UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2015-2016**

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese el determinante de la matriz

$$A \cdot C \cdot C^T \cdot A^{-1}.$$

b) Calcúlese la matriz $M = A \cdot B$. ¿Existe M^{-1}?

Nota: C^T denota la matriz traspuesta de la matriz C.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sea S la región del plano definida por:

$$y + x \leq 5; \quad y - x \leq 3; \quad \frac{1}{2}x - y \leq -2.$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 + 8.$$

a) Determínese el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y por las rectas $x = -3$ y $x = -1$.

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una conocida orquesta sinfónica está compuesta por un 55 % de varones y un 45 % de mujeres. En la orquesta un 30 % de los instrumentos son de cuerda. Un 25 % de las mujeres de la orquesta interpreta un instrumento de cuerda. Calcúlese la probabilidad de que un intérprete de dicha orquesta elegido al azar:

a) Sea una mujer si se sabe que es intérprete de un instrumento de cuerda.

b) Sea intérprete de un instrumento de cuerda y sea varón.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja familiar de ganado vacuno se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviacion típica $\sigma = 50$ litros.
a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 10 litros.

b) Se toman los datos de producción de 25 días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas, $\overline{X}$, sea menor o igual a 940 litros si sabemos que $\mu = 950$ litros.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x & +2y & +z & = 1 \\ x & +2y & +3z & = 0 \\ x & +ay & +2z & = 0 \end{cases}$$

a) Discútase para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Resuélvase para $a = 0$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x+b}{x-2} & \text{si } x \leq -1, \\ \\ \dfrac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

a) Determínese para qué valores del parámetro b la función $f(x)$ es continua en $x = -1$.

b) Calcúlense las asíntotas de $f(x)$.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sabiendo que la derivada de una función real de variable real es:

$$f'(x) = 6x^2 + 4x - 2.$$

a) Determínese la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 5$.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f así como sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Tenemos dos urnas A y B. La urna A contiene 5 bolas: 3 rojas y 2 blancas. La urna B contiene 6 bolas: 2 rojas y 4 blancas. Se extrae una bola al azar de la urna A y se deposita en la urna B. Seguidamente se extrae una bola al azar de la urna B. Calcúlese la probabilidad de que:

a) La segunda bola extraída sea roja.

b) Las dos bolas extraídas sean blancas.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El peso por unidad, en gramos, de la gamba roja de Palamós, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 5$ gramos.

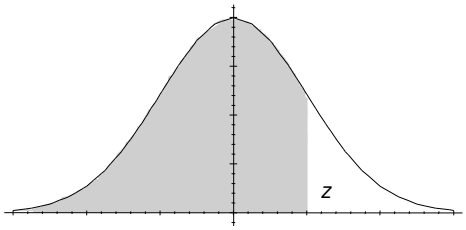
a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 25 gambas y la media de sus pesos ha sido $\overline{x} = 70$ gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Si sabemos que $\mu = 70$ gramos, y se consideran los pesos de las 12 gambas de una caja como una muestra aleatoria simple, calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 12 gambas sea mayor o igual que 855 gramos.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos

OPCIÓN A

Ejercicio 1: (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado a) 1 punto.
Planteamiento……0,50 puntos.
Cálculo correcto del determinante ……..……..0,50 puntos.
Apartado b) 1 punto.
Cálculo correcto de la matriz M….……..0,50 puntos.
Argumento correcto de la no existencia de la inversa..……..…… …….0,50 puntos.

Ejercicio 2: (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado a) 1 punto.
Representación correcta de la región.....0,50 puntos.
Obtención de los vértices…….....0,50 puntos.
Apartado b) 1 punto.
Obtención del máximo y valor máximo .....0,50 puntos.
Obtención del mínimo y valor mínimo .....0,50 puntos.

Ejercicio 3: (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado a) 1 punto.
Planteamiento correcto……. …….0,25 puntos.
Cálculo correcto de la primitiva…….....0,50 puntos.
Cálculo del área…….....0,25 puntos.
Apartado b): 1 punto.
Fórmula correcta de la expresión de la tangente.....0,25 puntos.
Cálculo correcto de la pendiente de la recta tangente.....0,50 puntos.
Obtención correcta de la recta tangente.....0,25 puntos.

Ejercicio 4: (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado a) 1 punto.
Planteamiento correcto.....0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida.....0,50 puntos.

Apartado b) 1 punto.
Planteamiento correcto.....0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida.....0,50 puntos.
Ejercicio 5: (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado a) 1 punto.
Planteamiento correcto.....0,25 puntos.
Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ ……....0,25 puntos
Cálculo correcto del tamaño de la muestra.....0,50 puntos.
Apartado b) 1 punto.
Planteamiento correcto……0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad……0,50 puntos.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado a): 1 punto.
Determinación del valor crítico .....0,50 puntos.
Discusión correcta.....0,50 puntos.
Apartado b): 1 punto.
Solución correcta del sistema.....1,00 punto.

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado a): 1 punto.
Cálculo correcto límites laterales y valor de la función en x=-1 .....0,50 puntos.
Discusión correcta.....0,50 puntos.
Apartado b): 1 punto.
Argumentación de la no existencia de asíntotas verticales.....0,25 puntos.
Determinación asíntotas horizontales..... 0,75 puntos

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado a): 1 punto.
Cálculo correcto de las primitivas ..... 0,50 puntos.
Determinación correcta de la función .....0,50 puntos.
Apartado b): 1 punto.
Determinación correcta intervalos crecimiento y decrecimiento..... 0,50 puntos.
Determinación correcta del máximo y del mínimo local…….0,50 puntos.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado a) 1 punto.
Planteamiento correcto.....0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida.....0,50 puntos.
Apartado b) 1 punto.
Planteamiento correcto.....0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida.....0,50 puntos.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado a) 1 punto.
Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ .....0,25 puntos.
Expresión correcta de la fórmula del intervalo de confianza.....0,25 puntos.
Obtención correcta del intervalo de confianza.....0,50 puntos.
Apartado b) 1 punto.
Planteamiento correcto.....0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad.....0,50 puntos.

NOTA: La resolución de ejercicios por cualquier otro procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

OPCION A

Problema 1

a) $|A \cdot C \cdot C^t \cdot A^{-1}| = |A||C||C^t||A^{-1}| = |A^2| = 4(|C| = |C^t||A| \cdot |A^{-1}| = 1)$

b)

$$M = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 37 & 26 \\ 33 & 21 \end{pmatrix}$$

$$No\ tiene\ inversa\ pues\ no\ es\ cuadrada$$

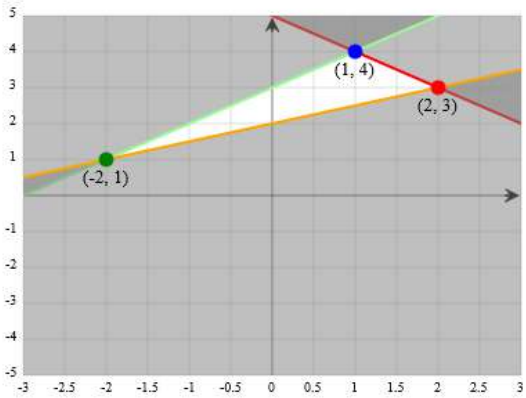
Problema 2

a) *Funcion objetivo f(x,y)=2x+y*

recta verde: y=x+3

recta roja: y=-x+5

recta amarilla y=1/2x+2



Vértice	Rectas tras vértice
● (1, 4)	$x + y = 5$ $x - y = -3$
● (2, 3)	$x + y = 5$ $x - 2y = -4$
● (-2, 1)	$x - y = -3$ $x - 2y = -4$

b) *z=f(-2,1)=-3 Mínimo*

z=f(1,4)=6

z=f(2,3)=7 Máximo

Problema 3

a) $x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x = -2\ Luego\ hay\ dos\ áreas\ S_1\ de [-3, -2]\ y\ S_2\ en\ [-2, -1]$

$$S_1 = \int_{-3}^{-2} (x^3 + 8)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} + 8x\right]_{-3}^{-2} = -\frac{33}{4}$$

$$S_2 = \int_{-2}^{-1} (x^3 + 8)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} + 8x\right]_{-2}^{-1} = \frac{17}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{25}{2} u^2$$

b) $b = f(1) = 9\ f'(x) = 3x^2\ m = f'(1) = 3$

$$y - 9 = 3(x - 1)$$

Problema 4

$$P(H) = 0.55\ P(M) = 0.45\ P(C) = 0.3 P(^{C}/_{M}) = 0.25$$

a) $P(^{M}/_{C}) = \frac{P(M)\cdot P(^{C}/_{M})}{P(C)} = \frac{0.45\cdot 0.25}{0.30} = 0.375$

b) $P(H \cap C) + P(M \cap C) = P(C)$

$$P(H \cap C) = P(C) - P(M \cap C) = P(C) - P(^{C}/_{M}) \cdot P(M) = 0.3 - 0.25 \cdot 0.45 = 0.1875$$

Problema 5

a) $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96\ E = 5$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \frac{50}{\sqrt{n}} = 5 \Rightarrow n > 96.04 \Rightarrow n = 97$$

b) $n = 25\ \mu = 950\ \overline{X} \sim N\left(950, \frac{50}{\sqrt{25}}\right) = N(950,10)$

$$P(\overline{X} \leq 940) = P(Z \leq \frac{940 - 950}{10}) = P(Z \leq -1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

OPCION B

Problema 1

a) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 0 \end{pmatrix} |A| = -2a + 4 = 0 \Rightarrow a = 2$

$$Si\ a \neq 2\ |A| \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 3 = rango(A') = 3 = n^{\underline{o}}\ de\ incognitas\ \Rightarrow SCD$$

$$Si\ a = 2 A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} Todos\ los\ menores\ de\ orden\ 3\ son\ 0\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$
$$\Rightarrow rango(A') = 2 = rango(A) < n^{\underline{o}}\ de\ incognitas\ \Rightarrow SCI$$

b) $Si\ a = 0 \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = {}^{1}/_{4} \\ z = {}^{-1}/_{2} \end{cases}$

Problema 2

a) $Continuidad\ en\ x = -1$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{-x + b}{x - 2} = -\frac{1 + b}{3}$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 4x + 3} = \left[\frac{0}{0}\right] = L'HOPITAL = \lim_{x \to -1^+} \frac{2x + 6}{2x + 4} = 2$$

$$-\frac{1+b}{3} = 2 \Rightarrow b = -7$$

b) $Asíntotas$

$Verticales\ no\ hay\ porque\ x = 2\ no\ está\ en\ la\ rama\ x < -1$

$Horizontales$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x+b}{x-2} = -1 \ \Rightarrow y = -1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} = 1 \Rightarrow y = 1$$

Problema 3

a)

$$f(x) = \int 6x^2 + 4x - 3dx = 2x^3 + 2x^2 - 2x + C$$

$$f(0) = 5 \Rightarrow C = 5 \Rightarrow f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 5$$

b) $f'(x) = 6x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1\ x = {}^{1}/_{3}$

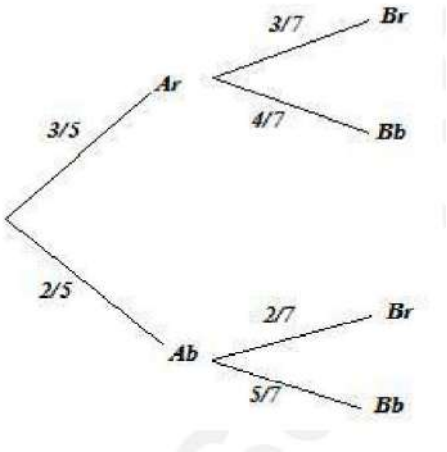
	$(-\infty,-1)$	$(-1,{}^{1}/_{3})$	$({}^{1}/_{3},\infty)$
$Signo\ de\ f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$Creciente$	$Decreciente$	$Creciente$

$$Tiene\ un\ mínimo\ en\ ({}^{1}/_{3}, {}^{125}/_{27})\ y\ un\ máximo\ en\ (-1,7)$$

Problema 4

a) $P(B_r) = \frac{3}{5}\frac{3}{7} + \frac{2}{5}\frac{2}{7} = \frac{13}{35} = 0.371$

b)$P(A_b \cap B_b) = \frac{2}{5}\frac{5}{7} = \frac{2}{7} = 0.286$



Problema 5

a) $N(\mu, 650)\sigma = 5\ n = 25\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96\ \overline{X} = 70$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \frac{5}{\sqrt{25}} = 1.96$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (68.04, 71.96)$$

b) $\mu = 70\ n = 12\ \frac{855}{12} = 71.25$

$$P\left(\overline{X} \geq 71.25\right) = 1 - P\left(\overline{X} \leq 71.25\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{71.25 - 70}{5/\sqrt{12}}\right) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.87) = 1 - 0.8023 = 0.1977$$