EXAMEN MATEMÁTICAS: TRIGONOMETRÍA Y COMPLEJOS

EJERCICIO 1 *Cuando Juan está situado a 87 m de un pino, ve a éste bajo un ángulo de elevación de 25˚ y retrocediendo un poco, este ángulo se reduce en 3˚. ¿Qué distancia hay entre el pino y Juan desde la nueva posición?*

(1,5 puntos)

EJERCICIO 2 *Demuestra, sin utilizar decimales, que* $\frac{sen75°-sen15°}{cos75°+cos15°}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(1,5 puntos)

EJERCICIO 3 *Encuentra las soluciones de* $z^3 + 8i = 0$.

(1 punto)

EJERCICIO 4 *Dado el complejo* $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$,

a) *Halla* z^6 *en forma binómica.*

b) *Halla un complejo* w *tal que* $\frac{w}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

(1 +1 puntos)

EJERCICIO 5 *Demuestra la identidad :*

$$\text{sen}3\alpha = 3\text{sen}\alpha - 4\text{sen}^3\alpha$$

(1,5 puntos)

EJERCICIO 6 *Resuelve la ecuación* **4cos2x +3cosx=1**

(1,25 puntos)

EJERCICIO 7 *Determina dos números reales* x *e* y *para que se verifique :* $\frac{-4+xi}{2-3i} = y - 2i$

(1,25 puntos)

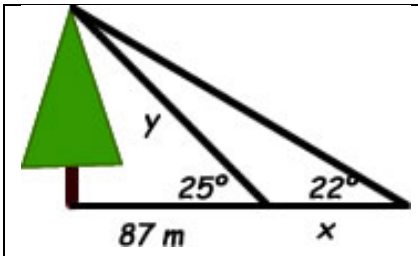
==========

CALIFICACIÓN EJERCICIO : .....

CALIFICACIÓN ACTUAL DEL CURSO : .....

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 *Cuando Juan está situado a 87 m de un pino, ve a éste bajo un ángulo de elevación de 25˚ y retrocediendo un poco, este ángulo se reduce en 3˚. ¿A qué distancia está el pino de Juan desde la nueva posición?*



Calculamos y: cos25˚ = $\frac{87}{y}$ → y = $\frac{87}{\cos 25^\circ}$ = 95,99m

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{sen3^\circ}{x} = \frac{sen22^\circ}{95,99}$$

x = $\frac{95,99 \,.sen3^\circ}{sen22^\circ}$ = 13,41 m

Juan se encuentra a 100,41 m del pino

EJERCICIO 2 *Demuestra, sin utilizar decimales, que* $\frac{sen75^\circ - sen15^\circ}{cos75^\circ + cos15^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

sen (x + y) = senxcosy + cosxseny

sen (x – y) = senxcosy –cosxseny

sen(x + y) - sen(x – y) = 2cosxseny

x + y = 75

x – y = 15

2x = 90 x = 45 y = 30

sen75˚ - sen15˚ = 2cos45˚sen30˚= cos45˚

cos(x + y) = cosxcosy - senxseny

cos(x – y) = cosxcosy + senxseny

cos(x + y) + cos(x – y) = 2cosxcosy

EL sistema es el mismo luego:

cos75˚ + cos15˚ = 2cos45˚cos30˚

$$\frac{sen75^\circ - sen15^\circ}{cos75^\circ + cos15^\circ} = \frac{cos45^\circ}{2\cos 45^\circ \cos 30^\circ} = \frac{1}{2\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

EJERCICIO 3 *Encuentra las soluciones de* $z^3 + 8i = 0$.

$Z^3 = -8i$ → $z = \sqrt[3]{-8i}$; $-8i = 8_{270^\circ}$; el módulo de todas las raices cúbicas sería 2;

β = $\frac{270+360k}{3}$; k = 0, β= 90˚ ; k = 1, β = 210˚ ; k = 2, β= 330˚

Las raices son: $2_{90^\circ}, 2_{210^\circ}, 2_{330^\circ}$

EJERCICIO 4 *Dado el complejo* z = $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$,

a) *Halla* z^6 *en forma binómica.*

b) *Halla un complejo* w *tal que* $\frac{w}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

Pasamos z a polares : z = $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{315^\circ}$

a) $z^6 = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{315^\circ}\right)^6 = \left(\frac{1}{8}\right)_{1890^\circ} = \left(\frac{1}{8}\right)_{90^\circ} = \frac{1}{8}$ (cos90˚ + isen90˚) = $\frac{i}{8}$

b) w = r_{α} ; z = $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{315^\circ}$; $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ i = 1_{45°

w = $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{315^\circ} . 1_{45^\circ} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{0^\circ}$

EJERCICIO 5 *Demuestra la identidad :*

$$\text{sen}3\alpha = 3\text{sen}\alpha - 4\text{sen}^3\alpha$$

Sen3α = sen(2α + α) = sen2αcosα + cos2αsenα = 2senαcos^2 α + (cos^{2}α – sen^{2}α)senα = 2senαcos^2 α + cos^{2}αsenα – sen^{3}α = 3cos^{2}αsenα – sen^{3}α = 3senα(1-sen^{2}α) - sen^{3}α = 3senα – 4sen^{3}α

EJERCICIO 6 *Resuelve la ecuación* **4cos2x +3cosx=1**

4(cos^{2}x – sen^{2}x) +3cosx – 1 = 0 ; 4cos^{2}x – 4(1- cos^{2}x) + 3cosx – 1 = 0;
4cos^{2}x – 4 + 4cos^{2}x + 3cosx – 1 = 0 ; 8cos^2 x + 3cosx – 5 = 0
Cosx = $\frac{-3\pm\sqrt{9+160}}{16}$ = 5/8 y -1
Cosx = -1 → x = 180˚
Cosx = 5/8 → x = 51˚ y x = 309˚

EJERCICIO 7 *Determina dos números reales* x *e* y *para que se verifique :* $\frac{-4+xi}{2-3i}$ = y – 2i

-4 + xi = (y – 2i)(2- 3i) ; - 4 + xi = 2y -3yi – 4i -6 ; - 4 + xi = (2y -6) + i(-3y – 4) ;
2y – 6 = -4 2y = 2 ; y = 1
-3y – 4 = x -3 – 4 = -7