Límites, continuidad, derivadas y funciones

1. (1.5p) Calcula los siguientes límites:

a. (0.5p) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x$

b. (1p) $\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{6x^3 + 7x^2 - 1}$

2. (3p) Calcula la derivada de las siguientes funciones, simplificando los resultados:

a. $f(x) = \sqrt{\ln(3x^2)}$

b. $f(x) = sen(sen\ 5x)$

c. $f(x) = (x^7 + 1) \cdot \log_3(3x^7 + 1)$ (No simplificar el resultado)

d. $f(x) = 3 + 3^{x/5}$

e. $f(x) = cos^2(-2x)$

f. $f(x) = tg\ (5x)$

3. (1p) Calcula el valor de k para que la siguiente función sea continua en todo su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} & si \quad x \neq -3 \\ 3k - x & si \quad x = -3 \end{cases}$$

4. (3.5p) Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{2 - x}$$

Se pide:

a. (1p) Asíntotas de $f(x)$, aproximando las verticales si las hay.

b. (1.5p) Extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c. (1p) Esboza la gráfica de $f(x)$.

5. (1p) Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 5x^3 - 2x$ en $x = -1$.

SOLUCIÓN

1. Calcula los siguientes límites:

a. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty}=\left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty}=0$$

b. $\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{6x^3+7x^2-1}=\frac{0}{0}\ \rightarrow$ Indeterminación

Se factoriza el denominador:

	6	7	0	−1
−1		−6	−1	1
	6	1	−1	0

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{6x^3+7x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{(x+1)(6x^2+x-1)}=$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{6x^2+x-1}=\frac{1}{6-1-1}=\frac{1}{4}$$

2. Calcula la derivada de las siguientes funciones, simplificando los resultados:

a. $f(x)=\sqrt{\ln(3x^2)}$

$$f'(x)=\frac{\left(ln(3x^2)\right)'}{2\sqrt{ln(3x^2)}}=\frac{\frac{(3x^2)'}{3x^2}}{2\sqrt{ln(3x^2)}}=\frac{\frac{6x}{3x^2}}{2\sqrt{ln(3x^2)}}=\frac{\frac{2}{x}}{2\sqrt{ln(3x^2)}}=\frac{2}{2x\sqrt{ln(3x^2)}}=\frac{1}{x\sqrt{ln(3x^2)}}$$

b. $f(x)=sen(sen\,5x)$

$$f'(x)=cos(sen\,5x)\cdot(sen\,5x)'$$

$$f'(x)=cos(sen\,5x)\cdot\cos 5x\cdot(5x)'$$

$$f'(x)=cos(sen\,5x)\cdot\cos 5x\cdot 5$$

$$f'(x)=5cos(sen\,5x)\cdot\cos 5x$$

c. $f(x) = (x^7+1)\cdot\log_3(3x^7+1)$ (No simplificar el resultado)

$$f'(x) = (x^7+1)'\cdot\log_3(3x^7+1) + (x^7+1)\cdot\ (\log_2(3x^7+1))' =$$

$$7x^6\cdot\log_3(3x^7+1) + (x^7+1)\cdot\frac{(3x^7+1)'}{(3x^7+1)\cdot\ln 2} =$$

$$7x^6\cdot\log_3(3x^7+1) + (x^7+1)\cdot\frac{21x}{(3x^7+1)\cdot\ln 2}$$

d. $f(x) = 3 + 3^{x/5}$

$$f'(x) = (3)' + 3^{x/5}\cdot ln3\cdot\left(\frac{1}{5}x\right)' = 0 + 3^{x/5}\cdot ln3\cdot\frac{1}{5} = \frac{3^{x/5}\cdot ln3}{5}$$

e. $f(x) = cos^2(-2x)$

$$f'(x) = 2cos(-2x)\cdot\big(cos(-2x)\big)' = 2cos(-2x)\cdot\big(-sen(-2x)\big)\cdot(-2x)' =$$

$$-2cos(-2x)\cdot sen(-2x)\cdot(-2) = 4cos(-2x)\cdot sen(-2x)$$

f. $f(x) = tg\ (5x)$

$$f'(x) = \frac{(5x)'}{cos^2(5x)} = \frac{5}{cos^2(5x)}$$

3. Calcula el valor de k para que la siguiente función sea continua en todo su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3} & si \quad x \neq -3 \\ 3k - x & si \quad x = -3 \end{cases}$$

En $x = -3$:

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{x^2-9}{x+3} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to -3^-}\frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to -3^-}(x-3) = -3-3 = -6$$

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{x^2-9}{x+3} = -6$$

$$f(-3) = 3k + 3$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -3$:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^+} f(x) = f(-3) \quad \to \quad -6 = 3k + 3 \quad \to \quad 3k = -9 \quad \to \quad k = -3$$

4. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{2 - x}$$

Se pide:

a. Asíntotas de $f(x)$, aproximando las verticales si las hay.

ASÍNTOTAL VERTICAL:

$x = 2$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2}{2 - x} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2}{2 - x} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

ASÍNTOTA HORIZONTAL:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2 - x} = \infty \quad \to \quad \nexists$$

ASÍNTOTA OBLÍCUA

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2x - x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{2 - x} + x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{2 - x} =$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{2 - x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{-x} = -2$$

$$y = mx + n \quad \to \quad y = -x - 2$$

b. Extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (2 - x) - x^2(-1)}{(2 - x)^2} = \frac{4x - 2x^2 + x^2}{(2 - x)^2} = \frac{4x - x^2}{(2 - x)^2} \quad (I)$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad \frac{4x - x^2}{(2 - x)^2} = 0 \quad \to \quad 4x - x^2 = 0 \quad \to \quad x(4 - x) = 0 \quad \to$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 4 - x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 4 \end{cases}$$

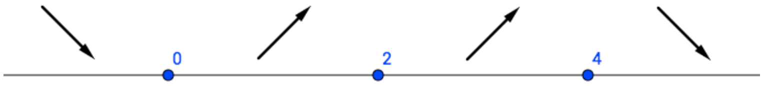
Sobre la recta real situamos los valores que han anulado la primera derivada (posibles máximos o mínimos) así como el valor que no pertenece al dominio de definición de la función ($x = 2$). Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función en cada uno de los intervalos sustituyendo un valor en la primera derivada *(I)*:

$$f'(-1) = \frac{4 \cdot (-1) - (-1)^2}{(3)^2} = \frac{-4 - 1}{9} < 0$$

$$f'(1) = \frac{4 \cdot 1 - 1^2}{(1)^2} = \frac{4 - 1}{1} > 0$$

$$f'(3) = \frac{4 \cdot 3 - 3^2}{(-1)^2} = \frac{12 - 9}{1} > 0$$

$$f'(5) = \frac{4 \cdot 5 - 5^2}{(-3)^2} = \frac{20 - 25}{9} < 0$$



Obtenemos la ordenada del máximo y mínimo relativo:

$$f(0) = \frac{0^2}{2 - 0} = 0 \qquad\qquad f(4) = \frac{4^2}{2 - 4} = \frac{16}{-2} = -8$$

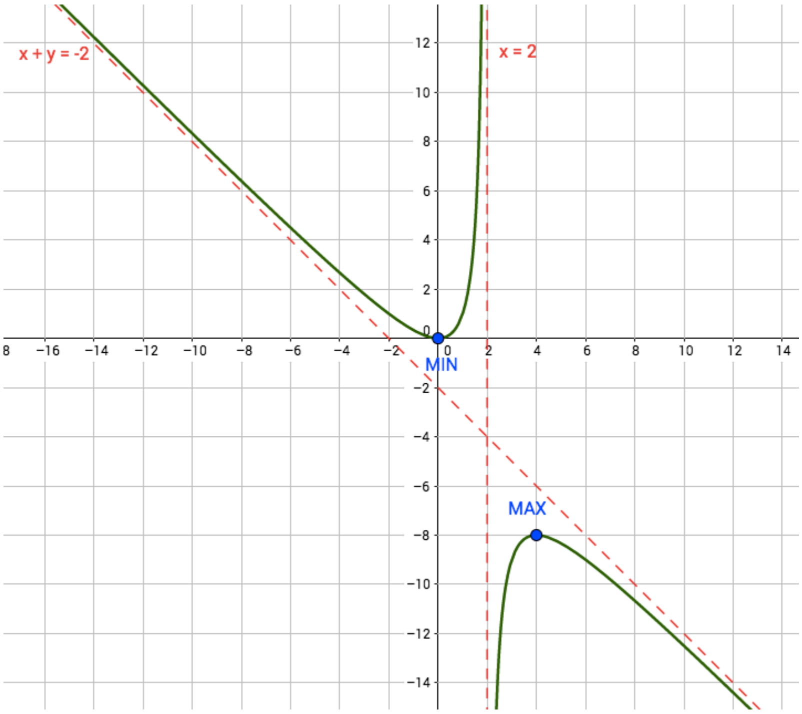
Creciente: $(0, 2) \cup (2, 4)$

Decreciente: $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

Máximo relativo: $(4, -8)$

Mínimo relativo: $(0, 0)$

c. Esboza la gráfica.



5. Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 5x^3 - 2x$ en $x = -1$.

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente es $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$$x_0 = -1$$

$$y_0 = f(-1) = 5 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1) = -5 + 2 = -3$$

La derivada de la función $f(x)$ es $f'(x) = 15x^2 - 2$, luego:

$$m = f'(-1) = 15 \cdot (-1)^2 - 2 = 15 - 2 = 13$$

Sustituyendo:

$$y + 3 = 13(x + 1) \quad \rightarrow \quad y + 3 = 13x + 13 \quad \rightarrow \quad 13x - y + 10 = 0$$