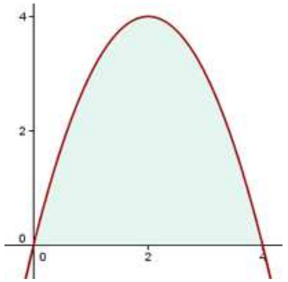
1 Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 4x - x^2$ y el eje OX.

Solución

Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 4x - x^2$ y el eje OX.

1 En primer lugar hallamos los puntos de corte con el eje OX para representar la curva y conocer los límites de integración.

$$0 = 4x - x^2 \qquad x = 0 \qquad x = 4$$



2 En segundo lugar se calcula la integral:

$$A = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{32}{3}u^2$$

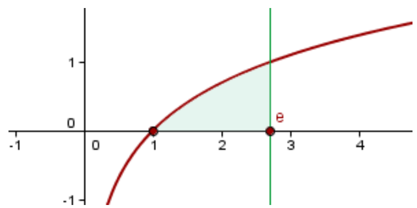
2 Hallar el área de la región del plano encerrada por la curva $y = \ln x$ entre el punto de corte con el eje OX y el punto de abscisa $x = e$.

Solución

Hallar el área de la región del plano encerrada por la curva $y = \ln x$ entre el punto de corte con el eje OX y el punto de abscisa $x = e$.

1 En primer lugar calculamos el punto de corte con el eje de abscisas.

$$\ln x = 0 \qquad e^0 = 1 \qquad (1, 0)$$



$$A = \int_1^e \ln x \, dx$$

2 La integral se resuelve mediante integración por partes

$$u = \ln x \xrightarrow{Derivar} u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 1 \xrightarrow{Integrar} v = x$$

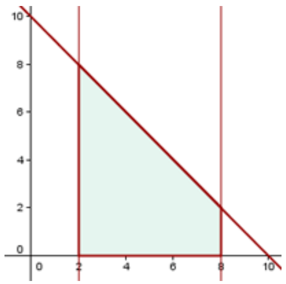
$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + \mathrm{C}$$

$$\int_1^e \ln x \, dx = [x(\ln x - 1)]_1^e = 0 + 1 = 1 \, u^2$$

3 Hallar el área limitada por la recta $x + y = 10$, el eje OX y las ordenadas de $x = 2$ y $x = 8$.

Solución

Hallar el área limitada por la recta $x + y = 10$, el eje OX y las ordenadas de $x = 2$ y $x = 8$.



$$A = \int_2^8 (10 - x) \, dx = \left[10x - \frac{x^2}{2} \right]_2^8 = 30 \, u^2$$

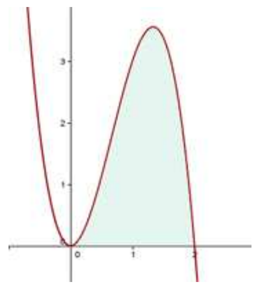
4 Calcular el área limitada por la curva $y = 6x^2 - 3x^3$ y el eje de abscisas.

Solución

Calcular el área limitada por la curva $y = 6x^2 - 3x^3$ y el eje de abscisas.

1 Calculamos los cruces de la función con el eje de las abscisas

$$6x^2 - 3x^3 = 0 \qquad 3x^2(2 - x) = 0 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$$



2 Planteamos y resolvemos la integral definida

$$A = \int_0^2 (6x^2 - 3x^3) dx = \left[2x^3 - \frac{3}{4}x^4 \right]_0^2 = 16 - 12 = 4 \, u^2$$

5 Calcular el área de las regiones del plano limitada por la curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje OX.

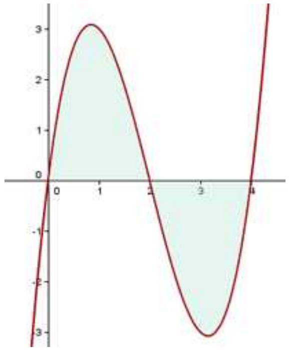
Solución

Calcular el área de las regiones del plano limitada por la curva f(x) = x³ − 6x² + 8x y el eje OX.

1 Calculamos los cruces de la función con el eje de las abscisas

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \qquad x(x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 4$$



2 Planteamos una integral definida

$$A = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx + \left| \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx \right|$$

El área sobre el eje OX es igual al área en valor absoluto del área bajo el eje OX (en el intervalo dado), por tanto se puede escribir:

3 Resolvemos las integrales

$$A = 2\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx = 2\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 = 8\,u^2$$

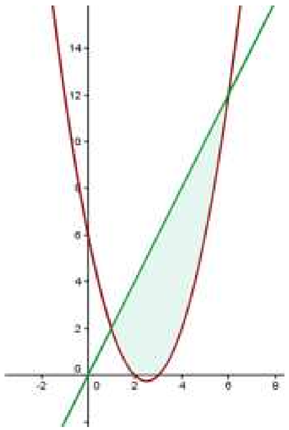
8 Calcular el área limitada por la curva $y = x^2 - 5x + 6$ y la recta $y = 2x$.

Solución

Calcular el área limitada por la curva $y = x^2 - 5x + 6$ y la recta $y = 2x$.

1 En primer lugar hallamos los puntos de corte de las dos funciones para conocer los límites de integración.

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ y = 2x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 6$$



2 De $x = 1$ a $x = 6$, la recta queda por encima de la parábola, por lo que

$$A = \int_1^6 (2x - x^2 + 5x - 6)\, dx = A = \int_1^6 (-x^2 + 7x - 6)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 6\right]_1^6$$

$$= \left(-\frac{6^3}{3} + \frac{7 \cdot 6^2}{2} - 36\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{7}{2} - 6\right) = \frac{125}{6} u^2$$

9 Calcular el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = x$.

Solución

10 Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $3y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

Solución

Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $3y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

1 En primer lugar representamos las parábolas a partir del vértice y los puntos de corte con los ejes.

$$y = \frac{x^2}{3}$$

$$x_v = 0 \quad y_v = 0 \quad V(0,0)$$

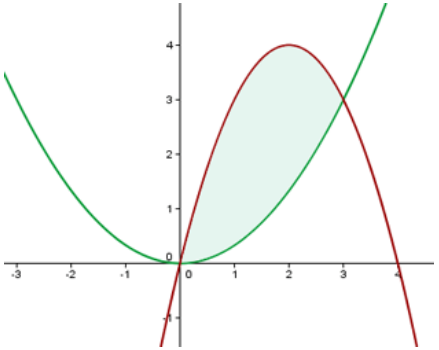
$$y = -x^2 + 4x$$

$$x_v = -\frac{4}{-2} = 2 \quad y_v = 4 \quad V(2,4)$$

$$-x^2 + 4x = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 4$$

2 Hallamos también los puntos de corte de las funciones, que nos darán los límites de integración.

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{3} \\ y = -x^2 + 4x \end{cases} \Rightarrow \quad (0,0) \quad (3,3)$$



$$\int_0^3 \left(-x^2 + 4x - \frac{x^2}{3}\right) dx = \int_0^3 \left(-\frac{4}{3}x^2 + 4x\right) dx$$

$$= \left[-\frac{4}{9}x^3 + 2x^2\right]_0^3 = -12 + 18 = 6\, u^2$$

11 Calcula el área de la figura plana limitada por las parábolas $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 4x$.

Solución

Calcula el área de la figura plana limitada por las parábolas $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 4x$.

1 Representamos las parábolas a partir del vértice y los puntos de corte con los ejes.

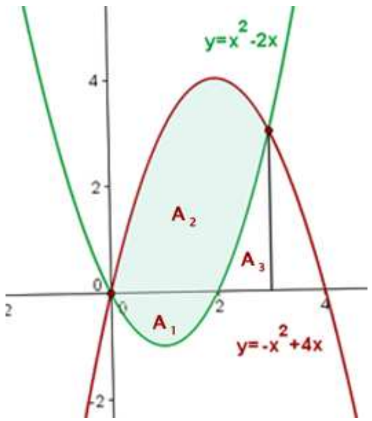
$$x_v = \frac{2}{2} = 1 \quad y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1 \quad V(1, -1)$$

$$0 = x^2 - 2x \quad 0 = x(x-2) \quad (0,0) \ \ (2,0)$$

$$x_v = \frac{-4}{-2} = 2 \quad y_v = -2^2 + 4 \cdot 2 = 4 \quad V(2, -4)$$

$$0 = -x^2 + 4x \quad 0 = x(-x+4) \quad (0,0) \ \ (4,0)$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = -x^2 + 4x \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 - 2x = -x^2 + 4x \quad \Rightarrow \quad (0,0) \ \ (3,3)$$



2 Consideramos las áreas que quedan sobre y debajo del eje de las abscisas para poder calcular el área total

$$A_1 = \int_0^2 (x^2 - 2x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = -\frac{4}{3} \quad |A_1| = \frac{4}{3} u^2$$

$$A_2 = \int_0^3 (-x^2 + 4x)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^3 = 9 \quad A_2 = 9\, u^2$$

$$A_3 = \int_2^3 (x^2 - 2x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^3 = \frac{4}{3} \quad A_3 = \frac{4}{3} u^2$$

$$A = |A_1| + A_2 - A_3 = \frac{4}{3} + 9 - \frac{4}{3} = 9\, u^2$$

¿Necesitas un/a profe de Matemáticas?

Matemáticas

¿En dónde? (dirección, ciudad...)