = 75$

b) $\left|\left[A + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A\right]\right| = \left|\left[\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) A\right]\right| =$
$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot |A| = 30$

c) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (c_1\ c_2)$, tenemos $AX = (c_1) \Longrightarrow X = A^{-1}(c_2)$:
Como $|A| = 5 \Longrightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -cb + ad \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema 1.14.8 *(2 puntos)* Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} -3 & \lambda+1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1 punto). Determinar λ para que A sea invertible.

b) (1 punto). Calcular A^{-1} en el caso $\lambda = 1$.

Solución:

a) $|A| = (\lambda+1)(4\lambda-3) = 0 \Longrightarrow \lambda = -1,\ \ \lambda = 3/4$. La matriz es invertible para cualquier valor distinto de los calculados anteriormente.

b) Si $\lambda = 1$: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1/2 & -3/2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

1.14.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.14.9 *(3 puntos)* Dadas las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}; \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Calcular el determinante de A. Determinar el rango de A según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolver el sistema homogéneo $AX = O$ en el caso $a = 1$.

c) (1 punto). Resolver el sistema homogéneo $AX = O$ cuando $a = -1$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 - C_2 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & a & a \\ a-1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & a & a & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-(a-1)\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 - C_3 \\ C_3 \end{bmatrix} = -(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 \\ a & a-1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(a-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(1-a^2) = -(a+1)(a-1)^3$$

$$-(a+1)(a-1)^3 = 0 \Longrightarrow a = -1, \ a = 1$$

Si $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1$$

Si $a = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 4$.

b) Si $a = 1$ el Rango$(A) = 1$ y, como el sistema es homogéneo, el sistema es compatible indeterminado. Como el sistema tiene cuatro incógnitas se necesitan $4 - 1 = 3$ parámetros:

$$x + y + z + w = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = -\lambda - \mu - \sigma \\ y = \lambda \\ z = \mu \\ w = \sigma \end{cases}$$

c) Si $a = -1$ el Rango$(A) = 3$ y, como el sistema es homogéneo, el sistema es compatible indeterminado. Como el sistema tiene cuatro incógnitas se necesitan $4 - 3 = 1$ parámetro:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & y- & z- & w = & 0 \\ -x+ & y+ & z- & w = & 0 \\ -x- & y- & z+ & w = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \\ w = \lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.14.10 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & \lambda y+ & \lambda z = & 1 - \lambda \\ x+ & y+ & (\lambda - 1)z = & -2\lambda \\ (\lambda - 1)x+ & y+ & z = & \lambda - 1 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro λ.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $\lambda = 1$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $\lambda = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda & 1 - \lambda \\ 1 & 1 & \lambda - 1 & -2\lambda \\ \lambda - 1 & 1 & 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = 2 \end{array}\right.$$

Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Si $\lambda = 2$:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso el Rango$(A) = 1$ y el Rango$(\overline{A}) = 2$ y el sistema es incompatible.

Si $\lambda = -1$:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

En este caso: $F_1 = -F_3 \Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $\lambda = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & y+ & z= & 0 \\ x+ & y & = & -2 \\ & y+ & z= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=-2 \\ z=2 \end{array}\right.$$

c) Si $\lambda = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & y- & z= & 2 \\ x+ & y- & 2z= & -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\mu \\ y=-2+\mu \\ z=\mu \end{array}\right.$$

1.14.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.14.11 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular la matriz inversa A^{-1} de A.

b) (1 punto). ¿Son iguales las matrices $(A^{-1})^2$ y $(A^2)^{-1}$?

c) (1 punto). Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ resolver la ecuación matricial $AX = B$.

Solución:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Si, $(A^{-1})^2 = (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.14.12 *(2 puntos)* Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 6 \\ x-1 & 0 & -6 \\ x^2+2 & x & 12 \end{vmatrix} = 6$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 6 \\ x-1 & 0 & -6 \\ x^2+2 & x & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 6 \\ x & 0 & -6 \\ x^2 & x & 12 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & -6 \\ 2 & x & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 6 \\ x & 0 & -6 \\ x^2 & x & 12 \end{vmatrix} = 6x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ x & x & 2 \end{vmatrix} =$$
$$6x \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 2 \end{vmatrix} = -6x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & 2 \end{vmatrix} = -6x(2-x) = 6 \Longrightarrow$$

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Problema 1.14.13 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & ay- & z = & 0 \\ 3x+ & 2y+ & az = & 0 \\ 7x+ & 9y+ & 9z = & 0 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo para $a = 5$.

Solución:

a) Se trata de un sistema homogéneo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 3 & 2 & a \\ 7 & 9 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 7a^2 - 36a + 5 = 0 \Longrightarrow a = 5, \;\; a = 1/7$$

Si $a \neq 5$ y $a \neq 1/7 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado. Solución trivial $(x = y = z = 0)$
Si $a = 5$ o $a = 1/7$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para Si $a = 5$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 5y- & z = & 0 \\ 3x+ & 2y+ & 5z = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -27/13\lambda \\ y = 8/13\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

1.15. Año 2014

1.15.1. Modelo

Opción A

Problema 1.15.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar los valores de k para los que existe la matriz inversa A^{-1}.

b) (1 punto). Hallar la matriz A^{-1} para $k = 6$.

c) (1,5 puntos). Resolver la ecuación matricial $AX - A = B$ para $k = 6$.

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & k \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists\, A^{-1}\ \forall k, , \in R$$

b)

$$k = 6 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $AX - A = B \Longrightarrow X = A^{-1}(B + A)$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.15.2 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrr} (a+2)x+ & (a+1)y = & -6 \\ x+ & 5y = & a \\ x+ & y = & -5 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo cuando sea posible.

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} a+2 & a+1 & -6 \\ 1 & 5 & a \\ 1 & 1 & -5 \end{array} \right)$$

a) $|\overline{A}| = -21a - 21 = 0 \Longrightarrow a = -1$. Si $a = -1 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$Rango($\overline{A} = 3 \neq$ Rango$(A) = 2 \Longrightarrow$ el sistema sería incompatible.

Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -6 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{array} \right)$$

En este caso Rango($\overline{A} = 2 =$ Rango$(A) =$ n$^{\underline{o}}$ de incógnitas$\Longrightarrow$ el sistema sería compatible determinado.

b)

$$\left\{ \begin{array}{r} x = -6 \\ x + y = -5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -6 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

Problema 1.15.3 *(2 puntos)* Sabiendo que el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

es igual a 1, calcular el valor de los determinantes:

a) (1 punto). $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$.

b) (1 punto). $\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

b)

$$\begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x-1 & 3y & 3z-1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2+x & 4+y & 6+z \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 2$$

1.15.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.15.4 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Calcula α, β y γ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $AX = B$.

b) (1 punto). Si $\beta = \gamma = 1$ ¿Qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema lineal homogéneo $AX = O$ sea compatible determinado?

c) (0,5 puntos). Si $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$, resuelve el sistema $AX = B$.

Solución:

a)
$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 1 \\ 3\alpha + \gamma = 0 \\ 2\beta + 3\gamma = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 9/2 \\ \gamma = -3 \end{array} \right.$$

b) $\beta = \gamma = 1$:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |A| = -\alpha(\alpha - 1) = 0 \Longrightarrow \alpha = 0, \ \ \alpha = 1$$

Se trata de un sistema homogéneo:
Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas por lo que es un sistema compatible determinado y su única solución sería la trivial: $x = y = z = 0$.
Si $\alpha = 0$ o $\alpha = 1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) <$ nº de incógnitas por lo que es un sistema compatible indeterminado.

c) Si $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -x + y = 1 \\ -z = 0 \\ x + y = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.15.5 *(2 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}, \ \text{se pide :}$$

a) (1 punto). Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa.

b) (1 punto). Calcular la matriz inversa A^{-1} de A, en el caso $a = 2$.

Solución:

a) $|A| = -2a^2 + 5 = 0 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.
Si $a \neq \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.
Si $a = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}} \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

b) Para $a=2$:
$$A=\left(\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 2\\ -3 & 2 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{array}\right)\Longrightarrow A^{-1}=\left(\begin{array}{rrr} 2 & -1 & 2\\ 1 & -1/3 & 4/3\\ 2 & -2/3 & 5/3\end{array}\right)$$

Problema 1.15.6 *(2 puntos)* Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado veintidós euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de catorce euros. Se pide:

a) (1 punto). Expresar, en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.

b) (1 punto). Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.

Solución:
Sean x el precio de un cuaderno, y el precio de un rotulador y z el de un bolígrafo.

a)
$$\left\{\begin{array}{l} 5x+2y+3z=22\\ 2x+y+6z=14\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-6+9z\\ y=26-24z\end{array}\right.$$

b) $8x+3y=8(-6+9z)+3(26-24z)=30$ euros.

1.15.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.15.7 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z= & 1\\ & y- & z= & a\\ x+ & y- & z= & 3a^2\end{array}\right.$$
se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo cuando sea posible.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & a\\ 1 & 1 & -1 & 3a^2\end{array}\right)\Longrightarrow |A|=|A_1|=0$ y $\left|\begin{array}{rr} 1 & -1\\ 0 & 1\end{array}\right|=1\neq 0\Longrightarrow$
Rango$(A)=2\ \ \forall a\in\mathbb{R}$.
$$|A_2|=\left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & a\\ 1 & 1 & a^2\end{array}\right|=3a^2-2a-1=0\Longrightarrow a=1,\ \ a=-1/3$$
$$|A_3|=\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & a\\ 1 & -1 & 3a^2\end{array}\right|=-3a^2+2a+1=0\Longrightarrow a=1,\ \ a=-1/3$$
$$|A_4|=\left|\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & a\\ 1 & -1 & 3a^2\end{array}\right|=0$$

En conclusión si $a \neq 1$ y $a \neq -1/3 \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A} = 3 \neq \text{Rango}(A)$ y el sistema sería incompatible. Por el contrario si $a = 1$ o $a = -1/3 \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A} = 2 = \text{Rango}(A) <$ nº de incógnitas y el sistema sería compatible indeterminado.

b) Para $a = -1/3$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z= & 1 \\ & y- & z= & -1/3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2/3 \\ y = -1/3 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Para $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z= & 1 \\ & y- & z= & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.15.8 *(3 puntos)* Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ tiene determinante igual a 10, se pide calcular justificadamente:

a) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2a+b & b & c \\ 4 & 2 & 3 \\ 2x+y & y & z \end{pmatrix}$.

b) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix}$.

c) (1 punto). El determinante de la matriz $(BB^t)^3$, donde $B = \begin{pmatrix} a+2 & b+4 & c+6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ y B^t es la matriz transpuesta de B.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 2a+b & b & c \\ 4 & 2 & 3 \\ 2x+y & y & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b & c \\ 2 & 2 & 3 \\ 2x & y & z \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & c \\ 2 & 2 & 3 \\ y & y & z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 20$

b) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -60$

c) $|B| = \begin{vmatrix} a+2 & b+4 & c+6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10$

$$|(BB^t)^3| = |BB^t|^3 = (|B||B^t|)^3 = (|B|^2)^3 = |B|^6 = 10^6$$

1.15.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.15.9 *(3 puntos)* Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & a\\ 1 & a & 1\\ a-1 & a & 2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix},\quad O=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Determinar el valor o valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1}.

b) (1 punto). Para $a=-2$, hallar la matriz inversa A^{-1}.

c) (1 punto). Para $a=1$, calcular todas las soluciones del sistema lineal $AX=O$.

Solución:

a) $|A|=-a(a^2-3a+2)=0\Longrightarrow a=0,\ a=1$ y $a=2$.
Si $a=0$ o $a=1$ o $a=2\Longrightarrow |A|=0\Longrightarrow \nexists A^{-1}$.
Si $a\neq 0$ y $a\neq 1$ y $a\neq 2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \exists A^{-1}$.

b)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -3 & -2 & 2\end{pmatrix}\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/12 & 1/3 & -1/4\\ -5/24 & -1/6 & -1/8\\ -1/3 & 1/3 & 0\end{pmatrix}$$

c) Si $a=1$ y $AX=O$ tenemos:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0\\ y+2z=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\lambda\\ y=-2\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.15.10 *(2 puntos)* Dada la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} a & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

donde B es una matriz cuadrada de tamaño 2×2, se pide:

a) (1 punto). Calcular el valor o valores de a para los que esta ecuación tiene solución.

b) (1 punto).Calcular B en el caso $a=1$.

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} a & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

a) $A\cdot B=C\Longrightarrow B=A^{-1}C$, luego la ecuación tiene solución siempre que exista A^{-1}:

$$|A|=7a-6=0\Longrightarrow a=\frac{6}{7}$$

Si $a=7/6\Longrightarrow |A|=0\Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

Si $a\neq 7/6\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \exists A^{-1}$.

b) $B = A^{-1}C$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = A^{-1}C = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 1.15.11 *(2 puntos)* Estudiar el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a.
Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + F_1 \\ F_4 + F_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & -7 & a+10 \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 5 & 0 & -7 & a+5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -7 & a+10 \\ 3 & -2 & 11 \\ 5 & -7 & a+5 \end{vmatrix} = 12 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 6$$

Si $a \neq 6 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 4$.
Si $a = 6 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) < 4$. Y como

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$$

1.16. Año 2015

1.16.1. Modelo

Opción A

Problema 1.16.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & m & m \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de A según los valores de m.

b) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz A^{20}.

c) (0,75 puntos). Para $m = -2$, resolver el sistema $AX = O$.

d) (0,75 puntos). Para $m = 0$, resolver el sistema $AX = B$.

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & m & m \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ \forall m \in R \Longrightarrow \text{Rango}(A) < 3$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & m \end{vmatrix} = -2m + 4 = 0 \Longrightarrow m = 2 \Longrightarrow \text{Si } m \neq 2 \ \text{Rango}(A) = 2$$

Y si $m = 2$ tenemos $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$

Por tanto, $\text{Rango}(A) = 2 \ \ \forall m \in R$.

b) $|A^{20}| = |A|^{20} = 0^{20} = 0$

c) Se trata de un sistema homogéneo y el $\text{Rango}(A) = 2 <$ nº de incógnitas, luego es un sistema compatible indeterminado.

$$\left\{ \begin{array}{l} -2x + 4y + 2z = 0 \\ -x - 2y - 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1/2\lambda \\ y = -3/4\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

d) Para $m = 0$ se observa que $F_1 = 2F_2$ y como $\text{Rango}(A) = 2$ se trata de un sistema compatible indeterminado.

$$\left\{ \begin{array}{c} -2x + 4y + 2z = -2 \\ -x = 0 \\ -x + 2y + z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ -x + 2y + z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ y = \frac{-1-\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.16.2 *(2 puntos)*

a) (1,5 puntos). Hallar X e Y, matrices 2×2, tales que

$$X + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

b) (0,5 puntos). Hallar Z, matriz invertible 2×2, tal que

$$Z^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} X + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \\ X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \\ \\ Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

.

b) $Z^2\cdot 3I\cdot Z^{-1}=3Z\cdot Z\cdot Z^{-1}=3Z=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}\Longrightarrow Z=\begin{pmatrix}1/3&1\\1/3&2/3\end{pmatrix}$

Problema 1.16.3 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrr} mx+ & y= & 0\\ x+ & my= & 0\\ mx+ & my= & 0\end{array}\right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutirlo según los valores de m.

b) (0,5 puntos). Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} m&1&0\\ 1&m&0\\ m&m&0\end{array}\right)\quad \left|\begin{array}{cc} m&1\\1&m\end{array}\right|=m^2-1=0\Longrightarrow m=\pm1$$

Si $m\neq\pm1\Longrightarrow\left|\begin{array}{cc} m&1\\1&m\end{array}\right|\neq0\Longrightarrow$ Rango$(A)=2=$ nº de incógnitas y, por ser un sistema homogéneo, sería un sistema compatible determinado.

Si $m=-1$:

$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} -1&1&0\\ 1&-1&0\\ -1&-1&0\end{array}\right)$; $\left|\begin{array}{cc} 1&-1\\-1&-1\end{array}\right|=-2\neq0\Longrightarrow$ como antes sería un sistema compatible determinado.

Si $m=1$:

$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1&1&0\\ 1&1&0\\ 1&1&0\end{array}\right)$ Las tres filas son iguales y el sistema sería compatible indeterminado. $(x+y=0)$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} x=-\lambda\\ y=\lambda\end{array}\right.$$

1.16.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.16.4 *(3 puntos)*

a) (2 puntos). Discutir, según los valores de m, el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 4x+ & 3y+ & (m-1)z= & 0\\ x- & 2y+ & mz= & 1\\ 5x+ & my+ & z= & 1\end{array}\right.$$

b) (1 punto). Resolver el sistema anterior para el caso $m=1$.

Solución:

a)
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & m-1 & 0\\ 1 & -2 & m & 1\\ 5 & m & 1 & 1\end{array}\right)\quad |A|=-3m^2+24m-21=0\Longrightarrow m=1,\ \ m=7$$

Si $m\neq 1$ y $m\neq 7\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas, sería un sistema compatible determinado.
Si $m=7$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 0\\ 1 & -2 & 7 & 1\\ 5 & 7 & 1 & 1\end{array}\right);\ |A|=0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 4 & 3\\ 1 & -2\end{array}\right|=-11\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

Como
$$\left|\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 5 & 7 & 1\end{array}\right|=-24\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

Luego, en este caso, el sistema es incompatible.
Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 5 & 1 & 1 & 1\end{array}\right);\ |A|=0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 4 & 3\\ 1 & -2\end{array}\right|=-11\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

Como $F_3=F_1+F_2\Longrightarrow$Rango$(\overline{A})=2$. En este caso el sistema es compatible indeterminado.

b) para $m=1$:
$$\left\{\begin{array}{rrrl} 4x+ & 3y & = & 0\\ x- & 2y+ & z= & 1\end{array}\right.\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{3}{11}-\frac{3}{11}\lambda\\ y=-\frac{4}{11}+\frac{4}{11}\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.16.5 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{array}\right)$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular A^{15} y A^{20}

b) (1 punto). Resolver la ecuación matricial $6X=B-3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.

Solución:

a) $A^1=A$, $A^2=A\cdot A=I\Longrightarrow A^n=\left\{\begin{array}{lll} A & \text{si} & n \text{ impar}\\ I & \text{si} & n \text{ par}\end{array}\right.$
$A^{15}=A$ y $A^{20}=I$

b) $6X = B - 3AX \Longrightarrow 6X + 3AX = B \Longrightarrow (6I + 3A)X = B \Longrightarrow X = (6I + 3A)^{-1}B$

$$6I + 3A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(6I + 3A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}$$

$$X = (6I+3A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 1.16.6 *(2 puntos)* Dadas las matrices:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix}$, e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1,25 puntos). Hallar el rango de A en función de t.

b) (0,75 puntos). Calcular t para que $\det(A - tI) = 0$.

Solución:

a) $|A| = t^2 - 9t + 14 = 0 \Longrightarrow t = 7$ y $t = 2$. Si $t \neq 7$ y $t \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
Si $t = 7$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}; \ |A| = 0, \ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Si $t = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \ |A| = 0, \ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

b)

$$A - tI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - tI| = -2(-7 + t) = 0 \Longrightarrow t = 7$$

1.16.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.16.7 *(2 puntos)* Dadas las matrices: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
se pide:

a) (1 punto). Calcular la matriz inversa de L.

b) (1 punto). Buscar la matriz A, tal que $LAL^t = I$, donde L^t es la traspuesta de L.

Solución:

a) $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = L^{-1}(L^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/9 & -1/9 \\ 2/3 & -1/9 & 14/9 \end{pmatrix}$$

Problema 1.16.8 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de A, según los valores de m, e indicar para qué valores de m admite inversa la matriz A.

b) (1 punto). Sin calcular A^{-1}, hallar m para que $det(A) = det(4A^{-1})$.

Solución:

a) $|A| = -2m^2 = 0 \Longrightarrow m = 0$. Si $m \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 \Longrightarrow \exists A^{-1}$. Si $m = 0 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

b) $|4A^{-1}| = 4^3 \cdot \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{4^3}{|A|} = |A| \Longrightarrow \dfrac{4^3}{-2m^2} = -2m^2 \Longrightarrow m^4 = 2^4 \Longrightarrow m = \pm 2$

Opción B

Problema 1.16.9 *(3 puntos)*

a) (2 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{rrl} 2x+ & y = & 5 \\ x+ & my = & 7 \\ x- & y = & 4 \end{array} \right.$, en función de los valores del parámetro m y hallar la solución del sistema anterior en los casos en los que ésta sea única.

b) (1 punto). Encontrar el valor o valores de k que hacen incompatible el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & y+ & kz = & 2 \\ kx- & ky+ & 4z = & -4 \end{array} \right.$$

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5\\ 1 & m & 7\\ 1 & -1 & 4\end{array}\right)\Longrightarrow |\overline{A}|=3m+12=0\Longrightarrow m=-4$

Si $m\neq -4\Longrightarrow |\overline{A}|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(\overline{A})=3\neq$Rango$(A)\Longrightarrow$ sistema incompatible.
Si $m=-4$ como $\left|\begin{array}{cc} 2 & 1\\ 1 & -1\end{array}\right|=-3\neq 0\Longrightarrow$Rango$(\overline{A})=$Rango$(A)=2=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2x+ & y= & 5\\ x- & 4y= & 7\\ x- & y= & 4\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=3\\ y=-1\end{array}\right.$$

b) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & 2\\ k & -k & 4 & -4\end{array}\right)$ $|A_1|=0$, $|A_2|=4-k^2$, $|A_3|=-4-2k$, $|A_4|=4+2k$, $|A_5|=-4k+8$
Si $k=2\Longrightarrow |A_3|=-8\neq 0\Longrightarrow$Rango$(\overline{A})=2\neq$Rango$(A)=1\Longrightarrow$ el sistema es incompatible.
Si $k=-2\Longrightarrow |A_5|=8\neq 0\Longrightarrow$Rango$(\overline{A})=2\neq$Rango$(A)=1\Longrightarrow$ el sistema es incompatible.
Si $k\neq\pm 2\Longrightarrow$Rango$(\overline{A})=2=$Rango$(A)<$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado.

1.16.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.16.10 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} -mx+ & my+ & z= & 0\\ x- & my+ & 3z= & 4\\ 2x- & 2y- & z= & 0\end{array}\right.$$

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m=0$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m=2$.

Solución:

a)
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -m & m & 1 & 0\\ 1 & -m & 3 & 4\\ 2 & -2 & -1 & 0\end{array}\right)\quad |A|=-m^2+3m-2=0\Longrightarrow m=1,\ m=2$$

Si $m\neq 1$ y $m\neq 2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas, sería un sistema compatible determinado.
Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 3 & 4\\ 2 & -2 & -1 & 0\end{array}\right);\ |A|=0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} -1 & 1\\ 1 & 3\end{array}\right|=-4\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego, en este caso, el sistema es incompatible.
Si $m = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right); \ |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = -F_1 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A})$ =2. En este caso el sistema es compatible indeterminado.

b) para $m = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{r} z = 0 \\ x + 3z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

c) para $m = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} -2x+ & 2y+ & z = & 0 \\ x- & 2y+ & 3z = & 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -4 + 4\lambda \\ y = -4 + \frac{7}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.16.11 *(2 puntos)* Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$ y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) (1 punto). $\begin{vmatrix} 2a - 2b & c & 5b \\ 2d - 2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix}$

b) (1 punto). $\begin{vmatrix} a - 1 & b - 2 & 2c - 6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 2a - 2b & c & 5b \\ 2d - 2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 2a - 2b & b & c \\ 2d - 2e & e & f \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-5 \left(\begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 2d & e & f \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2b & b & c \\ -2e & e & f \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = -30$$

b)

$$\begin{vmatrix} a - 1 & b - 2 & 2c - 6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a - 1 & b - 2 & 2c - 6 \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} =$$

$$2\left(\begin{vmatrix} a & b & 2c \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}\right) = -12$$

Problema 1.16.12 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hallar todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con A, es decir que cumplen $AB = BA$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b & a \\ 3c+d & c \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 3a+c = 3a+b \\ 3b+d = a \\ a = 3c+d \\ b = c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 3b+d \\ b = c \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3c+d & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

1.16.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.16.13 *(3 puntos)* Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar los valores del parámetro a, para que la matriz M tenga inversa.

b) (1 punto). Hallar la inversa de M, para $a = 2$.

c) (1 punto). Resolver el sistema homogéneo $MX = O$, para $a = 1$.

Solución:

a) $|M| = 2a^2 - 5a + 3 = 0 \Longrightarrow a = 1$ y $a = 3/2$:
Si $a \neq 1$ y $a \neq 3/2 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow \exists M^{-1}$
Si $a = 1$ o $a = 3/2 \Longrightarrow |M| = 0 \Longrightarrow \nexists M^{-1}$.

b) Si $a = 2$: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Si $a = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ como } F_2=-F_1 \Longrightarrow \text{ sistema compatible indeterminado:}$$

$$\left\{\begin{array}{l} y-z=0 \\ x+2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.16.14 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z= & 1 \\ (k-1)x+ & y+ & z= & k \\ x+ & (k-1)y+ & z= & 0 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de k.

b) (1 punto). Resolverlo para $k=0$ y para $k=1$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k-1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow |A|=(k-1)(k-2)=0 \Longrightarrow k=1 \text{ y } k=2$

Si $k\neq 1$ y $k\neq 2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$\overline{A}=3=$Rango$(A)=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Si $k=1$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ como $F_1=F_2 \Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

Si $k=2$: $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$ y el sistema es incompatible.

b) Para $k=0$: $\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z= & 1 \\ -x+ & y+ & z= & 0 \\ x+ & -y+ & z= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ z=0 \end{array}\right.$

Para $k=1$: $\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z= & 1 \\ x+ & & z= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} x=-\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$

1.17. Año 2016

1.17.1. Modelo

Opción A

Problema 1.17.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & kz= & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z= & 3 \\ kx+ & 2y- & z= & 3 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de k.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $k = 2$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $k = 1$.

Solución:

a)
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ k & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) \quad |A| = -4k^2 + 6k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 1, \ k = \frac{1}{2}$$

Si $k \neq 1$ y $k \neq 1/2 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $k = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right); \ |A| = 0; \ \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{array} \right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0; \ |A_2| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right| = 0;$$

$$|A_3| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{array} \right| = 0; \ |A_4| = \left| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{array} \right| = 0$$

$\left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{array} \right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2$.
Luego Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

Si $m = 1/2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1/2 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right); \ |A| = 0; \ \left| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1/2 & 2 \end{array} \right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$\left| \begin{array}{ccc} 2 & 1/2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{array} \right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$\overline{A} = 3 \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

b) Si $k = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & 2z = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \\ 2x+ & 2y- & z = & 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1/3 \\ z = -1/3 \end{array} \right.$$

c) Si $k = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & z = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda/2 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.17.2 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular el valor o valores de λ que hacen que el determinante de la matriz $M - \lambda I$ sea igual a 0.

b) (1 punto). Para $\lambda = -1$, resolver el sistema de ecuaciones lineales: $(M - \lambda I)X = O$.

Solución:

a) $|M - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 3\lambda - 9 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \ \ \lambda = 3$

b) $M - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a este sistema homogéneo que es claramente compatible indeterminado:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

Problema 1.17.3 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resolver la ecuación matricial $AX + 3B = B(A^t + 3I)$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A.

Solución:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(BA^t + 3B - 3B) = A^{-1}BA^t =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 13 & 6 \\ 2 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

1.17.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.17.4 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos). Despeje X en la ecuación matricial $X(CD)^{-1} = A + X(D^{-1}C^{-1} - B)$, siendo A; B; C; D matrices cuadradas invertibles. Exprese X de la forma más simple posible.

b) (1,5 puntos). Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determine la matriz Y tal que $YB = A$.

Solución:

a) Vamos a aplicar la propiedad $(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$:

$$X(CD)^{-1} = A + X(D^{-1}C^{-1} - B) \Longrightarrow X(CD)^{-1} - X(D^{-1}C^{-1} - B) = A \Longrightarrow$$

$$X((CD)^{-1} - (D^{-1}C^{-1} + B) = A \Longrightarrow XB = A \Longrightarrow X = AB^{-1}$$

b) $YB = A \Longrightarrow Y = AB^{-1}$:

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -2 & 1/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.17.5 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} 3x+ & y & + & mz = & 1 \\ x- & y & + & 2z = & -2 \\ 5x+ & (m+1)y & + & 2z = & 4 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de m.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 0$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & m+1 & 2 & 4 \end{array} \right) \quad |A| = m^2 - 4 = 0 \Longrightarrow m = \pm 2$$

Si $m \neq \pm 2 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $m = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right); \ |A| = 0; \left| \begin{array}{rr} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right| = -4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0; \; |A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -28 \neq 0;$$

Luego Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A})$ y el sistema es incompatible.

Si $m = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{array} \right); \; |A| = 0; \; \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1/2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$F_3 = 2F_1 - F_2 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado.

b) Si $m = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} 3x+ & y & & = & 1 \\ x- & y & + & 2z = & -2 \\ 5x+ & y & + & 2z = & 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 7 \\ z = 7/2 \end{array} \right.$$

c) Si $m = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} 3x+ & y & + & 2z = & 1 \\ x- & y & + & 2z = & -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1/4 - \lambda \\ y = 7/4 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

1.17.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.17.6 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar los valores del parámetro a, para que se verifique la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) (1,5 puntos). Para $a = 2$, resolver la ecuación matricial $AXA^{-1} = B$.

c) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz $(2B)^{-1}$.

Solución:

a)

$$A^2 = I \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm 1$$

b) $AXA^{-1} = B \Longrightarrow X = A^{-1}BA$:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 16 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$|(2B)^{-1}| = \frac{1}{|2B|} = \frac{1}{8|B|} = \frac{1}{32}$$

Opción B

Problema 1.17.7 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} ax- & y & + & z = & 0 \\ x+ & y & + & az = & 0 \\ ax+ & 4y & + & 2z = & a \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo, si es posible, para $a = 1$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo, si es posible, para $a = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} a & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ a & 4 & 2 & a \end{array}\right) \quad |A| = -5a^2 + a + 6 = 0 \Longrightarrow a = -1, \; a = 6/5$$

Si $a \neq -1$ y $a \neq 6/5 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $a = 6/5$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 6/5 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 6/5 & 0 \\ 6/5 & 4 & 2 & 6/5 \end{array}\right); \; |A| = 0; \; \left|\begin{array}{rr} 6/5 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right| = 11/5 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0; \;\; |A_2| = \left|\begin{array}{rrr} 6/5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 6/5 & 4 & 6/5 \end{array}\right| = 66/25 \neq 0;$$

Luego Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) <$ y el sistema es incompatible.

Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right); \; |A| = 0; \; \left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{array}\right| = 5 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$F_2 = -F_1 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado.

b) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x- & y & + & z = & 0 \\ x+ & y & + & z = & 0 \\ x+ & 4y & + & 2z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

c) Si $a = -1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & y & - & z = & 0 \\ -x+ & 4y & + & 2z = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/5 + 6/5\lambda \\ y = -1/5 - 1/5\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

1.17.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.17.8 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Determine, si es posible, los parámetros α y β de modo que se verifique la igualdad:

$$\alpha\left(\begin{array}{cc} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{array}\right) + \beta\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{array}\right)^2 = \left(\begin{array}{cc} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{array}\right)$$

b) (1 punto). Determine los posibles valores de λ para que el rango de la matriz A sea 2, donde

$$A = \lambda\left(\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

Solución:

a)

$$\alpha\left(\begin{array}{cc} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{array}\right) + \beta\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc} 3\alpha + \beta & -4\alpha \\ 5\alpha + 4\beta & -\alpha + \beta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3\alpha + \beta = 3 \\ -4\alpha = -8 \\ 5\alpha + 4\beta = -2 \\ -\alpha + \beta = -5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{array}\right.$$

b)

$$A = \left(\begin{array}{cc} 2\lambda + 1 & 2\lambda \\ \lambda & 3\lambda + 1 \end{array}\right)$$

$$|A| = 4\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1, \ \lambda = -\frac{1}{4}$$

El Rango$(A) = 2$ si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq -1/4$.

Problema 1.17.9 *(2 puntos)* Cierta fundación ha destinado 247000 euros para la dotación de 115 becas de estudios. El importe de cada beca es de 3000 euros, si el estudiante cursa un grado universitario; de 2000 euros, si cursa formación profesional y de 1500 euros, si realiza estudios de postgrado. Sabiendo que la fundación ha concedido doble número de becas de formación profesional que de postgrado, ¿cuántas becas ha concedido a cada nivel de estudios?

Solución:
x : nº de becas para grado, y : nº de becas para FP y z : nº de becas para postgrado.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=115 \\ 3000x+2000y+1500z=247000 \\ y=2z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=115 \\ 6x+4y+3z=494 \\ y-2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=31 \\ y=56 \\ z=28 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.17.10 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rrcrr} 2x+ & (a-1)y & - & 2z= & a \\ 2x+ & y & - & az= & 2 \\ -x+ & y & + & z= & 1-a \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo cuando sea posible.

Solución:

a)
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|c} 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1-a \end{array}\right) \quad |A|=a^2-a-2=0 \Longrightarrow a=-1,\ \ a=2$$

Si $a\neq -1$ y $a\neq 2 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|c} 2 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right);\ |A|=0;\ \left|\begin{array}{rr} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{array}\right|=6\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$|A_1|=|A|=0;\ \ |A_2|=\left|\begin{array}{rrr} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right|=9\neq 0;$$

Luego Rango$(A)=2\neq$Rango$(\overline{A})$ y el sistema es incompatible.

Si $a=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right);\ |A|=0;\ \left|\begin{array}{rr} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right|=3\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$F_1=F_2 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado.

b) ☛ Si $a = 2$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x+ & y & - & 2z = & 2 \\ -x+ & y & + & z = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

☛ Si $a \neq -1$ y $a \neq 2$ por Cramer:

$$x = \frac{\left|\begin{array}{ccc} a & a-1 & -2 \\ 2 & 1 & -a \\ 1-a & 1 & 1 \end{array}\right|}{(a+1)(a-2)} = a;$$

$$y = \frac{\left|\begin{array}{ccc} 2 & a & -2 \\ 2 & 2 & -a \\ -1 & 1-a & 1 \end{array}\right|}{(a+1)(a-2)} = \frac{2-a}{a+1};$$

$$z = \frac{\left|\begin{array}{ccc} 2 & a-1 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1-a \end{array}\right|}{(a+1)(a-2)} = \frac{2a-1}{a+1}$$

1.18. Año 2017

1.18.1. Modelo

Opción A

Problema 1.18.1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 4 & 1 \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el rango de B en función de los valores de m.

b) (1,5 puntos) Calcular la matriz inversa de A y comprobar que verifica $A^{-1} = \frac{1}{5}(A^2 + 3C)$.

Solución:

a) $|B| = -4m^2 + 6m - 2 = 0 \Longrightarrow m = 1, \; m = 1/2$ luego si $m \neq 1$ y $m \neq 1/2 \Longrightarrow |B| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(B) = 3$.

Si $m = 1$: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $|B| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(B) = 2$.

Si $m = 1/2$: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1/2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $|B| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(B) = 2$.

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 4/5 & 1/5 \\ -1/5 & 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$A^2 - 3C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -3 & 6 & 3 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Luego $A^{-1} = \dfrac{1}{5}(A^2 + 3C)$.

Opción B

Problema 1.18.2 *(2 puntos)* A un florista le han encargado preparar 5 ramos iguales para cinco eventos. El precio total acordado es de 610 euros. Ha decidido emplear rosas, tulipanes y lilas. Cada ramo llevará un total de 24 flores y el número de rosas empleado doblará al número total de flores de otras especies. ¿Cuál es el número de flores de cada tipo que usará en cada ramo sabiendo que cada rosa cuesta 6 euros, cada tulipán cuesta 4 y cada lila 3?

Solución:

Sea x el número de rosas, y el número de tulipanes y z el número de lilas de un ramo, respectivamente.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=24 \\ x=2(y+z) \\ 6x+4y+3z=\frac{610}{5}=122 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=24 \\ x-2y-2z=0 \\ 6x+4y+3z=122 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=16 \\ y=2 \\ z=6 \end{array}\right.$$

1.18.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.18.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} 2x+ay+z=a \\ x-4y+(a+1)z=1 \\ 4y-az=0 \end{array}\right.$, se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo en función de los valores del parámetro real a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a = 1$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & 1 & a \\ 1 & -4 & a+1 & 1 \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{array}\right) \quad |A| = a^2 - 4 = 0 \Longrightarrow a = \pm 2$$

Si $a \neq \pm 2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.

Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right); \ |A| = 0; \ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0;\ \ |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 \neq 0;$$

Luego Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) <$ y el sistema es incompatible.

Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right);\ |A| = 0;\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado.

b) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y + z = 1 \\ x - 4y + 2z = 1 \\ 4y - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1/3 \\ y = 1/3 \\ z = 4/3 \end{array}\right.$$

c) Si $a = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 2y + z = 2 \\ 4y - 2z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda/2 \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.18.4 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar la matriz P^{-1}, inversa de la matriz P.

b) (1 punto). Determinar la matriz B^{-1}, inversa de la matriz $B = P^{-1}J^{-1}$.

c) (1 punto). Calcular el determinante de la matriz A^2, siendo $A = PJP^{-1}$.

Solución:

a) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $B = P^{-1}J^{-1} = (JP)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & -1/2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $|A| = |PJP^{-1}| = |P||J||P^{-1}| = |P||J|\dfrac{1}{|P|} = |J| = -2$. Luego $|A^2| = |A|^2 = (-2)^2 = 4$.

1.18.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.18.5 *(2 puntos)* En un supermercado tienen tres artículos con ofertas por la compra de una segunda unidad. La segunda unidad del artículo A tiene un descuento del 60 %, la segunda unidad del artículo B tiene un descuento del 75 %, mientras que la segunda unidad del artículo C se oferta con un descuento del 50 %. Si un cliente compra un artículo de cada clase y, por lo tanto, no se beneficia de descuento alguno, debe pagar 26 euros. Si compra dos artículos de cada clase pagará 35,20 euros. Finalmente, si no adquiere el artículo A, pagará lo mismo comprando dos unidades de B y una de C que si compra dos unidades de C y una de B. Determínese el precio de cada artículo.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=26 \\ 1,4x+1,25y+1,5z=35,20 \\ 1,25y+z=1,5z+y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=26 \\ 28x+25y+30z=704 \\ y-2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=8 \\ y=12 \\ z=6 \end{array}\right.$$

Problema 1.18.6 *(2 puntos)* Dada la matriz $\left(\begin{array}{rrr} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{array}\right)$, se pide:

a) (1 punto) Calcular su inversa.

b) (1 punto) Calcular la matriz B para que $X=\left(\begin{array}{r} -4 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)$ sea solución del sistema $A^2X=B$.

Solución:

a) $A=\left(\begin{array}{rrr} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1}=\left(\begin{array}{rrr} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right)$

b) $B=A^2X=\left(\begin{array}{rrr} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{r} -4 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{r} -17 \\ -22 \\ -53 \end{array}\right)$

Opción B

Problema 1.18.7 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & my+ & 3z= & 4 \\ x+ & y- & 2z= & -2 \\ 3x & + & (m+1)z= & m+2 \end{array}\right.,$$

, se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro real m.

b) (0,5 puntos) Resolverlo para $m=-3$.

c) (0,5 puntos) Para cierto valor de m, que hace que el sistema sea compatible, se ha obtenido una solución con $y=0$. Determinar x y z para esa solución. ¿Cuál es el valor de m?

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 3 & 4\\ 1 & 1 & -2 & -2\\ 3 & 0 & m+1 & m+2 \end{array}\right) \quad |A|=-(m^2+6m+8)=0\Longrightarrow m=-2,\quad m=-4$$

Si $m\neq -2$ y $m\neq -4\Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $m=-2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & -2 & -2\\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right); F_3=F_1+2F_2\Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Si $m=-4$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 4\\ 1 & 1 & -2 & -2\\ 3 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-3F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 4\\ 0 & 5 & -5 & -6\\ 0 & 12 & -12 & -14 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 5F_3-12F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 4\\ 0 & 5 & -5 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $m=-3$:

$$\left\{\begin{array}{l} x-3y+3z=4\\ x+y-2z=-2\\ 3x-2z=-1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=1\\ z=2 \end{array}\right.$$

c) Si $y=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+3z=4\\ x-2z=-2\\ 3x+(m+1)z=m+2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2/5\\ y=0\\ z=6/5 \end{array}\right. \Longrightarrow m=-2$$

1.18.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.18.8 *(2 puntos)* Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72 % de oro y una proporción del 16 % de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determínense las cantidades x, y, z.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=25\\ x+0,75y+0,60z=0,72\cdot 25\\ 0,15y+0,22z=0,16\cdot 25 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=25\\ 100x+75y+60z=1800\\ 15y+22z=400 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=3\\ y=12\\ z=10 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.18.9 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular la matriz $B = (A - I)(2I + 2A)$.

b) (1,5 puntos) Determinar el rango de las matrices $A - I$, $A^2 - I$ y $A^3 - I$.

c) (1 punto) Calcular la matriz inversa de A^6, en caso de que exista.

Solución:

a) $B = (A - I)(2I + 2A) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $|A - I| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A - I) = 2$.

$A^2 - I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A^2 - I) = 1$.

$A^3 - I = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $|A^3 - I| = 0$ y $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A - I) = 2$.

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par} \\ \\ \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \Longrightarrow A^6 = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^6)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.18.5. Extraordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.18.10 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y & = & 1 \\ & ty+ & z = & 0 \\ x+ & (1+t)y+ & tz = & t+1 \end{array}\right.$,

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo en función del parámetro t.

b) (0,5 puntos) Resolverlo para $t = 0$.

c) (0,5 puntos) Resolverlo para $t = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & 1+t & t & t+1 \end{array}\right) \quad |A| = t^2 - t = 0 \Longrightarrow t = 0, \quad t = 1$$

Si $t \neq 0$ y $t \neq 1 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3$ =Rango$(\overline{A})$ = n$^{\text{o}}$ de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $t = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $t = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right); F_3 = F_1 \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b) Si $t = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 1 \\ z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right.$$

c) Si $t = -1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 1 \\ -y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/2 \\ y = 1/2 \\ z = 1/2 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.18.11 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a \\ 1 & 0 & 5 & 2a \\ 0 & 2 & -4 & 2a \end{pmatrix}$, se considera la matriz B formada por las tres últimas columnas de A y se pide:

a) (1 punto) Estudiar para qué valores del parámetro real a la matriz B es invertible.

b) (1 punto) Obtener el rango de A en función de los valores del parámetro real a.

c) (1 punto) Resolver el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, en el caso $a = 0$.

Solución:

a) $|A| = 0 \Longrightarrow \nexists B^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R}$

b) Por Gauss: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a \\ 1 & 0 & 5 & 2a \\ 0 & 2 & -4 & 2a \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a \\ 0 & 1 & -2 & a \\ 0 & 2 & -4 & 2a \end{pmatrix} =$
$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a \\ 0 & 1 & -2 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$
Rango$(A) = 2\ \forall a \in \mathbb{R}$.

c) Con $a = 0$ se trata de un sistema compatible indeterminado:

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -x + 7y = 1 \\ 5y = 1 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2/5 \\ y = 1/5 \\ z = \lambda \end{cases}$$

1.19. Año 2018

1.19.1. Modelo

Opción A

Problema 1.19.1 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1,5 puntos) Obtener los valores de m para los que la matriz $A - mI$ admite inversa.

b) (1 punto) Calcular la matriz inversa de $A - 2I$.

Solución:

a) $A-mI=\begin{pmatrix} -m & 1 & 1\\ 0 & 3-m & 0\\ 0 & -1 & 3-m \end{pmatrix} \Longrightarrow |A-mI|=-m(m-3)^2=0 \Longrightarrow m=0$ y $m=3$.
Luego $\exists (A-mI)^{-1}$ si $m\in\mathbb{R}-\{0,3\}$.

b) $(A-2I)^{-1}=\begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.19.2 *(2,5 puntos)* Dada la matriz A y los vectores X y B siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ m & 1 & m+1\\ 1 & m & m \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2+m \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema lineal $AX=B$ en función de los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema lineal $AX=B$ cuando $m=-1$.

Solución:

a)
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ m & 1 & m+1 & 1\\ 1 & m & m & 2+m \end{array}\right)\quad |A|=-m(m-1)=0\Longrightarrow m=0,\quad m=1$$

Si $m\neq 0$ y $m\neq 1\Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $m=1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $m=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3-F_1 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)\Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $m=-1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1\\ -x+y=1\\ x-y-z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=2\\ z=-2 \end{array}\right.$$

1.19.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.19.3 *(2,5 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$A = \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & my & & = 1 \\ -2x- & (m+1)y+ & z = & -1 \\ x+ & (2m-1)y+ & (m+2)z = & 2+2m \end{array} \right. ,$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro m.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema en el caso $m = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 0 & 1 \\ -2 & -(m+1) & 1 & -1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 & 2+2m \end{array} \right) \quad |A| = m^2 - 1 = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$$

Si $m \neq \pm 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Si $m = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $m = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ -2x - y + z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Opción B

Problema 1.19.4 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1 punto) Obtener los valores del parámetro m para los que la matriz A admite inversa.

b) (1 punto) Para $m = 0$, calcular $A \cdot B$ y $A^{-1} \cdot B$.

c) (0,5 puntos) Calcular $B \cdot B^t$ y $B^t \cdot B$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

Solución:

a) $|A| = -(m^2 + 4m + 4) = 0 \Longrightarrow m = -2$:

- ☛ Si $m = -2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$
- ☛ Si $m \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

b) Si $m = 0$ tenemos $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- ☛ $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ☛ $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $B \cdot B^t = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (-2, 0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y

$B^t \cdot B = (-2, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (4)$

1.19.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.19.5 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular A^tA y AA^t, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

b) (1,25 puntos) Hallar A^{-1} y resolver el sistema lineal $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) (0,75 puntos) Calcular C^2, donde $C = ABA^t$.

Solución:

a) $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow AA^t = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I$ y

$$A^tA = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = I$$

b) $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$.

c) $C = ABA^t = A2IA^t = 2AA^t = 2I = B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow C^2 = 2I2I = 4I =$
$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Opción B

Problema 1.19.6 *(2,5 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$A = \left\{ \begin{array}{rrrr} 10x- & 20y- & 10z = & 8\alpha + 44 \\ 2x- & 5y+ & 3z = & 4\alpha + 4 \\ 3x- & 7y+ & 2z = & 5\alpha + 9 \end{array} \right. ,$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro real α.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $\alpha = -3$.

Solución:

a) Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|c} 10 & -20 & -10 & 8\alpha + 44 \\ 2 & -5 & 3 & 4\alpha + 4 \\ 3 & -7 & 2 & 5\alpha + 9 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ -5F_2 + F_1 \\ 10F_3 - 3F_1 \end{array}\right] =$$

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 10 & -20 & -10 & 8\alpha + 44 \\ 0 & 5 & -25 & -12\alpha + 24 \\ 0 & -10 & 50 & 26\alpha - 42 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|c} 10 & -20 & -10 & 8\alpha + 44 \\ 0 & 5 & -25 & -12\alpha + 24 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha + 6 \end{array}\right)$$

Si $2\alpha + 6 = 0 \Longrightarrow \alpha = -3 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado y si $\alpha \neq -3 \Longrightarrow$ sistema incompatible.

b) Si $\alpha = -3$:

$$\left\{\begin{array}{l} x - 2y - z = 2 \\ y - 5z = 12 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 26 + 11\lambda \\ y = 12 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

1.19.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.19.7 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \left(\begin{array}{ccc} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{array}\right)$, $X = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right)$ y $B = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 37/2 \\ 11 \end{array}\right)$ se pide:

a) (1,25 puntos) Discutir el rango de la matriz A, en función de los valores del parámetro α.

b) (0,75 puntos) Para $\alpha = 0$, calcular, si es posible, A^{-1}.

c) (0,5 puntos) Resolver, si es posible, el sistema $AX = B$, en el caso $\alpha = 1$.

Solución:

a)

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{array}\right) \quad |A| = 490(\alpha - 1) = 0 \Longrightarrow \alpha = 1$$

Si $\alpha \neq 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
Si $\alpha = 1 \Longrightarrow |A| = 0$ y $\left|\begin{array}{cc} 14 & 0 \\ 0 & 7 \end{array}\right| = 98 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

b) Si $\alpha = 0$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 2/49 & -4/49 & 1/7 \\ -3/98 & 3/49 & 1/7 \\ 3/70 & 4/35 & -1/5 \end{array}\right)$$

c) Si $\alpha = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 37/2 \\ 3 & 4 & 5 & 11 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 14F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 37/2 \\ 0 & 56 & 40 & 148 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 8F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 37/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 14x + 10z = 2 \\ 7y + 5z = 37/2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/7 - (5/7)\lambda \\ y = 37/14 - (5/7)\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.19.8 *(2,5 puntos)* Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

Solución:

x días en Francia, y días en Alemania y z días en Suiza.

$$\left\{\begin{array}{l}(20+20+8)x+(25+15+8)y+(30+25+8)z=765\\ x+y+z=15\\ x=2z\end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}48x+48y+63z=765\\ x+y+z=15\\ x-2z=0\end{array}\right. \qquad x=6,\ \ y=6,\ \ z=3$$

1.20. Año 2019

1.20.1. Modelo

Opción A

Problema 1.20.1 *(2,5 puntos)* Para cada uno de los siguientes apartados, proponga un ejemplo de matriz cuadrada A, de dimensión 3×3, con todos sus números distintos de cero y con sus tres filas y columnas diferentes, que cumpla la condición pedida.

a) (0,5 puntos) El determinante de A vale 0.

b) (0,5 puntos) El determinante de A vale 1.

c) (0,5 puntos) La matriz A coincide con su traspuesta.

d) (1 punto) Para una cierta matriz cuadrada C, distinta de la matriz nula y de la identidad, se verifica que $A\cdot C=C\cdot A$. (Debe proponer ejemplos concretos para las dos matrices A y C.)

Solución:

a) Basta con que una fila o columna sea combinación lineal de las otras dos, por ejemplo: $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&-1&5\\4&1&6\end{pmatrix}$ como $F_3=F_1+F_2\Longrightarrow |A|=0$

b) Dividiendo una fila o columna por el valor del determinante de esa matriz obtenemos una nueva matriz de determinante 1, por ejemplo: $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&-1&5\\2&1&5\end{pmatrix}$, $|B|=-15\Longrightarrow A=$ $-\frac{1}{15}\begin{pmatrix}1&2&1\\3&-1&5\\2&1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/15&-2/15&-1/15\\3&-1&5\\2&1&5\end{pmatrix}\Longrightarrow |A|=1$

c) La matriz tiene que ser simétrica, por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = A^T$

d) Bastaría con que $C = k \cdot I, , \forall k \in \mathbb{R}$, una matriz proporcional a la identidad: $A \cdot C = A \cdot k \cdot I = k \cdot I \cdot A = C \cdot A$, por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 15 & -5 & 25 \\ 10 & 5 & 25 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 15 & -5 & 25 \\ 10 & 5 & 25 \end{pmatrix}$$

Luego $A \cdot C = C \cdot A$.

Opción B

Problema 1.20.2 *(2,5 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x & -my- & z = & 0 \\ mx- & 4y+ & (6-2m)z = & -8m \\ -x+ & 2y+ & z = & 6 \end{array} \right. \text{ se pide:}$$

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema en el caso $m = 6$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & -1 & 0 \\ m & -4 & 6-2m & -8m \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right) \quad |A| = -m^2 + 8m - 12 = 0 \Longrightarrow$$

$$m = 2, \quad m = 6$$

Si $m \neq 2$ y $m \neq 6 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $m = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -16 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

Sistema Incompatible

Si $m = 6$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & -6 & -48 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 6F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & -48 \\ 0 & -4 & 0 & 6 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 8F_3+F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & -48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b) Si $m = 6$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 6y - z = 0 \\ 2y = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -9 + \lambda \\ y = -3/2 \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

1.20.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.20.3 *(2,5 puntos)*

Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; se pide:

a) (1,5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.

b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2+a-2 = 0 \Longrightarrow a = 1$ y $a = -2$. Luego si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Si $a = -2 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ y $F_3 = -F_2 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

Si $a = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

En consecuencia $\text{Rango}(A) = 3$ si $a \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$ y $\text{Rango}(A) = 2$ si $a = 1$ o $a = -2$.

b) Si $a = 0$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$|AM| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \exists (AM)^{-1}$:

$$(AM)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.20.4 *(2,5 puntos)* Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros. Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?
Solución:
Sea x el precio de un bocadillo, y el de un refresco y z el de una bolsa de patatas.

$$\begin{cases} 4x + 2y + 3z = 19 \\ x + z = 4 \\ x + y = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 19 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

1.20.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.20.5 *(2,5 puntos)* La aerolínea "Air", para uno de sus vuelos, ha puesto a la venta 12 plazas de Clase Preferente (P), a 250 euros cada una, 36 plazas de Clase Turista (T), a 150 euros cada una, y 72 plazas de Clase Económica (E), a 100 euros cada una. Se sabe que ha vendido el 90 % del total de las plazas, recaudando un importe de 13800 euros.

a) (0,25 puntos) Determine el número total de plazas vendidas.

b) (2,25 puntos) Sabiendo que se han vendido el triple de plazas de clase (T) que de clase (P), obtenga el número de billetes vendidos de cada clase y cuánto dinero se ha recaudado de cada clase.

Solución:
Sea x el número de billetes vendidos de (P), y el número de billetes vendidos de (T) y z el número de billetes vendidos de (E)

a) $12 + 36 + 72 = 120$ plazas ofertadas $\Longrightarrow 0,9 \cdot 120 = 108$ plazas vendidas.

b) $\begin{cases} 250x + 150y + 100z = 13800 \Longrightarrow 5x + 3y + 2z = 276 \\ x + y + z = 108 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 108\\ 3 & -1 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 2 & 276\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2-3F_1\\ F_3-5F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 108\\ 0 & -4 & -3 & -324\\ 0 & -2 & -3 & -264\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 2F_3-F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 108\\ 0 & -4 & -3 & -324\\ 0 & 0 & -3 & -204\end{array}\right)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=10\\ y=30\\ z=68\end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.20.6 *(2,5 puntos)*

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4\\ 1 & m & 2\\ m & 2 & 1\end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular los valores de $m\in\mathbb{R}$ para los cuales B no tiene inversa.

b) (1 punto) Para $m=1$, calcular la inversa de la matriz B.

c) (1 punto) Para $m=2$, calcular la matriz producto A^tB (donde A^t denota la matriz traspuesta de A) y el determinante de la matriz A^2B.

Solución:

a) $|B|=4(2-m^2)=0\Longrightarrow m=\pm\sqrt{2}$, para estos valores la matriz B no es invertible.

b) Si $m=1\Longrightarrow B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\Longrightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} -3/4 & 2 & -1\\ 1/4 & -1 & 1\\ 1/4 & 0 & 0\end{pmatrix}$

c) Para $m=2\Longrightarrow B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$

$$A^tB=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7\\ 2 & 2 & 5\\ -4 & -6 & -1\end{pmatrix}$$

$$|A^2B|=|A^2||B|=|A|^2|B|=2^2(-8)=-32$$

1.20.4. Ordinaria-Valencia

Incluyo el examen de Valencia por la expectación generada con éste.

Opción A

Problema 1.20.7 Se dan la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a\\ -2 & a+1 & 2\\ -3 & a-1 & a\end{pmatrix}$ y que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2=\frac{1}{3}I-2B$,siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (2+2 puntos) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a=1$.

b) (3 puntos) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\\ 2\\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a=-1$.

c) (3 puntos) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1}=mB+nI$.

Solución:

a) $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & a\\ -2 & a+1 & 2\\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix}=2(a^2+2a+1)=0 \Longrightarrow a=-1$. Luego si $a\neq -1 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=3$.

Si $a=-1 \Longrightarrow |A|=0$ y $\begin{vmatrix} -2 & 0\\ -3 & -2 \end{vmatrix}=4\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=2$.

Si $a=1 \Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $|A|=8 \Longrightarrow |2A^{-1}|=2^3\dfrac{1}{|A|}=\dfrac{8}{8}=1$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\\ 2\\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1\\ -2 & 0 & 2 & 2\\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right)=$

$=\begin{bmatrix} F_1\\ F_2+2F_1\\ F_3+3F_1 \end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x=-1+\lambda\\ y=\dfrac{3}{2}-2\lambda\\ z=\lambda \end{cases}$

c) $B^2=\frac{1}{3}I-2B \Longrightarrow 3(B^2+2B)=I \Longrightarrow B(3B+6I)=I \Longrightarrow$

$B^{-1}=3B+6I$, luego B es invertible con $m=3$ y $n=6$.

Opción B

Problema 1.20.8 Se da el sistema $\begin{cases} x+ & y+ & z= & 4\\ 3x+ & 4y+ & 5z= & 5\\ 7x+ & 9y+ & 11z= & \alpha \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (4 puntos) Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible.

b) (4 puntos) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible.

c) (2 puntos) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente.

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4\\ 3 & 4 & 5 & 5\\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1\\ F_2-3F_1\\ F_3-7F_1 \end{bmatrix}=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & \alpha-28 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3-2F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-14 \end{array}\right)$$

Si $\alpha = 14$ el sistema es compatible indeterminado y si $\alpha \neq 14$ el sistema sería incompatible. Como $|A| = 0$ para cualquier valor de α el sistema nunca sería compatible determinado.

Si $\alpha = 14 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & 4 \\ 3x+ & 4y+ & 5z = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 11+\lambda \\ y = -7-2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$

Si cambiamos 11 por a: $A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & a \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = a - 11 = 0 \Longrightarrow$ el único valor que anula el determinate es $a = 11$ luego para cualquier otro valor, como es el caso, $|A| \neq 0$ el sistema sería compatible determinado.

1.20.5. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.20.9 *(2,5 puntos)*

Dado el sistema de ecuaciones $A = \left\{\begin{array}{rrrr} kx+ & (k+1)y+ & z = & 0 \\ -x+ & ky- & z = & 0 \\ (k-1)x- & y & = & -(k+1) \end{array}\right.$; se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $k = -1$.

Solución:

a) $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} k & k+1 & 1 & 0 \\ -1 & k & -1 & 0 \\ k-1 & -1 & 0 & -(k+1) \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -2k^2+2 = 0 \Longrightarrow k = \pm 1$. Luego

- ☛ Si $k \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$\overline{A}$ =nº de incógnitas$\Longrightarrow$ SCD.
- ☛ Si $k = 1$:
  $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2+F_1 \\ F_3 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) =$
  $\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3+F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Luego se trata de un sistema incompatible. (SI)
- ☛ Si $k = -1$: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ Luego se trata de un sistema homogéneo y $|A| = 0 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado. (SCI)

b) Si $k = -1$: $\left\{\begin{array}{r} -x+z = 0 \\ -x-y-z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$

Opción B

Problema 1.20.10 *(2,5 puntos)*

Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; se pide:

a) (1 punto) Calcular para qué valores $a \in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.

b) (0,75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.

c) (0,75 puntos) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) $A^2 - I = 2A$:

$$\begin{pmatrix} a^2-2a+2 & 2 \\ 2 & a^2+2a+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a & 2 \\ 2 & 2+2a \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2-2a+1 = 2-2a \Longrightarrow a = \pm 1 \\ a^2+2a+1 = 2+2a \Longrightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

b) $|A| = -a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} -(a+1) & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a+1}{a^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{a-1}{a^2} \end{pmatrix}$$

c) $|(AA^t)^2| = |(AA^t)|^2 = |(AA^t)||(AA^t)| = |A||A^t||A||A^t| = |A||A||A||A| = |A|^4 = (-a^2)^4 = a^8$

1.21. Año 2020

1.21.1. Modelo

Opción A

Problema 1.21.1 *(2,5 puntos)* Se quiere construir un invernadero para el cultivo de semillas con ambiente controlado de temperatura, humedad y composición del aire. El aire que hay que suministrar debe contener un 78 % de nitrógeno, un 21 % de oxígeno y un 1 % de argón.

a) (0,5 puntos) Si la capacidad del invernadero es 2000 litros, determine cuántos litros de nitrógeno, cuántos de oxígeno y cuántos de argón son necesarios.

b) (2 puntos) Para suministrar el aire se dispone de tres mezclas gaseosas A, B y C, cuya composición se expresa en la tabla adjunta. Obtenga la cantidad que hay que utilizar de cada mezcla para llenar el invernadero de aire con la composición requerida.

Mezcla	Nitrógeno	Oxígeno	Argón
A	80 %	20 %	0 %
B	70 %	20 %	10 %
C	60 %	40 %	0 %

Solución:

a) Se necesitan: de nitrógeno $2000 \cdot 0,78 = 1560$ l, de oxígeno $2000 \cdot 0,21 = 420$ l y de argón $2000 \cdot 0,01 = 20$ l.

b) Se x el nº litros de mezcla A, y el nº litros de mezcla B y z el nº litros de mezcla C.

$$\left\{\begin{array}{l} 0,8x + 0,7y + 0,6z = 1560 \\ 0,2x + 0,2y + 0,4z = 420 \\ 0,1y = 20 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1700 \\ y = 200 \\ z = 100 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.21.2 *(2,5 puntos)* Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro t.

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema $AX = B$, para los valores de t que lo hagan compatible y determinado.

Solución:

a) Por Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & -2t \\ 0 & t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 0 & -2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

Si $t = 0$ el Rango$(A) = 1$ y si $t \neq 0$ el Rango$(A) = 2$.

b) El sistema es compatible determinado si Rango(A) =Rango$(\overline{A})$ =nº de incógnitas$= 2 \Longrightarrow t \neq 0$ por el apartado anterior. Por Gauss:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 5 & 10+3t & 9 \\ -1 & -2 & 3t+3 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 5F_1 \\ F_3 + F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & -2t & -6 \\ 0 & t & 3t+6 \end{array}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2+t & 3 \\ 0 & -2t & -6 \\ 0 & 0 & 6t+6 \end{array}\right) \Longrightarrow 6t + 6 = 0 \Longrightarrow t = -1$$

El sistema sería:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = 3 \\ 2y = -6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 6 \\ y = -3 \end{array}\right.$$

1.21.2. Ordinaria

Opción A

Problema 1.21.3 *(2,5 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x+ay+z=a+1 \\ -ax+y-z=2a \\ -y+z=a \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $a=0$.

Solución:

a) $\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{array}\right)$; $|A|=a(a+1)=0 \Longrightarrow a=0$ y $a=-1$.

- ☛ Si $a\in\mathbb{R}-\{0,-1\} \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(A)=$ n$^{\underline{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ *SCD*: Sistema compatible determinado, solución única.
- ☛ Si $a=-1$:
$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2-F_1 \\ F_3 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)=$
$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Longrightarrow$ *SI*: sistema incompatible, no tiene solución.
- ☛ Si $a=0$:
$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3+F_2 \end{array}\right]=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$ *SCI*: sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

b) Si $a=0$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+z=1 \\ y-z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.21.4 *(2,5 puntos)* Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275,8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63,6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

Solución:
Sea x el precio del kg de doradas, y el precio del kg de lubinas y z el precio del kg de rodaballos.

$$\left\{\begin{array}{l} 1374000x + 23440000y + 7400000z = 275800000 \\ 7400000z = 63600000 \\ x = 0,11 + y \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 5,7767 \text{ euros/kg} \\ y = 5,6667 \text{ euros/kg} \\ z = 8,5945 \text{ euros/kg} \end{array}\right.$$

1.21.3. Ordinaria-Coincidente

Opción A

Problema 1.21.5 *(2,5 puntos)* Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{c} (k+1)x + 3y + kz = 1 \\ 3x + (k+1)y + 2z = k-1 \\ kx + 2y + kz = 2 \end{array}\right. ,$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro real k.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema para $k = -3$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} k+1 & 3 & k & 1 \\ 3 & k+1 & 2 & k-1 \\ k & 2 & k & 2 \end{array}\right); \quad |A| = k^2 - 4 = 0 \Longrightarrow k = \pm 2$$

- ☛ Si $k \neq \pm 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $k = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) = \left[\ F_1 = F_2\ \right] \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

- ☛ Si $k = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 2F_2 \end{array}\right] == \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

b) Si $k = -3$:

$$\left\{\begin{array}{l} -2x + 3y - 3z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = -4 \\ -3x + 2y - 3z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{array}\right.$$

Opción B

Problema 1.21.6 *(2,5 puntos)* Sean $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y A una matriz que verifica $AB = BC$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de A.

b) (1 punto) Calcular BCB^{-1}.

c) (1 punto) Encontrar el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tal que $BC\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) $|AB| = |BC| \Longrightarrow |A||B| = |B||C| \Longrightarrow |A| = |C| = 6$

b)

$$BCB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

c) $BC\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.21.4. Extraordinaria

Opción A

Problema 1.21.7 *(2,5 puntos)* Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1, 1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3, 4)$, y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:

a) (0,5 puntos) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.

b) (0,5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.

c) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.

d) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.

e) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

Solución:

Tenemos $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ a & b & c & d\end{pmatrix}$ con $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ y $d\neq 0$.

a) Hacemos $F_3=5F_1-F_2\Longrightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

b) Hacemos $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$ con $|A_1|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 2\end{vmatrix}=-1\neq 0\Longrightarrow$ las tres filas son linealmente independientes.

c) Tomamos la matriz anterior y tenemos:
$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 3 & 2 & 2\end{array}\right)$ $|A_1|=-1\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A_1)=3=\text{Rango}(A)=\text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas$\Longrightarrow$
Sistema Compatible determinado.

d) Tomamos la matriz del primer apartado: (Por Gauss)

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-3F_1\end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2 & -3\end{array}\right)=$$

$$\begin{bmatrix} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado.

e) A la matriz anterior le cambiamos el último valor de la tercera fila: (Por Gauss)

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 2\end{array}\right)=\begin{bmatrix} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-3F_1\end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{array}\right)=$$

$$\begin{bmatrix} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{bmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema Incompatible.

Opción B

Problema 1.21.8 *(2,5 puntos)* Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1 puntos) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.

b) (0,5 puntos) Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.

c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $C = A^2 - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $BB^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$|BB^t| = 0 \Longrightarrow |D| = |ABB^t| = |A||BB^t| = 0$

1.22. Año 2021

1.22.1. Modelo

Opción A

Problema 1.22.1 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x-1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y
$B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales A tiene inversa.

b) (1 punto) Para $x = -1$, calcular la inversa de A.

c) (1 punto) Para $x = 1$, hallar $(AB^t)^3$ y $(AB^t)^{2020}$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

Solución:

a) $|A| = x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2 \Longrightarrow \exists A^{-1}\ \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm 2\}$.

b) Si $x = -1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

c) Si $x = 1 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$C = AB^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1 & 2/3 \\ -1/3 & 0 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$C^{2020} = (C^3)^{673} \cdot C = (-I)^{673} \cdot C = -C = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Opción B

Problema 1.22.2 *(2,5 puntos)* Dados la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix}$ y el vector $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determine el valor o valores de a para los que:

a) (1,5 puntos) El sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$ no tenga solución.

b) (1 punto) $A = A^{-1}$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & -3 & a & 1 \\ a-1 & -3 & a & 2 \end{array}\right); \quad |A| = 3 - a = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- ☛ Si $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- ☛ Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 = F_2 \\ F_2 = F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 3F_3 - 2F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 4 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + 3F_2 \end{bmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) $A = A^{-1} \Longrightarrow A^2 = I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elegimos del producto la segunda fila de la primera matriz por la segunda columna de la segunda matriz y tiene que dar uno:

$$a + 9 - 3a = 1 \Longrightarrow a = 4$$

Como sólo da un valor este debe de ser único. Comprobamos que con este valor se cumple el enunciado:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$