REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

3.2. Dada la función: $f(x)=\dfrac{3x}{2-x}$

a) Determinar su dominio de existencia y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcular sus asíntotas y extremos.

c) Determina sus intervalos de concavidad y convexidad

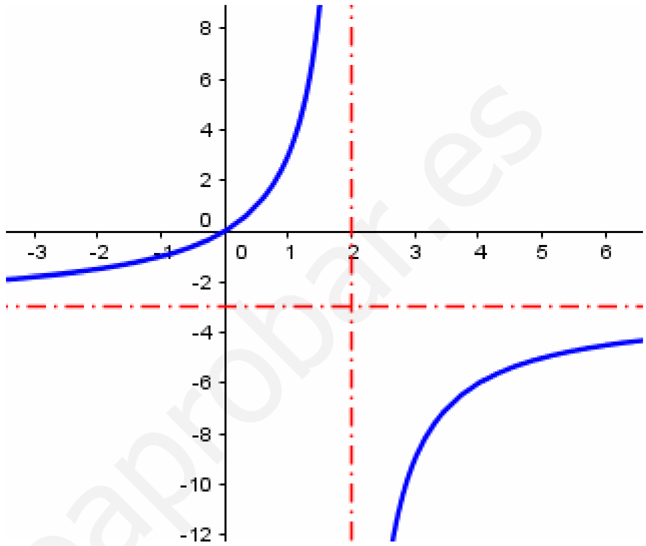
d) Representa gráficamente la función

a) Dom f = $\mathbb{R}-\{2\}$

$$f'(x)=\frac{3(2-x)+3x}{(2-x)^2}=\frac{6}{(2-x)^2}>0\ \ \forall x\in \text{Dom}(f)$$

La función es creciente en todo su dominio

No tiene extremos.



b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x}{2-x}=-\infty \qquad \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x}{2-x}=+\infty \ \to x = 2$ A.V.

$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x}{2-x}=-3 \ \to y = -3$ A.H.

$$f(x)+3=\frac{6}{2-x}\begin{cases}>0 \ \text{ si } \ x\to-\infty \text{ (por encima)}\\ <0 \ \text{ si } \ x\to+\infty \text{ (por debajo)}\end{cases}$$

c) $f'(x)=\dfrac{6}{(2-x)^2}\ \to\ f''(x)=\dfrac{12}{(2-x)^3}$

- Si $x<2 \to f''(x)>0 \to$ f cóncava en $(-\infty,2)$
- Si $x>2 \to f''(x)<0 \to$ f convexa en $(2,+\infty)$

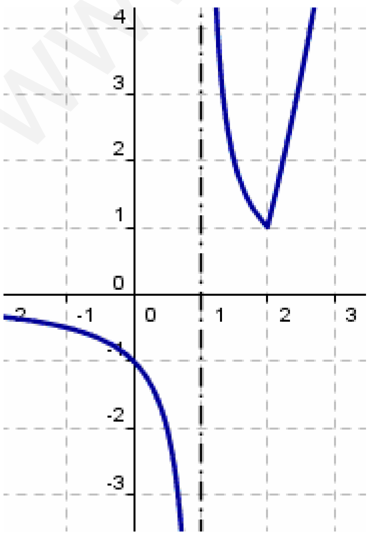
No hay P.I.

3.8. Representa las siguientes funciones, calculando previamente su dominio:

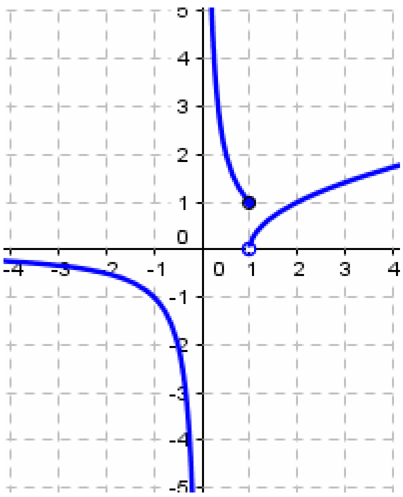
a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x<2\\ x^2-3 & x\geq 2\end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } \ x\leq 1\\ \sqrt{x-1} & \text{si } \ x>1\end{cases}$

SOLUCIÓN

a) Dom f = $\mathbb{R}-\{1\}$



b) Dom f = $\mathbb{R}-\{0\}$



3.12.- Dibuja aproximadamente la gráfica de la función $y = \dfrac{x}{x^2-4}$ calculando su dominio de definición, sus asíntotas, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión.

<u>*SOLUCIÓN*</u>

a) Dom f = $\mathbb{R} - \{\pm 2\} \quad \left(x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 4 \neq 0\right)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2-4} = 0 \Rightarrow y = 0$ A.H. $\rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \text{ si } x \to +\infty \text{ (por encima)} \\ f(x) < 0 \text{ si } x \to -\infty \text{ (por debajo)} \end{cases}$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x}{x^2-4} = \infty \begin{cases} x \to 2^+ \Rightarrow f(x) \to +\infty \\ x \to 2^- \Rightarrow f(x) \to -\infty \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ A.V.}$$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x}{x^2-4} = \infty \begin{cases} x \to -2^+ \Rightarrow f(x) \to +\infty \\ x \to -2^- \Rightarrow f(x) \to -\infty \end{cases} \Rightarrow x = \text{-}2 \text{ A.V.}$$

c) $y = \dfrac{x}{x^2-4} \Rightarrow y' = \dfrac{x^2-4-x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$

$y' = -\dfrac{x^2+4}{(x^2-4)^2} \Rightarrow$ f es siempre decreciente $\Rightarrow$ No tiene máximo ni mínimo

$$y'' = -\frac{2x(x^2-4)^2 - (x^2+4)\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4} = -\frac{2x(x^2-4) - (x^2+4)\cdot 2\cdot 2x}{(x^2-4)^3} = \frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3}$$

$y'' = \dfrac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3} = 0 \Rightarrow 2x(x^2+12) = 0$ si $x = 0$

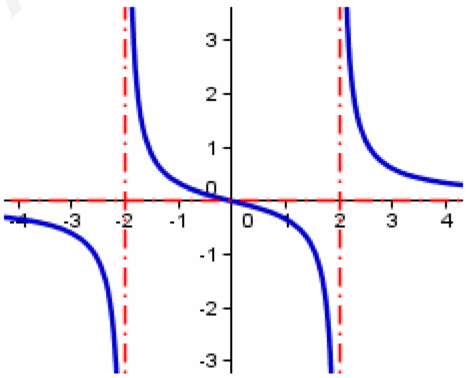
$x < -2 \Rightarrow x^2 - 4 > 0,\ x < 0 \Rightarrow y'' < 0 \Rightarrow$ f convexa

$-2 < x < 0 \Rightarrow x^2 - 4 < 0,\ x < 0 \Rightarrow y'' > 0 \Rightarrow$ f cóncava

$0 < x < 2 \Rightarrow x^2 - 4 < 0,\ x > 0 \Rightarrow y'' < 0 \Rightarrow$ f convexa

$X > 2 \Rightarrow x^2 - 4 > 0,\ x > 0 \Rightarrow y'' > 0 \Rightarrow$ f cóncava

Por tanto, x = 0 P.I.



3.13.- Sea la función $f(x) = \dfrac{3x^3}{x^2-4}$, calcula las asíntotas de la función.

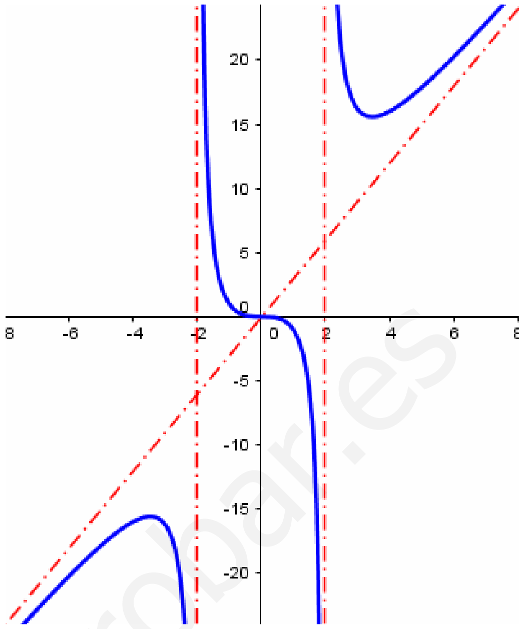
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{3x^3}{x^2-4} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{3x^3}{x^2-4} = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow x = -2 \text{ A.V.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x^3}{x^2-4} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x^3}{x^2-4} = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow x = 2 \text{ A.V.}$$

$$\frac{3x^3}{x^2-4} = 3x + \frac{12x}{x^2-4} \Rightarrow y = 3x \text{ A.O.}$$

Posición:

$$\begin{cases}\text{Si } x \to +\infty \Rightarrow \dfrac{12x}{x^2-4} > 0 \\ \text{Si } x \to -\infty \Rightarrow \dfrac{12x}{x^2-4} < 0\end{cases}$$



3.14.- Dada la función $f(x) = x^4 e^{-x}$

a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Halla, si existen, los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

c) Dibuja aproximadamente su gráfica.

<u>*SOLUCIÓN*</u>

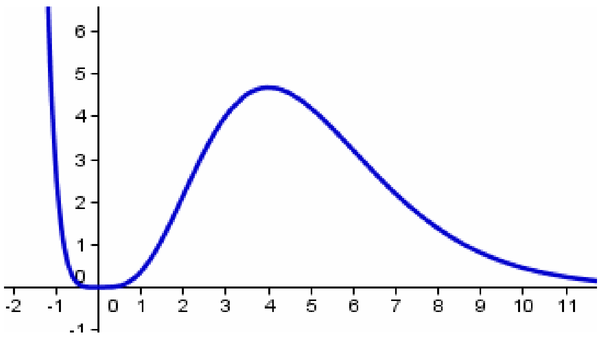
a) $f'(x) = 4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x} = x^3 (4 - x) e^{-x}$

$f'(x) = 0$ si $x = 0$, $x = 4$

$f'(x) > 0$ si $x < 0$, $x > 4 \Rightarrow$ f decreciente

$f'(x) < 0$ si $0 < x < 4 \Rightarrow$ f creciente

b) Máximo en $x = 0$, mínimo en $x = 4$



$f'(x) = (4x^3 - x^4)\, e^{-x}$

$f''(x) = (12x^2 - 4x^3)\, e^{-x} - (4x^3 - x^4)\, e^{-x} = (x^4 - 8x^3 + 12x^2)\, e^{-x}$

$f''(x) = 0$ si $x^4 - 8x^3 + 12x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 8x + 12) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2,\ x = 6$

$f''(x) > 0$ si $x < 2$, $x > 6$

$f''(x) < 0$ si $2 < x < 6$

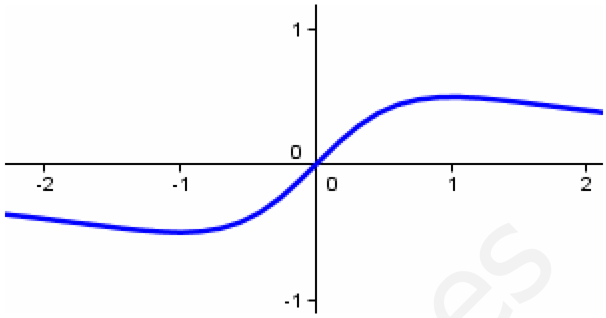
La función tiene dos P.I. en $x = 2$, $x = 6$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{e^x} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4e^{-x} = \lim\limits_{-x\to+\infty} x^4e^{-x} = +\infty$

3.16.- Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

a) Halla sus asíntotas, máximos y mínimos

b) Representa gráficamente la función.



Asíntotas:

Dom f = $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ No existen asíntotas verticales

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0 \text{ A.H.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{x^2+1}}{x}\right) = 0 \;\Rightarrow \text{No hay A.O.}$$

Máximos y mínimos:

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ si } x = 1,\ x = -1$$

$-1 < x < 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f creciente

$x < -1$ y $x > 1$ $f'(x) < 0 \Rightarrow$ f decreciente

Luego, $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ máximo , $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$ mínimo

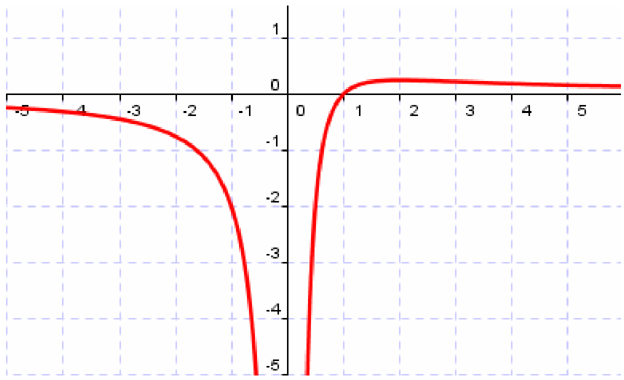
3.18.- Se considera la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$

a) Determina el dominio de definición y calcula las asíntotas.

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad de la función

c) Halla, si existen, sus máximos y mínimos y puntos de inflexión.

d) Representa aproximadamente la gráfica de la función.



a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow x = 0$ AV

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2} = \infty \Rightarrow \begin{cases} x \to 0^- \Rightarrow f(x) \to -\infty \\ x \to 0^+ \Rightarrow f(x) \to -\infty \end{cases}$$

b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2} \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{x^2-(x-1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2x-x^2}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}$$

	$-\infty$ 0	0 2	2 $+\infty$
x	–	+	+
2 – x	+	+	–
f ´(x)	–	+	–

f es decreciente en $(-\infty,0) \cup (2, +\infty)$

f creciente en (0,2)

Máximo en x = 2 $\rightarrow$ Punto: $\left(2, \dfrac{1}{4}\right)$

$$f''(x) = \frac{-x^3-(2-x)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-x^3-(2-x)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2x-6}{x^4} = 0 \Rightarrow x = 3$$

$x^4 > 0 \rightarrow$ f convexa si $x < 3$ y cóncava si $x > 3$ $\rightarrow$ P.I. en x = 3 $\rightarrow$ $\left(3, \dfrac{2}{9}\right)$

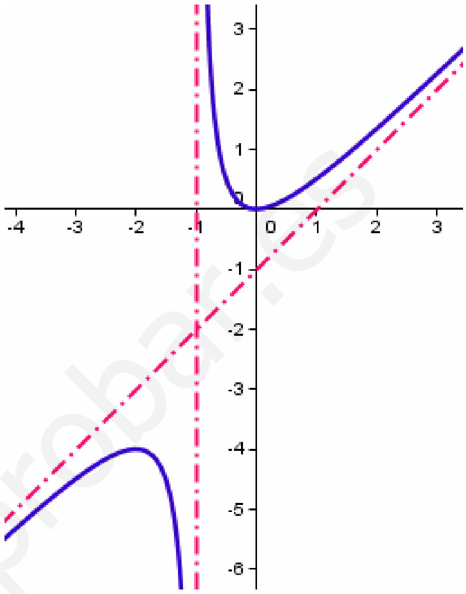
3. 21.- Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$

a) Determina las asíntotas de la función.

b) Halla, si existen, sus máximos y mínimos y puntos de inflexión.

c) Representa aproximadamente la gráfica de la función.

SOLUCIÓN



a) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$

Dom f = $\mathbb{R}-\{1\}$ $\rightarrow$ La función sólo es discontinua en x = 1:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2}{x+1}=\infty \Rightarrow \begin{cases} x\to -1^- \Rightarrow f(x)\to +\infty \\ x\to -1^+ \Rightarrow f(x)\to -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ AV}$$

No existen asíntotas horizontales ya que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$

Efectuando el cociente:

$$f(x)=\frac{x^2}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1} \quad \Rightarrow y = x - 1 \text{ A.O.}$$

b) $f'(x)=\dfrac{2x(x+1)-x^2}{(1+x)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -2$

Estudiamos el crecimiento: $f'(x) > 0$ si $x(x + 2) > 0$

$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
x	–	–	–	+
x + 2	–	+	+	+
f ´(x)	+	–	–	+

f es creciente en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

f decreciente en $(-2,-1)\cup(-1,0)$

Por tanto, (0, 0) mínimo y (-2, -4) máximo

$$f''(x)=\frac{(2x+2)(1+x)^{\cancel{2}}-(x^2+2x)\cdot 2\cancel{(1+x)}}{(1+x)^{\cancel{4}3}}=\frac{(2x+2)(1+x)^{\cancel{2}}-(x^2+2x)\cdot 2}{(1+x)^{\cancel{4}3}}=\frac{2}{(1+x)^3}$$

$f''(x) < 0$ si $x < -1 \rightarrow$ f convexa $\quad f''(x) > 0$ si $x > -1 \rightarrow$ f cóncava

No tiene puntos de inflexión.