

Números reales, álgebra

1. (1p) Resuelve la desigualdad con valor absoluto $|4 - 2x| \geq 6$

2. (2p) Dado el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 4$

a. (1p) Obtén las raíces y factoriza $P(x)$.

b. (1p) Resuelve la inecuación $P(x) \leq 0$.

3. (1p) Racionaliza y simplifica el resultado todo lo posible:

$$\frac{\sqrt{15} - 3}{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}$$

4. (1.5p) Simplifica:

$$\left[\frac{x^2}{x+3} \cdot \left(\frac{x+1}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) \right] : \frac{1}{x^2 - 9}$$

5. (0.75p) Resuelve y simplifica, empleando las propiedades de las raíces $(\sqrt[3]{x})^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}$

6. (0.75p) Si $\log a = -2$ y $\log b = 3$, calcula sin obtener los valores de A y B el valor de $\log \sqrt{a \cdot b^3}$

7. (1.5p) Discute y resuelve empleando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

8. (1.5p) Resuelve el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x - y < 3 \\ 2x + 3y \geq 6 \\ y < 4 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

1. Resuelve la desigualdad con valor absoluto $|4 - 2x| \geq 6$

Las soluciones de la ecuación $|4 - 2x| = 6$ son:

$$4 - 2x = 6 \rightarrow -2x = 2 \rightarrow x = -1$$

$$-(4 - 2x) = 6 \rightarrow -4 + 2x = 6 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = 5$$

Se representan los valores obtenidos sobre la recta real y se estudia el cumplimiento de la inecuación de cada uno de los intervalos:

$$x = 0 \rightarrow |4 - 2 \cdot 0| = 4 \quad \text{No es mayor o igual que 6}$$

$$x = -2 \rightarrow |4 - 2 \cdot (-2)| = 8 \quad \text{Sí es mayor o igual que 6}$$

$$x = 6 \rightarrow |4 - 2 \cdot 6| = 8 \quad \text{Sí es mayor o igual que 6}$$

Solución gráfica:



Solución como unión de semirrectas: $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

2. Dado el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 4$

a. Obtén las raíces y factoriza $P(x)$.

Se buscan las raíces de $P(x)$ resolviendo la ecuación $x^4 + 2x^3 + x^2 - 4 = 0$:

	1	-2	1	0	-4
-1		-1	3	-4	4
	1	-3	4	-4	0
2		2	-2	4	
	1	-1	2	0	

Obtenemos las otras dos posibles raíces reales resolviendo la ecuación $x^2 - x + 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \nexists$$

Raíces reales: $\{-1, 2\}$

Factorizado $P(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 - x + 2)$

b. Resuelve la inecuación $P(x) \leq 0$.

Se representan las raíces obtenidas en el apartado anterior sobre la recta real y se comprueba el signo de cada uno de los intervalos, estudiando si se cumple o no la inecuación:

$$x = -2 \rightarrow P(-2) = (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 - 4 = 16 + 16 + 4 - 4 = 32$$

$$x = 0 \rightarrow P(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^3 + 0^2 - 4 = -4 \leq 0 \quad (\text{Sí se cumple})$$

$$x = 3 \rightarrow P(3) = 3^4 - 2 \cdot 3^3 + 3^2 - 4 = 81 - 54 + 9 - 4 = 32$$

Solución gráfica:



Solución como intervalo: $[-1, 2]$

3. Racionaliza y simplifica el resultado todo lo posible:

$$\frac{\sqrt{15} - 3}{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{15} - 3}{2\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{15} - 3)(2\sqrt{3} + \sqrt{5})}{(2\sqrt{3} - \sqrt{5})(2\sqrt{3} + \sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{45} + \sqrt{75} - 6\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} =$$

$$\frac{2\sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{3 \cdot 5^2} - 6\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{12 - 5} = \frac{6\sqrt{5} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{7} = \frac{3\sqrt{5} - \sqrt{3}}{7}$$

4. Simplifica:

$$\left[\frac{x^2}{x+3} \cdot \left(\frac{x+1}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) \right] : \frac{1}{x^2-9}$$

$$\left[\frac{x^2}{x+3} \cdot \left(\frac{x+1}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) \right] : \frac{1}{x^2-9} =$$

$$\left[\frac{x^2}{x+3} \cdot \left(\frac{x+1-x}{x^3} \right) \right] : \frac{1}{x^2-9} =$$

$$\left[\frac{x^2}{x+3} \cdot \left(\frac{1}{x^3} \right) \right] : \frac{1}{x^2-9} =$$

$$\frac{x^2}{x^3(x+3)} : \frac{1}{x^2-9} =$$

$$\frac{1}{x(x+3)} : \frac{1}{(x-3)(x+3)} =$$

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x(x+3)} =$$

$$\frac{x-3}{x}$$

5. Resuelve y simplifica, empleando las propiedades de las raíces $(\sqrt[3]{x})^2 \cdot \sqrt[4]{\sqrt{x^3}}$

$$(\sqrt[3]{x})^2 \cdot \sqrt[4]{\sqrt{x^3}} = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[8]{x^3} = \sqrt[24]{x^{16}} \cdot \sqrt[24]{x^9} = \sqrt[24]{x^{25}} = \sqrt[24]{x^{24} \cdot x} = x \sqrt[24]{x}$$

6. Si $\log a = -2$ y $\log b = 3$, calcula sin obtener los valores de A y B el valor de $\log \sqrt{a \cdot b^3}$

$$\log \sqrt{a \cdot b^3} = \log(a \cdot b^3)^{1/2} = \frac{1}{2} \log(a \cdot b^3) = \frac{1}{2} (\log a + \log b^3) = \frac{1}{2} (\log a + 3 \log b) =$$

$$\frac{1}{2} (-2 + 3 \cdot 3) = \frac{7}{2}$$

7. Discute y resuelve empleando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

Tomando la incógnita "z" en E1, se anula en E2 y E3 resolviendo los sistemas $-3E1 + E2$ y $-5E1 + E3$:

$$\begin{array}{r} -3x \quad -3y \quad +3z \quad = \quad -3 \\ 3x \quad +2y \quad +z \quad = \quad 1 \\ \hline \qquad -y \quad +4z \quad = \quad -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -5x \quad -5y \quad +5z \quad = \quad -5 \\ 5x \quad +3y \quad +3z \quad = \quad 1 \\ \hline \qquad -2y \quad +8z \quad = \quad -4 \\ \qquad -y \quad +4z \quad = \quad -2 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = 2 \\ -y + 4z = 2 \end{cases}$$

Las ecuaciones E2 y E3 son iguales por lo que al tomar una incógnita, por ejemplo "y", en E2 y anularla en E3, se obtiene como ecuación $0 = 0$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Se resuelve el sistema:

$$z = \lambda$$

$$E2 \rightarrow -y + 4\lambda = -2 \rightarrow y = 4\lambda + 2$$

$$E1 \rightarrow x + 4\lambda + 2 - \lambda = 1 \rightarrow x = -1 - 3\lambda$$

8. Resuelve el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x - y < 3 \\ 2x + 3y \geq 6 \\ y < 4 \end{cases}$$

$$x - y = 3$$

x	y
0	-3
3	0

Punto (0,0) \rightarrow ¿ $0 - 0 < 3$? \rightarrow Sí verifica la inecuación

$$2x + 3y = 6$$

x	y
0	2
3	0

Punto $(0,0) \rightarrow \text{¿} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \geq 6? \rightarrow \text{No verifica la inecuación}$

$$y = 4$$

Recta horizontal de ordenada en el origen 4. El punto $(0,0)$ no verifica la inecuación.

