# REGLA DE L`HÔPITAL

**1** $$\lim_{x\to1}\frac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)}$$

Solución

1 **Identificar indeterminación**

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)}=\frac{\ln(2(1)^2-1)}{\tan((1)-1)}=\frac{\ln(1)}{\tan(0)}=\frac{0}{0}$$

2 **Aplicar la regla de L'Hôpital**

Derivamos el númerador y denominador del cociente. Tomamos límite.

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{4x}{2x^2-1}}{\sec^2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{4(1)}{2(1)^2-1}}{\sec^2((1)-1)}=\frac{\frac{4}{1}}{1}=4$$

3 **Obtener el límite**

$$\lim_{x\to1}\frac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)}=4$$

**2** $$\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x^3}$$

Solución

1 **Identificar indeterminación**

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x^3}=\frac{(0)-\operatorname{sen}(0)}{(0)^3}=\frac{0}{0}$$

2 **Aplicar la regla de L'Hôpital**

Derivamos el númerador y denominador del cociente. Tomamos límite.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{3x^2}=\frac{1-\cos(0)}{3(0)^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

Obtenemos nuevamente una indeterminación por lo que aplicaremos la regla de L'Hôpital otra vez

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{6x}=\frac{\operatorname{sen}(0)}{6\cdot0}=\frac{0}{0}$$

Una vez más

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(x)}{6}=\frac{\cos(0)}{6}=\frac{1}{6}$$

3 **Obtener el límite**

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x^3}=\frac{1}{6}$$

**3** $$\lim_{x\to1}\frac{1-\cos(x-1)}{(\ln(x))^2}$$

Solución

1 **Identificar indeterminación**

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\cos(x-1)}{(\ln(x))^2}=\frac{1-\cos((1)-1)}{(\ln(1))^2}=\frac{0}{0}$$

2 **Aplicar la regla de L'Hôpital**

Derivamos el númerador y denominador del cociente. Tomamos límite.

$$\lim_{x\to1}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{\frac{2\ln(x)}{x}}=\frac{\operatorname{sen}((1)-1)}{\frac{2\ln(1)}{(1)}}=\frac{0}{0}$$

Volvemos a aplicar la regla

$$\lim_{x\to1}\frac{\cos(x-1)}{\frac{2-2\ln(x)}{x^2}}=\frac{\cos((1)-1)}{\frac{2-2\ln(1)}{(1)^2}}=\frac{1}{2}$$

3 **Obtener el límite**

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\cos(x-1)}{(\ln(x))^2}=\frac{1}{2}$$

**4** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)-1}{x^2}$

Solución

1 **Identificar indeterminación**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)-1}{x^2}=\frac{\cos^2(0)-1}{(0)^2}=\frac{0}{0}$$

2 **Aplicar la regla de L'Hôpital**

Derivamos el númerador y denominador del cociente. Tomamos límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos(x)\sin(x)}{2x}=\frac{-2\cos(0)\sin(0)}{2(0)}=\frac{0}{0}$$

Utilizamos la siguiente propiedad de la funciones trigonométricas

$\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$, y volvemos aplicar la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos(x)\sin(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(2x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos(2x)}{2}=-1$$

3 **Obtener el límite**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)-1}{x^2}=-1$$

## Formas de Indeterminaciones en potencias

Las formas indeterminadas $0^0, \infty^0$ y $1^\infty$ se obtienen cuando consideramos expresiones de la forma

$$[f(x)]^{g(x)}$$

Estas indeterminaciones se resuelven primero aplicando propiedades del logaritmo:

Tengo mi función

$$y=[f(x)]^{g(x)}$$

Aplico logaritmo

$$\ln(y)=\ln([f(x)]^{g(x)})=g(x)\ln(f(x))$$

Aplico exponencial

$$y=e^{g(x)\ln(f(x))}$$

Entonces

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to a}e^{g(x)\ln(f(x))}=e^{\lim_{x\to a}g(x)\ln(f(x))}$$

Por lo que para resolver el límite inicial, me basta con obtener el límite de su logaritmo

$$\lim_{x\to a}g(x)\ln(f(x))=L$$

Y así, el límite original será

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=e^L$$

## Ejercicios resueltos con indeterminaciones

**1** $\lim_{x\to 0}(\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}}$

Solución

1 **Identificar indeterminación**

$$\lim_{x\to 0}(\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}}=(\cos(2(0)))^{\frac{3}{(0)^2}}=1^\infty$$

2 **Tomamos límite del logaritmo**

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2}\ln(\cos(2x))=\lim_{x\to 0}\frac{3\ln(\cos(2x))}{x^2}=\frac{3\ln(\cos(2\cdot 0))}{0^2}=\frac{0}{0}$$

Tenemos forma indeterminada $\frac{0}{0}$

3 **Aplicar regla de L'Hôpital**

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\frac{-2\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-3\tan(2x)}{x}=\frac{0}{0}$$

Forma indeterminada $\frac{0}{0}$

Aplicamos regla de L'Hôpital de nuevo

$$\lim_{x\to 0} \frac{-12\csc^2(2x)}{2} = \frac{-12\csc^2(2\cdot 0)}{2} = -6$$

4 **Obtenemos el límite**

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{3}{x^2} \ln(\cos(2x)) = -6$$

Y entonces

$$\lim_{x\to 0} (\cos(2x))^{\frac{3}{x^2}} = e^{-6}$$

**2** $\lim_{x\to 0} (\cot(x))^{\operatorname{sen}(x)}$

Solución

1 **Identificar indeterminación**

$$\lim_{x\to 0} (\cot(x))^{\operatorname{sen}(x)} = (\cot(0))^{\operatorname{sen}(0)} = \infty^0$$

2 **Tomamos límite del logaritmo**

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)\ln(\cot(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cot(x))}{\csc(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Tenemos forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$

3 **Aplicar regla de L'Hôpital**

Al derivar obtenemos

$$\frac{\frac{-\csc^2(x)}{\cot(x)}}{-\csc(x)\cot(x)} = \frac{\csc(x)}{\cot^2(x)} = \frac{\tan^2(x)}{sen(x)} = \tan(x)\sec(x)$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0} \tan(x)\sec(x) = \tan(0)\sec(0) = 0\cdot 1 = 0$$

4 **Obtenemos el límite original**

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)\ln(\cot(x)) = 0$$

Y entonces

$$\lim_{x\to 0} (\cot(x))^{\operatorname{sen}(x)} = e^0 = 1$$

**3** $\lim_{x\to 0} x^{\tan(x)}$

Solución

1 **Identificar indeterminación**

$$\lim_{x\to 0} x^{\tan(x)} = \lim_{x\to 0} (0)^{\tan(0)} = \infty^0$$

2 **Tomamos límite del logaritmo**

$$\lim_{x\to 0} \tan(x)\ln(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\cot(x)} = \frac{-\infty}{\infty}$$

Tenemos forma indeterminada $\frac{-\infty}{\infty}$

3 **Aplicar regla de L'Hôpital**

Al derivar obtenemos

$$\frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2(x)} = -\frac{\sin^2(x)}{x}$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2(x)} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin^2(x)}{x} = -\frac{\sin^2(0)}{0} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos L'Hôpital de nuevo

$$\lim_{x\to 0} -\frac{2\sin(x)\cos(x)}{1} = -\frac{2\sin(0)\cos(0)}{1} = 0$$

4 **Obtenemos el límite original**

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \tan(x)\ln(x) = 0$$

Y entonces

$$\lim_{x\to 0} x^{\tan(x)} = e^0 = 1$$

4 $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

Solución

1 **Identificar indeterminación**

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \left(\frac{2}{2}\right)^{\frac{1}{(2)-2}} = 1^{\infty}$$

2 **Calculamos el límite del logaritmo**

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \lim_{x \to 2} \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{x-2} = \frac{\ln\left(\frac{2}{2}\right)}{2-2} = \frac{0}{0}$$

Tenemos forma indeterminada $\frac{0}{0}$

3 **Aplicar regla de L'Hôpital**

Al derivar obtenemos

$$\lim_{x \to 2} \frac{\frac{1/2}{x/2}}{1} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

4 **Obtenemos el límite original**

Por lo tanto

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Y entonces

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

## Ejercicios resuletos de la indeterminacion infinito menos infinto

En estos casos tenemos que tener en ver que tan "rápido" las funciones se van a infinito.

Además si son fracciones, se ponen a común denominador.

1 $\lim\limits_{x \to 0} \left(\cot(x) - \frac{1}{x}\right)$

Solución

1 **Identificar indeterminación**

$$\lim_{x \to 0} \left(\cot(x) - \frac{1}{x}\right) = \cot(0) - \frac{1}{0} = \infty - \infty$$

2 **Reescribimos la expresión**

$$\lim_{x \to 0} \left(\cot(x) - \tfrac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\tfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} - \tfrac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\tfrac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x\operatorname{sen}(x)}\right) = \tfrac{0}{0}$$

3 **Aplicar regla de L'Hôpital**

Al derivar obtenemos

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos(x) - x\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{-x\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)}\right) = \frac{0}{0}$$

Obtengo otra indeterminación, por lo que vuelvo a aplicar la reglar

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{-\operatorname{sen}(x) - x\cos(x)}{2\cos(x) + x\operatorname{sen}(x)}\right) = \left(\frac{-\operatorname{sen}(0) - (0)\cos(0)}{2\cos(0) + (0)\operatorname{sen}(0)}\right) = \frac{0}{2} = 0$$

4 **Obtenemos el límite**

Por lo tanto

$$\lim_{x \to 0} \left(\cot(x) - \frac{1}{x}\right) = 0$$

**2** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)$

Solución

1 **Identificar indeterminación**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{\operatorname{sen}(0)}=\infty-\infty$$

2 **Reescribimos la expresión**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x\operatorname{sen}(x)}\right)=\frac{0}{0}$$

3 **Aplicar regla de L'Hôpital**

Al derivar obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(x)-1}{\operatorname{sen}(x)+x\cos(x)}\right)=\frac{0}{0}$$

Obtengo otra indeterminación, por lo que vuelvo a aplicar la reglar

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin(x)}{2\cos(x)-x\operatorname{sen}(x)}\right)=\frac{0}{2}=0$$

4 **Obtenemos el límite**

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)=0$$

## Indeterminación cero por infinito

Estas formas de indeterminación se pueden transformar a casos que ya vimos, como $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

Como se muestra a continuación, tenemos que

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=0\cdot\infty$$

donde $\lim_{x\to a} f(x)=0$ y $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$

Entonces lo podemos reescribir de tal manera que sea más fácil sacar la derivada

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{0}{0}$$

ó

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\frac{\infty}{\infty}$$

Teniendo esto ya podemos usar la regla de L'Hôpital

## Ejercicios resueltos de la indeterminación cero por infinito

**1** $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$

Solución

1 **Identificar indeterminación**

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)=(0)\ln(0)=(0)(-\infty)$$

2 **Reescribimos la expresión**

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{\infty}$$

Indeterminación de tipo $\frac{\infty}{\infty}$

3 **Aplicar regla de L'Hôpital**

Al derivar obtenemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

4 **Obtenemos el límite**

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

**2** $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan(x) - 1)\sec(2x)$

Solución

1 **Identificar indeterminación**

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{\operatorname{sen}(0)} = \infty - \infty$$

2 **Reescribimos la expresión**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan(x) - 1)\sec(2x) = (\tan(\frac{\pi}{4}) - 1)\sec(2\frac{\pi}{4}) = 0\cdot\infty$$

Expresamos lo mismo de una manera conveniente para poder aplicar la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan(x) - 1)\sec(2x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)-1}{\frac{1}{sec(2x)}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)-1}{\cos(2x)} = \frac{0}{0}$$

3 **Aplicar regla de L'Hôpital**

Al derivar obtenemos

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2(x)}{-2\operatorname{sen}(2x)} = \frac{\sec^2(\frac{\pi}{4})}{-2\operatorname{sen}(2\frac{\pi}{4})} = -1$$

4 **Obtenemos el límite**

Por lo tanto

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan(x) - 1)\sec(2x) = -1$$

## Ejercicios diversos de indeterminaciones y regla de L'Hôpital

**1** $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$

Solución

1 **Identificar indeterminación**

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{0}{0}$$

2 **Aplicar la regla de L'Hôpital**

Derivamos el númerador y denominador del cociente. Tomamos límite.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

3 **Obtener el límite**

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

**2** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x - \frac{3}{2}\sin 2x}$

Solución

1 **Identificar indeterminación**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x - \frac{3}{2}\sin 2x} = \frac{0}{0}$$

2 **Aplicar la regla de L'Hôpital**

Derivamos el númerador y denominador del cociente. Tomamos límite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\cos 3x}{1 - 3\cos 2x} = -\frac{3}{2}$$

3 **Obtener el límite**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x - \frac{3}{2}\sin 2x} = -\frac{3}{2}$$

**3** $\lim_{x\to 0}(\arcsin x \cot x)$

Solución

**1 Identificar indeterminación**

$\lim_{x\to 0}(\arcsin x \cot x) = 0 \cdot \infty$

**2 Reformulación del problema**

Solo expresando de diferente manera podremos encontrar las condiciones para aplicar regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}(\arcsin x \cot x) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x \arcsin x}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

**3 Aplicar la regla de L'Hôpital**

Derivamos el númerador y denominador del cociente. Tomamos límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x \arcsin x + \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x} = 1$$

**4 Obtener el límite**

$\lim_{x\to 0}(\arcsin x \cot x) = 1$

**4** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\frac{\text{sen }x}{\tan x}(1+\tan 2x)^{\frac{4}{x}}\right]$

Solución

**1 Identificar indeterminación**

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\frac{\text{sen }x}{\frac{\text{sen }x}{\cos x}}(1+\tan 2x)^{\frac{4}{x}}\right] = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\cos x \lim\limits_{x\to 0}(1+\tan 2x)^{\frac{4}{x}} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan 2x)^{\frac{4}{x}} = 1^{\infty}$

**2 Calculamos el límite del logaritmo**

$$\lim_{x\to 0}\frac{4}{x}\ln(1+\tan 2x) = \lim_{x\to 0}\frac{4\ln(1+\tan 2x)}{x} = \frac{0}{0}$$

Tenemos forma indeterminada $\frac{0}{0}$

**3 Aplicar la regla de L'Hôpital**

Derivamos el númerador y denominador del cociente. Tomamos límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\ln(1+\tan 2x)}{x} = 4\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x}{1+\tan 2x} = 8\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan 2x} = 8$$

**4 Obtener el límite**

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\frac{\text{sen }x}{\tan x}(1+\tan 2x)^{\frac{4}{x}}\right] = \frac{1}{2}e^8$$

**5** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x\sin x}$

Solución

**1 Identificar indeterminación**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x\sin x} = \frac{0}{0}$$

**2 Calculamos el límite del logaritmo**

$$\lim_{x\to 0}\frac{4}{x}\ln(1+\tan 2x) = \lim_{x\to 0}\frac{4\ln(1+\tan 2x)}{x} = \frac{0}{0}$$

Tenemos forma indeterminada $\frac{0}{0}$

**3 Aplicar la regla de L'Hôpital**

Derivamos el númerador y denominador del cociente. Tomamos límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{\sin x + x\cos x} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos la regla de lopital otra vez

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}+\sin x}{\cos x+\cos x - x\sin x} = -\frac{1}{2}$$

**4 Obtener el límite**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x\sin x} = -\frac{1}{2}$$

**6** $\lim_{x \to 0} \frac{1+\sin x - e^x}{\arctan^2 x}$

Solución

1 **Identificar indeterminación**

$$\lim_{x \to 0} \frac{1+\sin x - e^x}{\arctan^2 x} = \frac{0}{0}$$

2 **Aplicar la regla de L'Hôpital**

Derivamos el númerador y denominador del cociente. Tomamos límite.

$$\frac{\cos x - e^x}{\frac{2\arctan x}{1+x^2}} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital otra vez

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\sin x - e^x}{\frac{2-4x\arctan x}{(1+x^2)^2}} = -\frac{1}{2}$$

3 **Obtener el límite**

$$\lim_{x \to 0} \frac{1+\sin x - e^x}{\arctan^2 x} = -\frac{1}{2}$$

**7** $\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right]$

Solución

1 **Identificar indeterminación**

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right] = \infty - \infty$$

2 **Reescribimos la expresión**

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

3 **Aplicar la regla de L'Hôpital**

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1+x)+x\ln(1+x)+x} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital otra vez

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1}{1+x}+\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}+1} = \frac{1}{2}$$

4 **Obtener el límite**

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right] = \frac{1}{2}$$

**8** $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

Solución

1 **Identificar indeterminación**

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = 1^\infty$$

2 **Tomamos límite del logaritmo**

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin x}\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+\tan x)-\ln(1+\sin x)}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

Tenemos forma indeterminada $\frac{0}{0}$

3 **Aplicar la regla de L'Hôpital**

$$\frac{\frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x} - \frac{\cos x}{1+\sin x}}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

4 **Obtener el límite original**

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = e^0$$

**9** $\lim_{x\to 0} x^{\sin x}$

Solución

1 **Identificar indeterminación**

$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = 0^0$

2 **Tomamos límite del logaritmo**

$\lim_{x\to 0} \sin x \ln(x) = 0 \cdot (-\infty)$

Rescribimos de manera conveniente

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

Tenemos forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$

3 **Aplicar la regla de L'Hôpital**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin^2 x}{x \cos x} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital otra vez

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x \cos x}{\cos x - x \sin x} = \frac{0}{1} = 0$$

4 **Obtener el límite original**

$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = e^0 = 1$