Continuidad y Derivabilidad (Teoremas)

Problema 214 1. Calcular

$$\lim_{x\longrightarrow 4}\frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 4}\frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}=\lim_{x\longrightarrow 4}\frac{(\sqrt{x^2-7}-3)(\sqrt{x^2-7}+3)}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow 4}\frac{(\sqrt{x^2-7})^2-3^2}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)}=\lim_{x\longrightarrow 4}\frac{x^2-16}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)}=$$

$$=\lim_{x\longrightarrow 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)}=\frac{8}{\sqrt{9}+3}\Longrightarrow\lim_{x\longrightarrow 4}\frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}=\frac{4}{3}$$

2. Encuentra los valores de k para los que la función

$f(x)=\left\{\begin{array}{rcl}2x-k^2 & si & x<1\\ kx^2 & si & x\geq 1\end{array}\right.$ es continua en todo R

Solución:

Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^-}(2x-k^2)=2-k^2$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+}f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^+}kx^2=k$$

Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 1, mejor dicho, en el 1 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:

$2-k^2=k\ \Longrightarrow\ k^2+k-2=0\ \Longrightarrow\ k=1\ \ k=-2$

Problema 215 1. Encuentra los valores de k para los que la función
$f(x)=\begin{cases} 2x-k^2 & si \quad x<1 \\ kx^2 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$ es continua en todo R

Solución:

Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^-}(2x-k^2)=2-k^2$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^+}kx^2=k$$

Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 1, mejor dicho, en el 1 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos:
$2-k^2=k \Longrightarrow k^2+k-2=0 \Longrightarrow k=1 \quad k=-2$

2. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} & x< & -2 \\ \dfrac{x}{2}+3 & \text{si} & -2\leq x\leq & 0 \\ 5 & \text{si} & x= & 0 \\ x+3 & \text{si} & x> & 0 \end{cases} \quad \text{en } x=-2, \text{ y en } x=0$$

Solución:

Primero estudiamos en $x=-2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow -2} 2=2 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow -2}\left(\dfrac{x}{2}+3\right)=2 \\ f(-2)=2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow -2^+} f(x)=f(-2)=2$$

Luego la función es continua en el punto $x=-2$.

Ahora estudiamos en $x=0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(\dfrac{x}{2}+3\right)=3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(x+3)=3 \\ f(0)=5 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$$

Luego la función no es continua en el punto $x = 0$.

Problema 216 Halla los valores de a y de b para que sea continua la función $f : R \longrightarrow R$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ ax + b & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ x^3 - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solución:

- En $x = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = b \end{array} \right. \Longrightarrow b = 3 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x = 0.$$

- En $x = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = 2a + b = 2a + 3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = 7 \end{array} \right. \Longrightarrow a = 2 \text{ para que } f \text{ sea continua.}$$

en $x = 2$.

En conclusión, f es continua si $a = 2$ y $b = 3$ en todo R.

Problema 217 Encuentra los valores de k para los que la función $f(x) = \begin{cases} 2x - k^2 & si \quad x < 1 \\ kx^2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ es continua en todo R

Solución:

Vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (2x - k^2) = 2 - k^2$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} kx^2 = k$$

Reflexionando un poco llegaremos a la solución pedida. La función que tenemos en el enunciado es continua en todo R, salvo en el 1, mejor dicho, en el 1 es donde tenemos el problema; para que la función sea continua en ese punto es necesario que exista límite en ese punto, y que además el valor de la función en ese punto sea ese límite. Concluimos por tanto con que basta igualar estos límites laterales para obtener los valores que buscamos: $2 - k^2 = k \Longrightarrow k^2 + k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 1 \quad k = -2$

Problema 218 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2 & \text{si} & x < -2 \\ \dfrac{x}{2}+3 & \text{si} & -2 \le x \le 0 \\ 5 & \text{si} & x = 0 \\ x+3 & \text{si} & x > 0 \end{array} \right. \quad \text{en } x=-2, \text{ y en } x=0$$

Solución:

Primero estudiamos en $x = -2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -2} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -2} \left(\dfrac{x}{2}+3\right) = 2 \\ f(-2) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -2^+} f(x) = f(-2) = 2$$

Luego la función es continua en el punto $x = -2$.

Ahora estudiamos en $x = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \left(\dfrac{x}{2}+3\right) = 3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} (x+3) = 3 \\ f(0) = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$$

Luego la función no es continua en el punto $x = 0$.

Problema 219 Halla los valores de a y de b para que sea continua la función $f : R \longrightarrow R$ dada por:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} x^2+3 & \text{si} & x < 0 \\ ax+b & \text{si} & 0 \le x \le 2 \\ x^3-1 & \text{si} & x > 2 \end{array} \right.$$

Solución:

- En $x = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = b \end{array} \right. \Longrightarrow b = 3 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x = 0.$$

- En $x = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = 2a + b = 2a + 3 \\ \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = 7 \end{array}\right. \Longrightarrow a = 2 \text{ para que } f \text{ sea continua.}$$

en $x = 2$.

En conclusión, f es continua si $a = 2$ y $b = 3$ en todo R.

Problema 220 Calcular

1. Halla los valores de a y de b para que sea continua la función $f : R \longrightarrow R$ dada por:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} x^2 + 2 & \text{si} & x < -1 \\ ax + b & \text{si} & -1 \le x \le 2 \\ x^3 + 1 & \text{si} & x > 2 \end{array}\right.$$

Solución:

- En $x = -1$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = -a + b \end{array}\right. \Longrightarrow -a+b = 3 \text{ para que } f \text{ sea continua en } x = 0.$$

- En $x = 2$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = 2a + b \\ \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = 9 \end{array}\right. \Longrightarrow 2a+b = 9 \text{ para que } f \text{ sea continua.}$$

en $x = 2$.

Tenemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrr} -a+ & b = & 3 \\ 2a+ & b = & 9 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 5 \end{array}\right.$$

En conclusión, f es continua si $a = 2$ y $b = 5$ en todo R.

Problema 221 Dada la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{3ax^2}{2} - bx + 1 & \text{si} & x \le 2 \\ ax^3 + bx^2 & \text{si} & x > 2 \end{array}\right.$$

Calcular los parámetros a y b, de manera que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 2$.

Solución:

- Para que la función sea continua en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{3ax^2}{2} - bx + 1 = 6a - 2b + 1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} ax^3 + bx^2 = 8a + 4b \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$6a - 2b + 1 = 8a + 4b \Longrightarrow 2a + 6b - 1 = 0$$

- Para que sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 3ax - b & \text{si} \quad x \le 2 \\ 3ax^2 + 2bx & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable se tiene que cumplir que $f'(2^+) = f'(2^-)$:

$$6a - b = 12a + 4b \Longrightarrow 6a + 5b = 0$$

- Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 2a + 6b \quad -1 = 0 \\ 6a + 5b \qquad\ = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{26} \\ \\ b = \dfrac{3}{13} \end{cases}$$

Problema 222 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 - 1}{2} + bx + 1 & \text{si} \quad x \le 2 \\ \\ ax^3 + bx^2 - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Calcular los parámetros a y b, de manera que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 2$.

Solución:

- Para que la función sea continua en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{ax^2 - 1}{2} + bx + 1 = \dfrac{4a + 4b + 1}{2} \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} ax^3 + bx^2 - 1 = 8a + 4b - 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\frac{4a + 4b + 1}{2} = 8a + 4b - 1 \Longrightarrow 12a + 4b - 3 = 0$$

- Para que sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si} \quad x \le 2 \\ 3ax^2 + 2bx & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable se tiene que cumplir que $f'(2^+) = f'(2^-)$:

$$2a + b = 12a + 4b \Longrightarrow 10a + 3b = 0$$

- Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 12a + 4b & -3 = 0 \\ 10a + 3b & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{9}{4} \\ \\ b = \dfrac{15}{2} \end{cases}$$

Problema 223 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ ax^3 - 3x + b & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Calcular a y b de manera que $f(x)$ cumpla las condiciones del teorema del valor medio.

Solución:

- Para que $f(x)$ sea continua:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (2ax^2 - bx - 1) = a - 3 + b$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (ax^3 - 3x + b) = 2a - b - 1$$

Luego $-a + 2b - 2 = 0$

- Para que $f(x)$ sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 3ax^2 - 3 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 4a - b, \quad f'(1^+) = 3a - 3 \Longrightarrow a - b + 3 = 0$$

Como $f(x)$ tiene que ser continua y derivable:

$$\begin{cases} -a + 2b - 2 = 0 \\ a - b + 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -1 \end{cases}$$