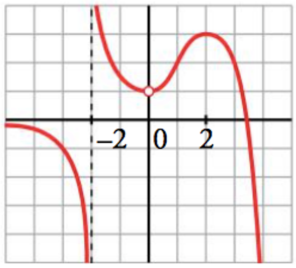
Límites y continuidad

1. (1p) Dada la gráfica de la función $f(x)$:



a. (0.5p) Determina:

$f(-2) =$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) =$

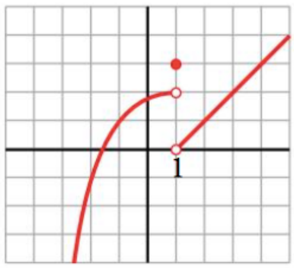
$\lim_{x \to -2^+} f(x)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

b. (0.5) <u>Estudia</u> la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.

2. (1p) Dada la gráfica de la función $f(x)$:



a. (0.5p) Determina:

$f(1) =$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to 1} f(x) =$

b. (0.5p) <u>Estudia</u> la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$.

3. (6p) Calcula los siguientes límites:

a. $\lim_{x \to -2} \frac{x-2}{x^2+2x}$

b. $\lim_{x \to 1} \frac{-2x}{(x-1)^2}$

c. $\lim_{x \to -\infty} [2^x + 1]$

d. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$

e. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - x^2}$

f. $\lim_{x \to -5} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 + 3x - 10}$

g. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 + x}{x^3 + 1}$

h. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 4x + 16}}{1 - 2x}$

3. (1p) Estudia la continuidad de la siguiente función, clasificando las discontinuidades cuando las haya:

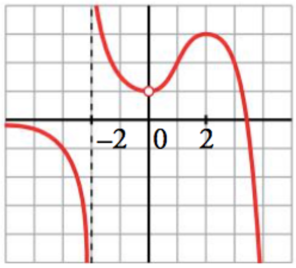
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & si \quad x < 1 \\ 3x - 5 & si \quad 1 \leq x < 4 \\ 2^x - 9 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

4. (1p) Calcula el valor de k para que la siguiente función sea continua en todo su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 + 4x^2}{x + 2} & si \quad x \neq -2 \\ 2k + x & si \quad x = -2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

1. Dada la gráfica de la función $f(x)$, calcula:



a. $f(-2)$, $\lim_{x\to -2^-} f(x)$, $\lim_{x\to -2^+} f(x)$, $\lim_{x\to -\infty} f(x)$, $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

$f(-2) = \nexists$

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

b. Estudia la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.

Se estudian los límites laterales y el valor de la función en $x = 0$:

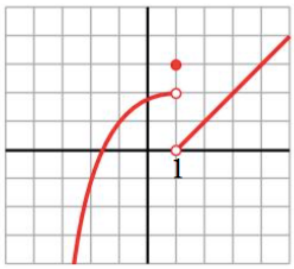
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

$f(0) = \nexists$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \neq f(0)$ $\rightarrow$ Discontinuidad evitable de salto finito

2. Dada la gráfica de la función $f(x)$, calcula:



a. $f(1)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

$f(1) = 3$

Para calcular el límite en $x = 1$ se estudian los límites laterales

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$ $\rightarrow$ $\lim_{x\to 1} f(x) = \nexists$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

b. Estudia la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$.

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0 \quad \rightarrow$ Discontinuidad inevitable de salto finito

3. Calcula los siguientes límites:

a. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x-2}{x^2+2x}$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x-2}{x^2+2x} = \frac{-4}{0}$$

Se han de calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x-2}{x^2+2x} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x-2}{x^2+2x} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

b. $\lim_{x\to 1} \dfrac{-2x}{(x-1)^2}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{-2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{0}$$

Se han de calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{-2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

c. $\lim_{x\to -\infty} [2^x + 1]$

$$\lim_{x\to -\infty} [2^x + 1] = 2^{-\infty} + 1 = \frac{1}{2^{+\infty}} + 1 = \frac{1}{+\infty} + 1 = 0 + 1 = 1$$

d. $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-x}$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-\infty} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\infty} = 3^{+\infty} = +\infty$$

e. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-x^2}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x^2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2} = \frac{1+1}{1^2} = 2$$

f. $\lim_{x\to -5} \dfrac{x^2-25}{x^2+3x-10}$

$$\lim_{x\to -5} \frac{x^2-25}{x^2+3x-10} = \frac{0}{0} \quad \rightarrow \quad \text{Indeterminación}$$

Se factorizan los polinomios del numerador y denominador:

$$x^2+3x-10=0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot(-10)}}{2\cdot 1} = \frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{49}}{2} = \frac{-3\pm 7}{2} =$$

$$x_1 = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-3-7}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$\lim_{x\to -5} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x\to -5} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x\to -5} \frac{x-5}{x-2} = \frac{-10}{-7} = \frac{10}{7}$$

g. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2+x}{x^3+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+x}{x^3+1} = \frac{0}{0} \quad \rightarrow \quad \text{Indeterminación}$$

Se factorizan los polinomios del numerador y del denominador. En el caso del numerador, bastará sacar factor común. En el denominador se obtienen las raíces de la ecuación $x^3+1=0$:

	1	0	0	1
-1		-1	1	-1
	1	-1	1	0

Luego $x_1 = -1$

Obtenemos las otras dos posibles raíces resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \nexists$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{-1}{1+1+1} = -\frac{1}{3}$$

h. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 4x + 16}}{1 - 2x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 4x + 16}}{1 - 2x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \to \quad \text{Indeterminación}$$

Tomando el término de mayor grado en el numerador y en el denominador:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 4x + 16}}{1 - 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{9x^2}}{-2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{-2x} = -\frac{3}{2}$$

3. Estudia la continuidad de la siguiente función, clasificando las discontinuidades cuando las haya:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si \quad x < 1 \\ 3x - 5 & si \quad 1 \leq x < 4 \\ 2^x - 9 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} (3x - 5) = 3 - 5 = -2$$

$$f(1) = 3 - 5 = -2$$

Como $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) = -2 \ \to$ Discontinuidad inevitable de salto infinito en $x = 1$

Continuidad en $x = 4$:

$$\lim_{x \to 4^-} (3x - 5) = 12 - 5 = 7$$

$$\lim_{x \to 4^+} (2^x - 9) = 16 - 9 = 7$$

$$f(4) = 2^4 - 9 = 7$$

Como $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) = f(4) = 7 \quad \to$ Continua en $x = 4$

4. Calcula el valor de k para que la siguiente función sea continua en todo su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 + 4x^2}{x + 2} & si \quad x \neq -2 \\ 2k + x & si \quad x = -2 \end{cases}$$

En $x = -2$:

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{2x^3 + 4x^2}{x + 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to -2^-} \frac{2x^2(x + 2)}{x + 2} = \lim_{x \to -2^-} 2x^2 = 2 \cdot 4 = 8$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{2x^3 + 4x^2}{x + 2} = 8$$

$$f(-2) = 2k - 2 = 2k - 2$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -2$:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = f(-2) \quad \rightarrow \quad 8 = 2k - 2 \quad \rightarrow \quad 2k = 10 \quad \rightarrow \quad k = 5$$