

Descomposición factorial de polinomios. Ecuaciones de grado superior

- 1.- $x=a$ es un cero o raíz de un polinomio $P(x)$ si su valor numérico en $x=a$ vale cero ($P(a)=0$). "Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales". Las raíces de enteras son divisores del término independiente. Para su cálculo se utiliza la regla de Ruffini
- 2.- **Teorema del Resto.** El resto de la división de un polinomio $P(x)$ por $x-a$ es igual al valor numérico de dicho polinomio por $x-a$ ($R=P(a)$).
Si la división de $P(x)$ por $x-a$ es exacta entonces $x-a$ es un factor de la descomposición factorial de $P(x)$.
"Descomponer un polinomio factorialmente consiste en hallar dos o más polinomios, no constantes, tales que su producto sea el polinomio dado. Un polinomio se llama irreducible cuando no se puede descomponer en factores."
 $P(x)/(x-a)$ es exacta $\Leftrightarrow R=P(a)=0 \Leftrightarrow P(x)$ es divisible por $x-a \Leftrightarrow x-a$ es un factor de $P(x)$
- 3.- Caso particular: descomposición factorial de una ecuación de 2º grado. Si $ax^2+bx+c=0$ tiene por raíces (soluciones) x_1, x_2 . Entonces $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
Cálculo de la ecuación conocidas las raíces. $(x-x_1)(x-x_2)=0$
- 4.- Métodos para factorizar polinomios:
 - Aplicar productos notables
 - Sacar factor común
 - Hallar las raíces $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$

1. Comprobar si $x=1$ y $x=3$ son raíces de los siguientes polinomios:
 $P_1(x) = x - 3, P_2(x) = x^2 - 1, P_3(x) = x^2 - 5x + 6; P_4(x) = x^3 + x^2 - 2x$
2. Comprobar si $1 + \sqrt{3}$ es raíz de $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2$ Sol: Sí
3. De entre los números 0, 1, 2, 3, 4 ¿cuáles son raíces del polinomio $P(x)=x^3-5x^2+4$? Sol. $x=1$
4. De los números 1, 0, $\sqrt{2}, -1, 2$ y -3 decir cuáles son raíces y cuáles no, de cada uno de los polinomios siguientes:

a) $P(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2$	b) $Q(x) = 2x^2 + 10x - 28$		
c) $R(x) = x^2 + (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2}$	d) $S(x) = x^3 + (1 + \sqrt{2})x^2 + \sqrt{2}x$	e) $I(x) = x$	

 Sol: a) sí: 0, -1, -3; b) sí: 2; c) sí: $\sqrt{2}, -1$; d) sí: 0, -1; e) sí: 0
5. Utilizando la regla de Ruffini, dar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 6$ por $x - 3$	b) $P(x) = 5x^4 - 2x^2 + 5$ por $x + 1$
c) $P(x) = 8x^3 - 5x^4 + 6x^2 - x + 8$ por $x - 2$	d) $P(x) = 6x^3 - x + 16$ por $x + 3$
6. Comprobar que se verifica el Teorema del Resto en las divisiones del ejercicio anterior.
7. Indicar, sin hacer la división si $P(x)$ es divisible por $D(x)$:

a) $P(x) = 3x^3 - 21x + 18; D(x) = x + 3$	b) $P(x) = 7x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x - 1; D(x) = x - 1$
---	---

 c) $P(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} + 4x^5; D(x) = x - \frac{1}{2}$ Sol: son todos
8. Como $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, decir si es cierto: a) $(x + 1) \mid (x^2 + 2x + 1)$ b) $(x^2 + 2x + 1) \mid (x + 1)$
¿Cuál es el polinomio divisor? ¿Es $x^2 + 2x + 1$ múltiplo de $x + 1$? Sol: $x + 1$ es divisor y $x^2 + 2x + 1$ es un múltiplo.
9. Como $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, decir si es cierto: a) $(x - 2) \mid (x^2 - 4x + 4)$ b) $(x^2 - 4x + 4) \mid (x - 2)$
¿Cuál es el polinomio divisor? ¿Es $x^2 - 4x + 4$ múltiplo de $x - 2$? ¿Es $x - 2$ divisible por $x^2 - 4x + 4$?
Sol: cierto a); $x - 2$; sí; no.

10. Encontrar 3 polinomios divisibles por a) $3x^2 + 4x - 1$, b) $(x - 1)^2$

Sol: a) $9x^2 + 12x - 3$; $3x^4 + 4x^3 - x^2$; $3x^3 + 7x^2 + 3x - 1$, b) $7(x - 1)^2$; $(x - 1)^4$; $(x - 1)^9$

11. Encontrar 3 polinomios divisores y dos múltiplos de $p(x) = x^2(x^2 - 4)$ Sol: x^2 ; $x + 2$; $x - 2$; $x^3(x^2 - 4)$; $x^2(x^2 - 4)^2$

12. Calcular a para que 3 sea raíz del polinomio $x^3 - 6x^2 + ax - 2$ Sol: $a = 29/3$

13. Hallar la descomposición factorial de los siguientes trinomios:

a) $p(x) = x^2 + 2x - 3$ b) $p(x) = 12x^2 - x - 1$ c) $p(x) = x^3 - x^2 - 12x$ d) $p(x) = x(x - 1) - 6(x - 2)$ e) $p(x) = 5x - 2x^2 + 3$

Sol: a) $p(x) = (x + 3)(x - 1)$, b) $p(x) = 12(x - 1/3)(x + 1/4)$, c) $p(x) = x(x - 4)(x + 3)$, d) $p(x) = (x - 4)(x - 3)$ e) $p(x) = -2(x - 3)(x + 1/2)$

14. Escribir los polinomios cuyos ceros son:

a) $x_1 = 2$; $x_2 = 3$ b) $x_1 = -1$; $x_2 = 4$ c) $x_1 = 1/2$; $x_2 = 2$ d) $x_1 = -2$; $x_2 = -3/2$

Sol: a) $x^2 - 5x + 6 = 0$, b) $x^2 - 3x - 4 = 0$, c) $2x^2 - 5x + 2 = 0$, d) $2x^2 + 7x + 6 = 0$

15. Factorizar los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ b) $P(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$ c) $P(x) = x^3 - 4x$
 d) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$ e) $P(x) = (4x^2 - 9)(9x^2 - 16)$ f) $P(x) = x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 61x + 30$
 g) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$ h) $P(x) = 6x^4 - 150x^2 + 864$

Sol: a) $(x - 1)(x - 3)(x - 5)$; b) $(x - 3)(x + 2)(x - 2)(x + 4)$, c) $x(x - 2)(x + 2)$; d) $2(x - 1)(x + 2)(x - 3)$; e) $(2x - 3)(2x + 3)(3x - 4)(3x + 4)$;
 f) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 5)$; g) $x(x - 3)(x - 4)$; h) $P(x) = 6(x - 3)(x + 3)(x - 4)(x + 4)$

16. Hallar al máximo común divisor de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = (x + 5)(x - 2)(x^2 + 3)$; $Q(x) = x(x + 3)(x - 1)(x + 5)$
 b) $P(x) = x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x$; $Q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
 c) $P(x) = x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36$; $Q(x) = 4x^3 + 6x^2 - 22x - 12$
 d) $P(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 + 1$; $Q(x) = x^5 + x^4 + 2x^2 - 1$
 e) $P(x) = 3x^4 + 9x^3 - 3x^2 - 12x - 9$; $Q(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$
 f) $P(x) = x^2 + x - 2$; $Q(x) = x - 1$ g) $P(x) = x^4 - 1$; $Q(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
 h) $P(x) = x^2 - 1$; $Q(x) = x^2 - 2x + 1$; $R(x) = x^2 + 2x - 3$ i) $P(x) = x^2 + x + 1$; $Q(x) = 2x + 5$

Sol: a) $x + 5$, b) $x^2 - 3x + 2$, c) $x^2 + x + 6$, d) $x^3 + x + 1$, e) $x + 3$, f) $x - 1$, g) $x^2 - 1$, h) $x - 1$, i) 1

17. Hallar el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios:

$P(x) = x^2 + x - 12$; $Q(x) = x^3 - 9x$ b) $P(x) = x^2 + x - 12$; $Q(x) = x^2 - 6x + 9$
 $P(x) = x^3 - 7x^2 + 8x - 2$; $Q(x) = x^3 - 4x^2 - 10x + 4$ d) $P(x) = x^7 - x$; $Q(x) = x^5 + x^2$

Sol: a) $x(x - 3)(x + 3)(x + 4)$, b) $(x + 4)(x - 3)^2$, c) $(x - 1)(x^3 - 4x^2 - 10x + 4)$ d) $x^8 - x^2$.

18. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$ b) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ c) $x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48 = 0$
 d) $3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ e) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ f) $4x^3 + 4x^2 - x - 1 = 0$ g)
 $6x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 1 = 0$ h) $4x^4 - x^3 - 28x^2 + 31x - 6 = 0$

Sol: a) -1, 3, 5; b) -1, 1, 2; c) -2, 2, 3, -4; d) 0, -1, 1, 2/3; e) 1, -2, 3; f) -1, -1/2, 1/2; g) -1, 1, -1/2, 1/3; h) -3, 1, 2, 5/2