

## Energía mecánica y rozamiento

11) En una feria nos subimos a una "Barca Vikinga" que oscila como un columpio. Si en el punto más alto estamos 12 m por encima del punto más bajo y no hay pérdidas de energía por rozamiento. Calcula:

a) ¿A qué velocidad pasaremos por el punto más bajo?

(Resultado:  $v = 15.3 \text{ m/s}$ )

b) ¿A qué velocidad pasaremos por el punto que está a 6 m por encima del punto más bajo?

(Resultado:  $v = 10.8 \text{ m/s}$ )

12) Una maleta de 25 kg que estaba en reposo desciende por un plano inclinado  $40^\circ$  respecto a la horizontal. Calcular

a) La energía cinética cuando ha recorrido 20 m de rampa descendiendo sin rozamiento.

(Resultado: 3136 J)

b) La energía cinética cuando ha recorrido 20 m de rampa descendiendo con un coeficiente de rozamiento de 0,12.

(Resultado: 2685,8 J)

13) Se lanza un carro de 15 kg hacia arriba por una rampa inclinada  $20^\circ$  con una velocidad de 10 m/s. Si cuando se detiene ha perdido el 30% de su energía mecánica debido al rozamiento, calcula:

a) El trabajo de rozamiento.

(Resultado:  $W_{\text{roz}} = -225 \text{ J}$ )

b) La distancia que recorre hasta detenerse.

(Resultado:  $d = 3,5 \text{ m}$ )

14) Sobre una superficie horizontal lanzamos una masa de 5 kg a una velocidad de 8 m/s. Calcular a qué distancia se detendrá si desliza con un coeficiente de rozamiento  $\mu = 0,15$

(Resultado:  $d = 21,8 \text{ m}$ )

15) En un parque acuático, una persona de 80 kg se va a lanzar por un tobogán de agua. Para llegar a lo alto del tobogán, sube por la escalera hasta la plataforma que está a 25 m de altura.

a) Explica de dónde proviene su energía y en qué se convierte desde que empieza a subir hasta que llega abajo.

b) Calcula a qué velocidad entrará al agua cuando se lance, si la pendiente del tobogán es de  $30^\circ$  y su coeficiente de rozamiento es  $\mu = 0,2$ .

(Resultado:  $v = 17,9 \text{ m/s}$ )

c) Calcula la potencia empleada en subir a la plataforma si tarda 2 minutos y medio.

(Resultado:  $P = 131 \text{ W}$ )

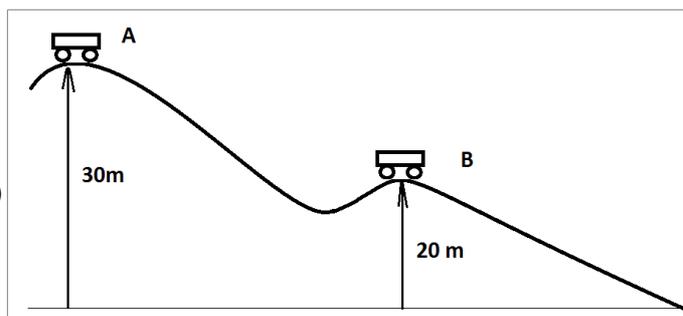
16) Un carro de 50 kg desliza por una montaña rusa como la de la figura. Si en el punto A su velocidad es de 5 m/s y en el punto B es de 3,2 m/s, calcula:

a) La energía mecánica en A y en B

(Resultado:  $E_A = 15625 \text{ J}$ ,  $E_B = 10256 \text{ J}$ )

b) El trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento entre los puntos A y B

(Resultado:  $W_{\text{roz}} = 5369 \text{ J}$ )



17) Un niño de 30 kg desliza desde el reposo por un tobogán inclinado  $35^\circ$ . Si el tobogán tiene 2 m de altura y el coeficiente de rozamiento es  $\mu = 0,15$ , calcula:

a) Las pérdidas de energía por trabajo de rozamiento.

(Resultado:  $W_{\text{roz}} = -128,6 \text{ J}$ )

b) A qué velocidad llegará a la base del tobogán.

(Resultado:  $v = 5,6 \text{ m/s}$ )

Dejamos caer una caja colgada de una cuerda desde 3 m de altura como en el dibujo.

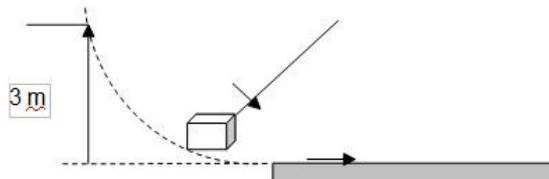
Calcula:

a) ¿A qué velocidad pasaremos por el punto más bajo?

(Resultado:  $v = 7,67 \text{ m/s}$ )

b) ¿Qué distancia se deslizará en horizontal si la masa es de 60 kg y el coeficiente de rozamiento es  $\mu = 0,15$ ?

(Resultado:  $e = 20 \text{ m}$ )

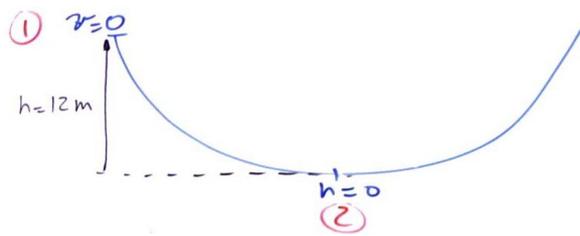


19) Lanzamos una masa de 70 kg con una velocidad de 10 m/s por una superficie horizontal que tiene un coeficiente de rozamiento  $\mu = 0,15$ . Calcular la distancia que recorrerá hasta detenerse.

(Resultado:  $d = 33,3 \text{ m}$ )

En una feria nos subimos a una "Barca Vikinga" que oscila como un columpio. Si en el punto más alto estamos 12 m por encima del punto más bajo y no hay pérdidas de energía por rozamiento. Calcula:

- a) ¿A qué velocidad pasaremos por el punto más bajo? (Resultado:  $v = 15.3 \text{ m/s}$ )  
 b) ¿A qué velocidad pasaremos por el punto que está a 6 m por encima del punto más bajo? (Resultado:  $v = 10.8 \text{ m/s}$ )



En el punto 1  $\begin{cases} v = 0 \\ h = 12 \text{ m} \end{cases}$

En el punto 2  $\begin{cases} v \rightarrow \text{desconocida} \\ h = 0 \end{cases}$

Suponemos que no hay rozamiento

Por conservación de la energía, la energía mecánica debe ser la misma en ① y en ② (al no haber rozamiento)

$$E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2}$$

$$\frac{1}{2} m \cdot 0^2 + mgh_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + m \cdot g \cdot 0$$

$$m g h_1 = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$2 \cdot g h_1 = v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 12} = 15,3 \text{ m/s} = 55 \text{ km/h}$$

En el punto 3  $\begin{cases} v \rightarrow \text{desconocida} \\ h = 6 \text{ m} \end{cases}$

Por conservación de la energía, la energía mecánica debe ser la misma en ① y en ③

$$E_{c1} + E_{p1} = E_{c3} + E_{p3}$$

$$\frac{1}{2} m \cdot 0^2 + mgh_1 = \frac{1}{2} m v_3^2 + m \cdot g \cdot h_3$$

$$m g (h_1 - h_3) = \frac{1}{2} m v_3^2$$

$$2 \cdot g (h_1 - h_3) = v_3^2$$

$$v_3 = \sqrt{2g(h_1 - h_3)} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot (12 - 6)} = 10,8 \text{ m/s}$$

Una maleta de 25 kg que estaba en reposo desciende por un plano inclinado  $40^\circ$  respecto a la horizontal. Calcular

a) La energía cinética cuando ha recorrido 20 m de rampa descendiendo sin rozamiento.

(Resultado: 3136 J)

b) La energía cinética cuando ha recorrido 20 m de rampa descendiendo con un coeficiente de rozamiento de 0,12.

(Resultado: 2685,8 J)

Funciones y parámetros

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

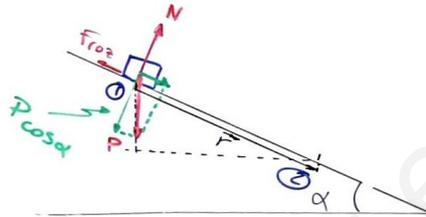
$$W_{f_{roz}} = \vec{F}_{f_{roz}} \cdot \vec{r} = \mu \cdot N \cdot r \cdot \cos \theta$$

$$m = 25 \text{ kg}$$

$$r = 20 \text{ m}$$

$$\alpha = 40^\circ$$

$$v_0 = 0$$



a) Por conservación de la energía,  $E_{m_1} = E_{m_2}$

En el punto 1,  $h_1 = r \sin \alpha = 20 \sin 40^\circ = 12,8 \text{ m}$  y  $v_1 = 0$

$$E_{m_1} = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 0^2 + 25 \cdot 9,8 \cdot 12,8 = 0 + 3136 = 3136 \text{ J}$$

En el punto 2,  $h_2 = 0$  y  $v_2$  es desconocida

$$E_{m_2} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot v^2 + 25 \cdot 9,8 \cdot 0 = 12,5 v^2$$

Por tanto  $E_{m_1} = E_{m_2}$

$$3136 \text{ J} = 12,5 v^2$$

Por tanto,  $E_{c_2} = 3136 \text{ J}$

b) Como hay rozamiento  $E_{m_1} - W_{f_{roz}} = E_{m_2}$

$$N = P \cos \alpha = 25 \cdot 9,8 \cdot \cos 40 = 187,6 \text{ N}$$

$$W_{f_{roz}} = \mu N r \cos \alpha = 0,12 \cdot 187,6 \cdot 20 \cdot \cos 180 = -450,2 \text{ J}$$

$$3136 - 450,2 = E_{m_2} = 2685,8 \text{ J}$$

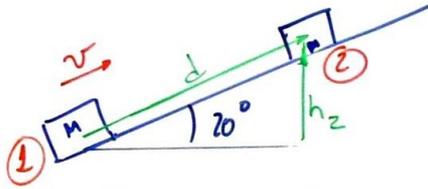
13) Se lanza un carro de 15 kg hacia arriba por una rampa inclinada  $20^\circ$  con una velocidad de 10 m/s. Si cuando se detiene ha perdido el 30% de su energía mecánica debido al rozamiento, calcula:

a) El trabajo de rozamiento.

(Resultado:  $W_{roz} = -225 \text{ J}$ )

b) La distancia que recorre hasta detenerse.

(Resultado:  $d = 3,5 \text{ m}$ )



En el punto 1:  $h = 0$   
 $v = 10 \text{ m/s}$

En el punto 2:  $v = 0$

a) Calculamos la energía mecánica en el punto 1

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + m g h$$

$$E_{m_1} = \frac{1}{2} 15(\text{kg}) \cdot (10 \text{ m/s})^2 + m \cdot g \cdot 0 = 750 \text{ J}$$

La energía perdida por rozamiento ( $W_{roz}$ ) es:

$$W_{roz} = \frac{30}{100} \cdot 750(\text{J}) = 225 \text{ J}$$

b) La energía mecánica en el punto 2 es:

método 1:  $E_{m_1} - W_{roz} = E_{m_2}$

$$750(\text{J}) - 225(\text{J}) = E_{m_2}; \quad E_{m_2} = 525 \text{ J}$$

método 2:  $E_{m_2} = 70\% E_{m_1} = \frac{70}{100} \cdot 750(\text{J}) = 525 \text{ J}$

Como  $E_{m_2} = \frac{1}{2} m \cdot 0^2 + m g h_2$ ;  $h_2 = \frac{E_{m_2}}{m g} = \frac{525(\text{J})}{15(\text{kg}) \cdot 10(\text{m/s}^2)} = 3,5 \text{ m}$

c) Cálculo de la distancia recorrida  $d$ :

$$\text{sen } 20 = \frac{h_2}{d}$$

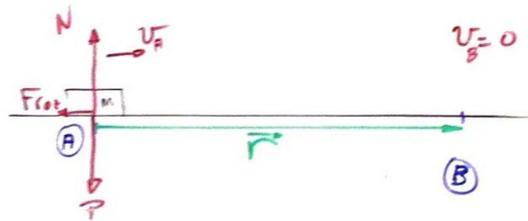
$$d = \frac{h_2}{\text{sen } 20} = \frac{3,5 \text{ m}}{\text{sen } 20}$$

$$d = 10,23 \text{ m}$$

Sobre una superficie horizontal lanzamos una masa de 5 kg a una velocidad de 8 m/s. Calcular a qué distancia se detendrá si desliza con un coeficiente de rozamiento  $\mu = 0,15$

(Resultado: 21,8 m)

Suponemos un objeto puntual y sólo influyen gravedad y rozamiento



Funciones y parámetros

$$W_{roz} = \vec{F}_{roz} \cdot \vec{r}$$

$$F_{roz} = \mu \cdot N$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$m = 5 \text{ kg}$$

$$v_A = 8 \text{ m/s}$$

$$\mu = 0,15$$

$$v_B = 0$$

La masa tendrá una energía cinética en el punto A que se pierde como trabajo de rozamiento en el trayecto entre A y B, de forma que la energía cinética en B es nula.

$$\text{Balance de energía: } E_{c_A} - W_{A \rightarrow B} = E_{c_B} = 0$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8^2 = 160 \text{ J}$$

Cálculo de  $W_{roz}$ :

$$N = P = mg = 5 \cdot 9,8 = 49,0 \text{ N}$$

$$F_{roz} = \mu \cdot N = 0,15 \cdot 49 = 7,35 \text{ N}$$

$$W_{roz} = |F_{roz}| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos 180^\circ = -7,35 r$$

$$160 - 7,35 r = 0 \quad ; \quad r = \frac{-160}{-7,35} = 21,8 \text{ m}$$

En un parque acuático, una persona de 80 kg se va a lanzar por un tobogán de agua. Para llegar a lo alto del tobogán, sube por la escalera hasta la plataforma que está a 25 m de altura.

- Explica de dónde proviene su energía y en qué se convierte desde que empieza a subir hasta que llega abajo.
- Calcula a qué velocidad entrará al agua cuando se lance, si la pendiente del tobogán es de  $30^\circ$  y su coeficiente de rozamiento es  $\mu = 0,2$ . (Resultado:  $v = 17,9 \text{ m/s}$ )
- Calcula la potencia empleada en subir a la plataforma si tarda 2 minutos y medio. (Resultado:  $\text{Pot} = 131 \text{ W}$ )

La persona desliza con rozamiento por el tobogán hasta llegar a abajo.

Funciones y parámetros

$$E_{Pg} = mgh ; E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

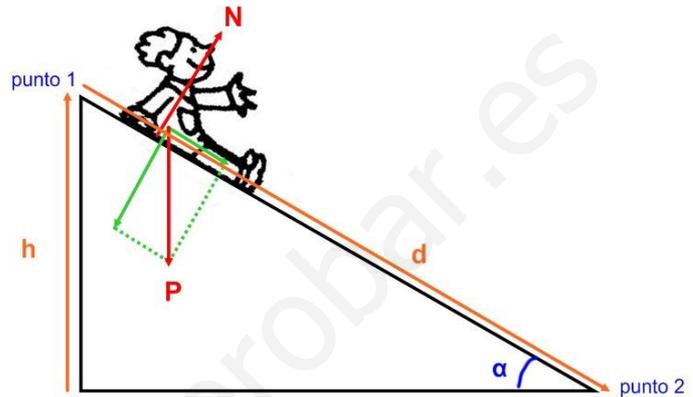
$$W_{roz} = \vec{F}_{roz} \cdot \vec{d}$$

$$m = 80 \text{ kg}$$

$$h = 25 \text{ m}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\mu = 0,2$$



a) La energía de todo el proceso proviene de la energía química que, en los músculos de la persona que sube, se transforma en energía mecánica.

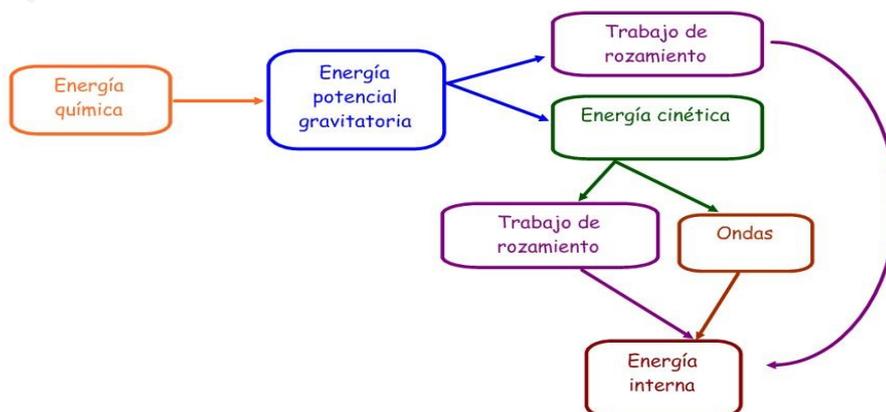
Según va subiendo, gana energía potencial gravitatoria, que alcanza su máximo en lo alto del tobogán.

Al lanzarse, la energía potencial gravitatoria se va convirtiendo en energía cinética, con lo que gana velocidad.

Pero, al haber rozamiento, una parte se convierte en energía interna y habrá un aumento de temperatura en el agua y en el tobogán. Esta energía se resta de la mecánica, luego la velocidad a la que llegará abajo será inferior a la que habría alcanzado si no hubiera habido rozamiento.

Cuando la persona llega al agua, hay un choque y la energía se dispersa como ondas por la piscina. El rozamiento del agua con los bordes y consigo misma (viscosidad) convierte el resto de la energía mecánica en energía interna.

Por tanto, la totalidad de la energía puesta en juego inicialmente termina como energía interna en la piscina, que elevará ligeramente su temperatura.



b)

En el punto 1,  $v=0$ ;  $h=25\text{m}$

En el punto 2,  $v$  desconocida y  $h=0$

Por conservación de la energía

$$E_{M_1} - W_{froz} = E_{M_2}$$

$$E_{M_1} = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = 80 \cdot 9,8 \cdot 25 = 19600 \text{ J}$$

$$W_{froz} = \vec{F}_{froz} \cdot \vec{d} ; F_{froz} = \mu \cdot N = \mu \cdot P \cos \alpha = \mu mg \cos \alpha$$

$$F_{froz} = 0,2 \cdot 80 \cdot 9,8 \cdot \cos 30 = 135,8 \text{ N}$$

$$\text{sen } 30 = \frac{25}{d} ; d = \frac{25}{\text{sen } 30} = \frac{25}{\frac{1}{2}} = 50 \text{ m}$$

$$W_{froz} = 135,8 \text{ (N)} \cdot 50 \text{ (m)} = 6790 \text{ J}$$

$$E_{M_2} = 19600 - 6790 = 12810 \text{ J} = \frac{1}{2}mv^2 + \cancel{mgh}^0$$

$$12810 = \frac{1}{2}80v^2 ; v^2 = \frac{2 \cdot 12810}{80} ; v = \sqrt{\frac{2 \cdot 12810}{80}} = 17,9 \text{ m/s}$$

c) 2 min y medio son 150 s

Como la energía ganada es 19600 J

$$Pot = \frac{19600 \text{ J}}{150 \text{ s}} = 131 \text{ W}$$

Un carro de 50 kg desliza por una montaña rusa como la de la figura. Si en el punto A su velocidad es de 5 m/s y en el punto B es de 3,2 m/s, calcula:

a) La energía mecánica en A y en B.

(Resultado:  $E_A = 15625 \text{ J}$ ,  $E_B = 10256 \text{ J}$ )

b) El trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento entre los puntos A y B

(Resultado:  $W_{\text{roz}} = 5369 \text{ J}$ )

$$E_m = E_c + E_g$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

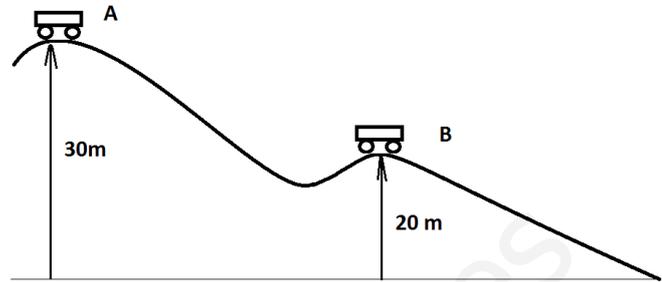
$$E_g = m g h$$

$$W_{\text{roz}} = \vec{F}_{\text{roz}} \cdot \vec{r}$$

$$m = 50 \text{ kg}$$

Punto A:  $h_A = 30 \text{ m}$   
 $v_A = 5 \text{ m/s}$

Punto B:  $h_B = 20 \text{ m}$   
 $v_B = 3,2 \text{ m/s}$



a) En A y en B, la energía mecánica será igual a la cinética más la potencial gravitatoria

$$E_{m_A} = \frac{1}{2} m v_A^2 + m g h_A = \frac{1}{2} 50 \cdot 5^2 + 50 \cdot 10 \cdot 30 = 625 + 15000 = 15625 \text{ J}$$

$$E_{m_B} = \frac{1}{2} m v_B^2 + m g h_B = \frac{1}{2} 50 \cdot 3,2^2 + 50 \cdot 10 \cdot 20 = 256 + 10000 = 10256 \text{ J}$$

b) El trabajo de rozamiento será igual a la disminución de la energía mecánica entre A y B:

$$W_{\text{roz}} = E_{m_A} - E_{m_B} = 15625 - 10256 = 5369 \text{ J}$$

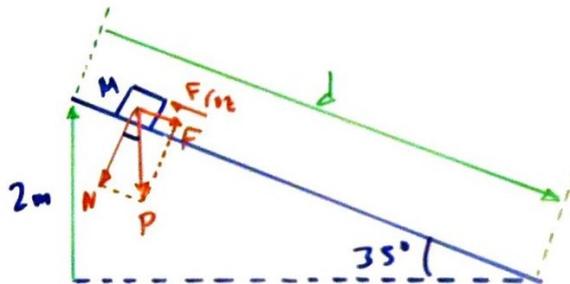
17) Un niño de 30 kg desliza desde el reposo por un tobogán inclinado  $35^\circ$ . Si el tobogán tiene 2 m de altura y el coeficiente de rozamiento es  $\mu = 0,15$ , calcula:

a) Las pérdidas de energía por trabajo de rozamiento.

(Resultado:  $W_{roz} = -128,6 \text{ J}$ )

b) A qué velocidad llegará a la base del tobogán.

(Resultado:  $v = 5,6 \text{ m/s}$ )



a) El trabajo de rozamiento será

$$W_{roz} = F_{roz} \cdot d \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Cálculo de } d: \quad \text{sen } 35 = \frac{2 \text{ m}}{d}; \quad d = \frac{2 \text{ m}}{\text{sen } 35} = 3,49 \text{ m}$$

$$\text{Cálculo de } F_{roz}: \quad F_{roz} = \mu \cdot N \quad \cos 35 = \frac{N}{P}$$

$$N = P \cos 35 = mg \cos 35 = 30(\text{kg}) \cdot 10(\text{m/s}^2) \cdot \cos 35 = 245,7 \text{ N}$$

$$F_{roz} = \mu \cdot N = 0,15 \cdot 245,7(\text{N}) = 36,86 \text{ N}$$

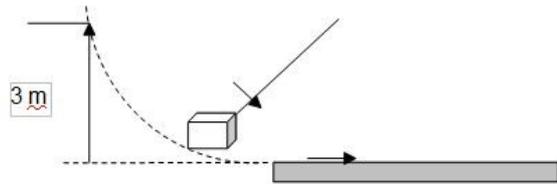
Por tanto, el trabajo de rozamiento será:

$$W_{roz} = 36,86 \text{ (N)} \cdot 3,49 \text{ (m)} \cdot \cos 180^\circ = -128,6 \text{ J}$$



Dejamos caer una caja colgada de una cuerda desde 3 m de altura como en el dibujo. Calcula:

- a) ¿A qué velocidad pasaremos por el punto más bajo? (Resultado:  $v = 7,67 \text{ m/s}$ )  
 b) ¿Qué distancia se deslizará en horizontal si la masa es de 60 kg y el coeficiente de rozamiento es  $\mu = 0,15$ ? (Resultado:  $e = 20 \text{ m}$ )



Aplicamos conservación de la energía mecánica y trabajo de rozamiento.

Funciones y parámetros

$$E_m = E_c + E_{p_g}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

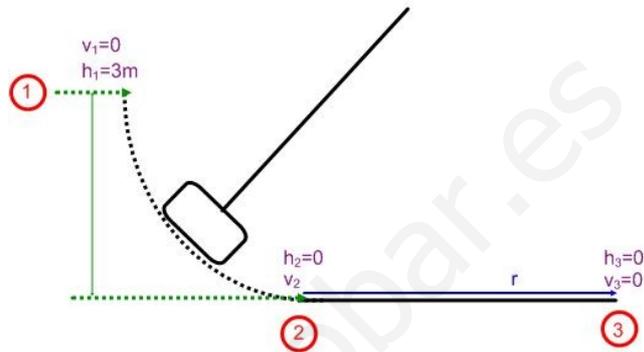
$$E_{p_g} = m g h$$

$$W_{roz} = F_{roz} \cdot r$$

$$h_1 = 3 \text{ m}$$

$$m = 60 \text{ kg}$$

$$\mu = 0,15$$



1) Método 1

Calculamos  $E_m$  en ①:

$$E_m = \frac{1}{2} 60 \cdot 0^2 + 60 \cdot 9,8 \cdot 3 = 1764 \text{ J}$$

Entre ① y ② no se pierde energía:

$$E_{m_2} = \frac{1}{2} 60 \cdot v^2 + 60 \cdot 9,8 \cdot 0 = 30 v^2$$

$$E_{m_2} = E_{m_1} \implies 30 v^2 = 1764; \quad v = \sqrt{\frac{1764}{30}} = 7,67 \text{ m/s}$$

Método 2

En cualquier caída libre sin  $v_{inicial}$

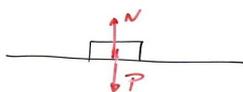
$$m g h_1 = \frac{1}{2} m v^2 \quad ; \quad v = \sqrt{2 g h} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 3} = 7,67 \text{ m/s}$$

2) En el punto ② tenemos 1764 J

El trabajo de rozamiento convierte esta energía

$$W_{roz} = F_{roz} \cdot r = \mu \cdot N \cdot r$$

Como el plano es horizontal,  $N = P$

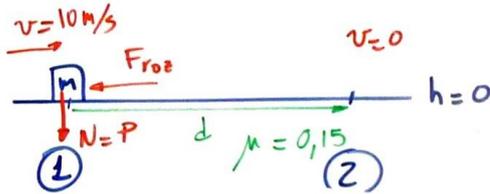


$$W_{roz} = \mu \cdot m \cdot g \cdot r$$

$$W_{roz} = 0,15 \cdot 60 \cdot 9,8 \cdot r = 1764 \text{ J}$$

$$r = \frac{1764}{0,15 \cdot 60 \cdot 9,8} = 20 \text{ m}$$

19) Lanzamos una masa de 70 kg con una velocidad de 10 m/s por una superficie horizontal que tiene un coeficiente de rozamiento  $\mu = 0,15$ . Calcular la distancia que recorrerá hasta detenerse. (Resultado:  $d = 33,3$  m)



Desde el punto de vista energético:

- $E_p$  no varía (es horizontal)
- $E_c$  disminuye hasta anularse
- El trabajo de rozamiento absorbe toda la  $E_c$

Por conservación de la energía

$$E_{m1} + W_{roz} = E_{m2}$$

Calculamos  $E_{m1}$  y  $E_{m2}$ :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{m1} = \frac{1}{2} \cdot 70 \cdot 10^2 + 70 \cdot 10 \cdot 0 = 3500 \text{ J} \\ E_{m2} = \frac{1}{2} \cdot 70 \cdot 0^2 + 70 \cdot 10 \cdot 0 = 0 \text{ J} \end{array} \right.$$

Por tanto, como  $E_{m1} + W_{roz} = E_{m2}$

$$3500 + W_{roz} = 0; \quad W_{roz} = -3500 \text{ J}$$

Calculamos  $W_{roz}$

$$W_{roz} = |\vec{F}_{roz}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \alpha = \mu \cdot N \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \alpha = \mu \cdot P \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \alpha = \mu \cdot mg \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \alpha$$

$$-3500 \text{ J} = 0,15 \cdot 70(\text{kg}) \cdot 10(\text{m/s}^2) \cdot |\vec{d}| \cdot \cos 180$$

$$|\vec{d}| = \frac{-3500}{0,15 \cdot 70 \cdot 10 \cdot (-1)} = 33,3 \text{ m}$$