

# EXAMEN DE DERIVADAS

Se recomienda:

- Antes de hacer algo, leer todo el examen.
- Resolver antes las preguntas que se te den mejor.
- Responde a cada parte del examen en una hoja distinta.
- Es una hoja de examen por las dos caras sobre la que no se escribe nada.

**1 Se considera la curva de ecuación  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ . Halla la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto de abscisa  $x = 1$  ( $f' \rightarrow 0.5$  p;  $f'(1) \rightarrow 0.25$  p; ecuación  $\rightarrow 0.35$  p)(# 1.1 p)**

**2 Se considera la función real de variable real definida por:**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + a & \text{if } x < 1 \\ \frac{3}{bx} & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

**Calculéanse los valores  $a$  y  $b$  para que  $f$  sea continua y derivable en todos los puntos.**

**(continua  $\rightarrow 0.6$  p; derivable  $\rightarrow 0.7$  p; ecuación  $\rightarrow 0.5$  p)(# 1.8 p)**

**3 Obtén con la calculadora el valor de  $\ln 3.02$  y obténlo también mediante la aproximación lineal de  $f(x) = \ln x$  en  $x = 3$  (cal  $\rightarrow 0.15$  p;  $f' \rightarrow 0.45$  p;  $f'(3) \rightarrow 0.25$  p; aprox  $\rightarrow 0.6$  p)(# 1.45 p)**

**4 Halla la derivada de cada una de las siguientes funciones:**

4.1  $f(x) = \frac{3x}{(1 + 2x)^3}$  (0.8 p)

4.2  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$  (0.6 p)

4.3  $f(x) = x^2 \cdot e^x$  (0.7 p)

4.4  $f(x) = \frac{\cos 2x}{3}$  (0.5 p)

4.5  $f(x) = \ln\left(\frac{3x^2 - 1}{4x + 3}\right)$  (1.3 p)

4.6  $f(x) = \arctan(2^x \cdot x^2)$  (1.35 p)(# 5.25 p)

# SOLUCIÓN

$$1 f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

La ecuación de la recta tangente a la curva en  $x = 1$  será  $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$

Por lo tanto, hemos de calcular los siguientes elementos:

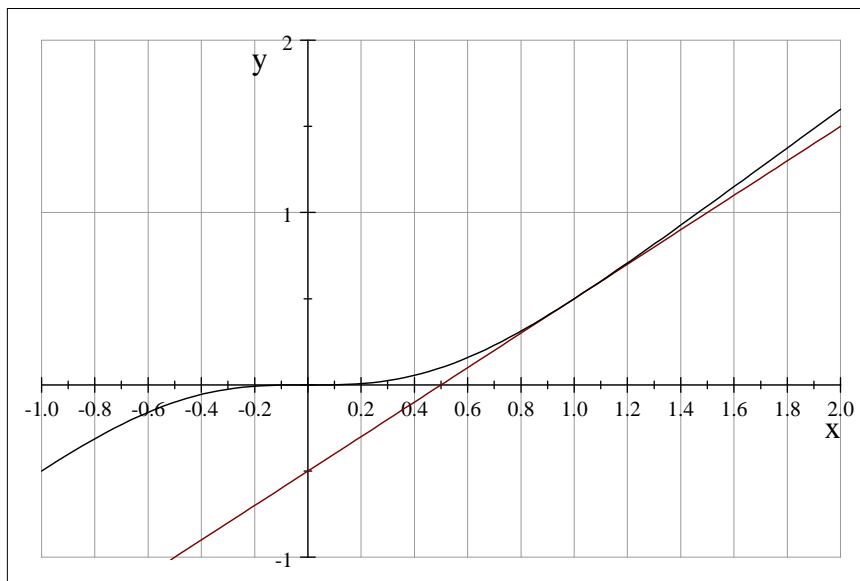
$$\bullet f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3(2x + 0)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + 3)x^2}{(x^2 + 1)^2} \quad 0.5 \text{ p}$$

$$\bullet f'(1) = \frac{(1^2 + 3) \cdot 1^2}{(1^2 + 1)^2} = \frac{(1 + 3) \cdot 1}{(1 + 1)^2} = \frac{4}{2^2} = \frac{4}{4} = 1 \quad 0.25 \text{ p}$$

$$\bullet f(1) = \frac{1^3}{1^2 + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Finalmente, tenemos  $y = \frac{1}{2} + 1(x - 1)$  0.35 p

Gráficamente la situación sería:



$$2 f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + a & \text{if } x < 1 \\ \frac{3}{bx} & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

Para que pueda ser derivable en todos los puntos, primero ha de ser continua, dado que la derivabilidad implica la continuidad.

Como se trata de una función definida a trozos, sólo habrá problemas en el punto dónde la función cambia de una definición a otra. No hay problemas de definición con el trozo definido mediante una fracción algebraica, dado que se anula en  $x = 0$ , y ese valor no lo estamos considerando para ese trozo; cae en el otro.

Estudiamos  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , pero teniendo en cuenta la definición de nuestra función será

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$\bullet f(1) = \frac{3}{b \cdot 1} = \frac{3}{b}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2 - x + a) = -1^2 - 1 + a = a - 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{3}{bx} \right) = \frac{3}{b \cdot 1} = \frac{3}{b}$$

Entonces hemos de forzar  $\frac{3}{b} = a - 2$  0.6 p

Pasamos a estudiar la derivabilidad:

$$\text{Tenemos que } f'(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{if } x < 1 \\ -\frac{3}{bx^2} & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

Como  $\frac{3}{bx} = \frac{3}{b}x^{-1}$  su derivada es  $-\frac{3}{b}x^{-2} = -\frac{3}{bx^2}$

Se trata de nuevo de una función definida a trozos que hemos de ver que es continua en todo su dominio. Razonando de manera análoga a la anterior, será necesario estudiar  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

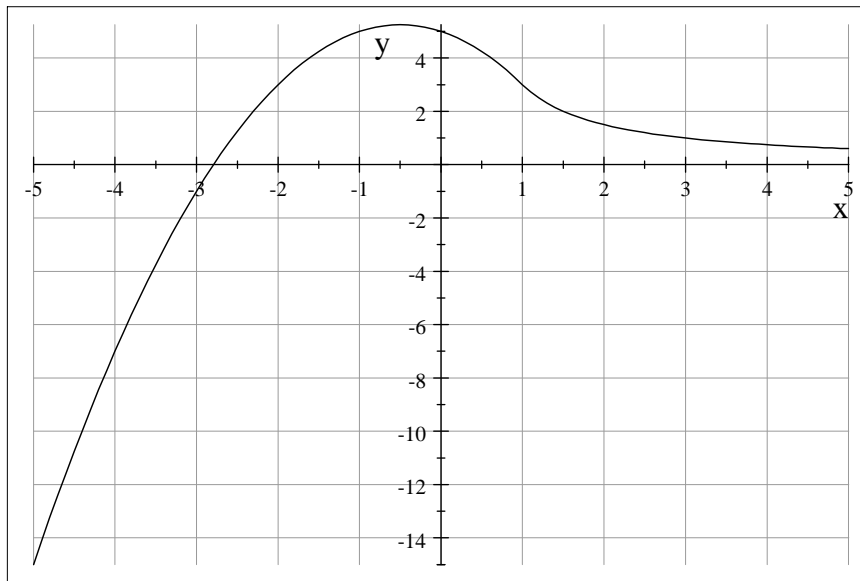
- $f(1) = -\frac{3}{b \cdot 1^2} = -\frac{3}{b}$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x - 1) = -2 \cdot 1 - 1 = -3$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{3}{bx^2}\right) = -\frac{3}{b \cdot 1^2} = -\frac{3}{b}$

Entonces hemos forzar  $-3 = -\frac{3}{b} \Leftrightarrow b = -\frac{3}{-3} = 1$  0.7 p

Aplicando este resultado en la continuidad tendremos  $\frac{3}{1} = a - 2 \Leftrightarrow a = 3 + 2 = 5$  0.5 p

La expresión final de la función será:  $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 5 & \text{if } x < 1 \\ \frac{3}{x} & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$

Cuya representación gráfica es:



Observa que para  $x = 1$  no hay un pico, de ahí que admita ser derivable también en ese punto.

Y la de su derivada:  $f'(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{if } x < 1 \\ -\frac{3}{x^2} & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$

**3 ln 3.02 = 1.1053 0.15 p**

Consideramos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = \ln x$  en  $x = 3 \rightarrow y = f(3) + f'(3)(x - 3)$

Tenemos que:

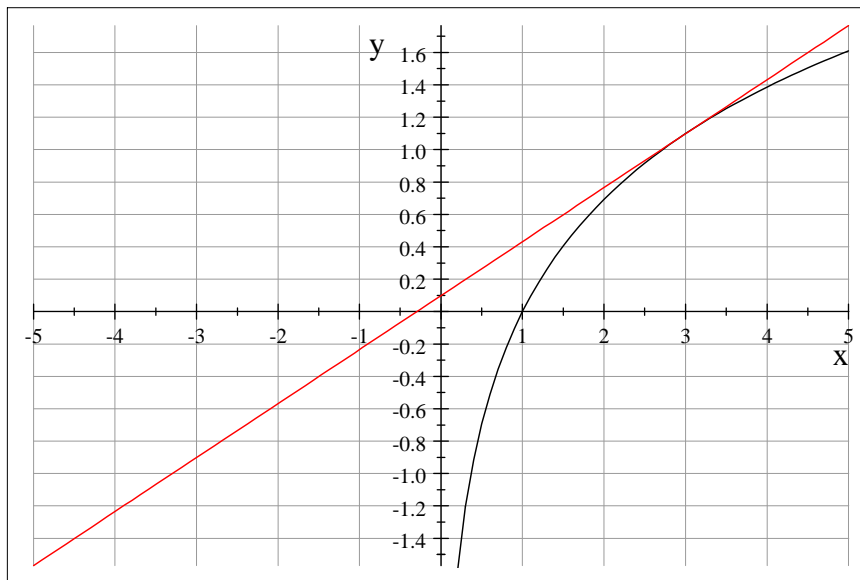
- $f(3) = \ln 3$
- $f'(x) = \frac{1}{x}$  0.45 p
- $f'(3) = \frac{1}{3}$  0.25 p

Por lo que la recta tangente queda  $y = \ln 3 + \frac{1}{3}(x - 3)$

Así  $f(3.02) \approx \ln 3 + \frac{1}{3}(3.02 - 3) = 1.1053$  0.6 p

La aproximación es bastante buena.

Gráficamente:



Observa como las gráficas de  $f$  y de la tangente se superponen en  $x = 3$

4

$$4.1 f(x) = \frac{3x}{(1+2x)^3}$$

Aplicamos las reglas de derivación siguientes:

- derivada de un cociente
- derivada de un polinomio
- derivada de una potencia

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (1+2x)^3 - 3x \cdot 3(1+2x)^2 \cdot 2}{((1+2x)^3)^2} = \frac{[3 \cdot (1+2x) - 18x](1+2x)^2}{(1+2x)^{3 \cdot 2}} = \frac{[3 + 6x - 18x](1+2x)^2}{(1+2x)^6} =$$

$$= \frac{3 - 12x}{(1+2x)^4} = 0.8 \text{ p}$$

$$4.2 f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}$$

Aplicamos las reglas de derivación siguientes:

- derivada de un polinomio
- derivada de una potencia

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot 2x = \frac{2x}{3}(x^2 + 1)^{\frac{1-3}{3}} = \frac{2x}{3}(x^2 + 1)^{\frac{-2}{3}} = \frac{2x}{3(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}} \quad 0.6 \text{ p}$$

$$4.3 f(x) = x^2 \cdot e^x$$

Aplicamos las reglas de derivación siguientes:

- derivada de un producto
- derivada de un polinomio
- derivada de una exponencial

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x(x^2 + 2x) \quad 0.7 \text{ p}$$

$$4.4 f(x) = \frac{\cos 2x}{3}$$

Aplicamos las reglas de derivación siguientes:

- derivada de un producto
- derivada de una función trigonométrica

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = -\frac{2}{3} \sin 2x \quad 0.5 \text{ p}$$

$$4.5 f(x) = \ln\left(\frac{3x^2 - 1}{4x + 3}\right)$$

Aplicamos las reglas de derivación siguientes:

- derivada de un cociente
- derivada de un polinomio
- derivada de una función logarítmica

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{3x^2-1}{4x+3}} \cdot \frac{(6x-0)(4x+3) - (3x^2-1) \cdot 4}{(4x+3)^2} = \frac{4x+3}{3x^2-1} \cdot \frac{24x^2+18x-12x^2+4}{(4x+3)^2} = \frac{18x+12x^2+4}{(3x^2-1)(4x+3)}$$

1.3 p

$$4.6 f(x) = \arctan(2^x \cdot x^2)$$

Aplicamos las reglas de derivación siguientes:

- derivada de un producto
- derivada de un polinomio
- derivada de una función exponencial
- derivada de una función trigonométrica

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (2^x \cdot x^2)^2} \cdot [2^x \cdot \ln 2 \cdot x^2 + 2^x \cdot 2x] = \frac{2^x(\ln 2 \cdot x^2 + 2x)}{1 + 2^{2x} \cdot x^{2 \cdot 2}} = \frac{2^x(\ln 2 \cdot x^2 + 2x)}{1 + 2^{2x} \cdot x^4} \quad 1.35 \text{ p}$$