

OPCIÓN A

A 1 (hasta 3 puntos)

Sea la región definida por las inecuaciones:

$$x + y - 1 \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 2$$

Determinar los puntos de dicha región en los que la función $F(x, y) = 4x + 2y$ alcanza sus valores máximo y mínimo. Calcular los valores de la función en dichos puntos.

A 2 (hasta 3 puntos)

Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

- Encontrar los valores de los parámetros a , b y c para que la función pase por el punto $(0, 0)$ y tenga un extremo relativo en el punto $(2, -4)$.
- Determinar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $f(x)$.
- Calcular el área de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas.

A 3 (hasta 2 puntos)

En un instituto hay tres grupos de 1º de bachillerato con el mismo número de estudiantes. En el grupo A dos tercios de los/las estudiantes practican algún tipo de deporte, mientras que en los grupos B y C solo lo hacen la mitad de los/las estudiantes. Entre todo el alumnado se escoge una persona al azar, y resulta que no practica deporte. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha persona pertenezca al grupo A?

A 4 (hasta 2 puntos)

Tras realizar una prueba de cultura general entre los habitantes de cierta población, se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución normal, de media 68 y desviación típica 18.

Se desea clasificar a los habitantes en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de cultura general excelente), de manera que el primer grupo abarque un 20 % de la población, el segundo un 65 %, y el tercero el 15 % restante.

¿Cuáles son las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro?

OPCIÓN B

B 1 (hasta 3 puntos)

Sean A y B las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Hallar la matriz inversa de $A - B$
- Hallar la matriz X tal que $X(A - B) = 2A - 3B$

B 2 (hasta 3 puntos)

Sean las funciones $f(x) = x^4 - 4$ y $g(x) = 3x^2$.

- Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones, así como los extremos relativos y los puntos de inflexión si los hubiera.
- Representa gráficamente ambas funciones sobre el mismo eje de coordenadas.
- Calcula el área de la región delimitada por ambas curvas.

B 3 (hasta 2 puntos)

En una determinada población, la probabilidad de ser mujer y padecer diabetes es el 6 %, mientras que la de ser hombre y no padecer diabetes es el 37 %. En dicha población hay un 54 % de mujeres.

Se elige una persona al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca diabetes?
- Si la persona elegida es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que no padezca diabetes?
- Si la persona elegida resulta tener diabetes, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

B 4 (hasta 2 puntos)

La nota de la Evaluación para el Acceso a la Universidad del alumnado que se ha preinscrito en la carrera A sigue una distribución normal de media 6,8 y desviación típica 0,6. Por otro lado, la nota de los/las alumnos/as que se han preinscrito en la carrera B sigue una distribución normal de media 7 y desviación típica 0,5.

Si en ambos casos solo se puede admitir al 25 % del alumnado preinscrito, ¿cuál de las dos carreras requerirá una nota mínima más baja?

OPCIÓN B

Problema B.1 (3 puntos)

c. 1,5 puntos

- Determinar $A - B$, **0,25 puntos**.
- Determinante $A - B$, **0,25 puntos**.
- Cálculo de la matriz inversa de $A - B$, **1 punto**.

d. 1,5 puntos.

- Determinar X , **0,5 puntos**.
- Cálculo de $2A - 3B$, **0,25 puntos**.
- Calcular la matriz X , **0,75 puntos**.

Problema B.2 (3 puntos)

d. 1,1 puntos

- Estudio de la función $f(x)$, **0,6 puntos**
 - Intervalos de crecimiento y decrecimiento, 0,3 puntos.
 - Máximos y mínimos relativos, 0,2 puntos.
 - Definición de punto de inflexión, 0,1 puntos.
- Estudio de la función $g(x)$, **0,5 puntos**.
 - Intervalos de crecimiento y decrecimiento, 0,3 puntos.
 - Máximos y mínimos relativos, 0,2 puntos.

e. 0,9 puntos

- Gráfico de $f(x)$, **0,45 puntos**.
- Gráfico de $g(x)$, **0,45 puntos**.

f. 1 punto

- Planteamiento del cálculo del área, **0,25 puntos**.
- Cálculo de la integral, **0,25 puntos**.
- Cálculo de la superficie a través de la regla de Barrow, **0,5 puntos**.

Problema B.3 (2 puntos)

d. 0,8 puntos

- Elaboración de la tabla de contingencia, **0,2 puntos**.
- Cálculo de la probabilidad pedida, **0,6 puntos**.

e. **0,6 puntos**. Cálculo de la probabilidad condicionada pedida.

f. **0,6 puntos**. Cálculo de la probabilidad condicionada pedida.

Problema B.4 (2 puntos)

- La carrera A, **1 punto**
 - Planteamiento, **0,25 puntos**.
 - Tipificación de la variable, **0,25 puntos**.
 - Cálculo de la cota, **0,5 puntos**.
- Del mismo modo para la carrera B, **1 punto**.

SOLUCIONES

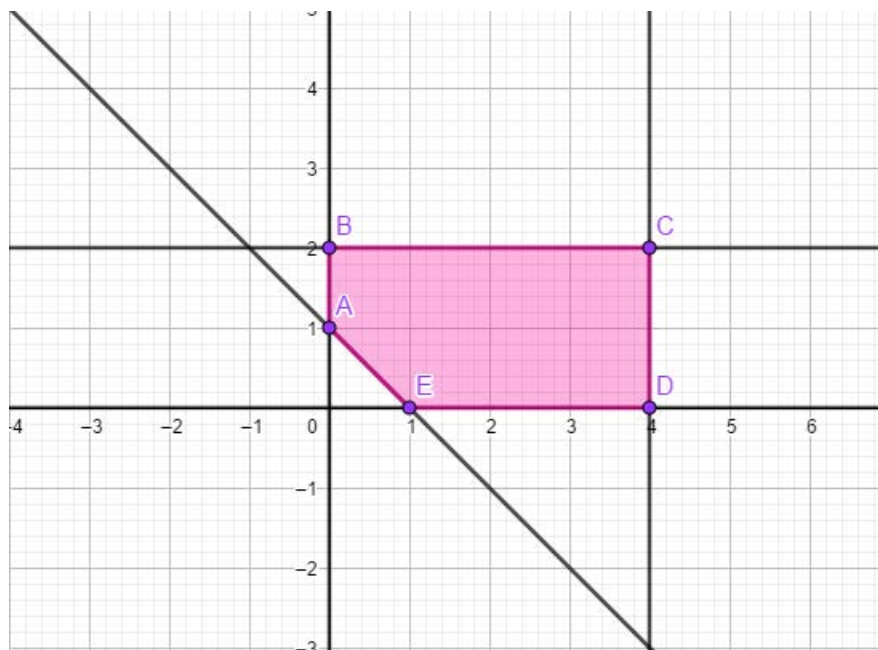
OPCIÓN A

A 1 Problema de programación lineal en dos variables.

✚ La función objetivo es: $F(x, y) = 4x + 2y$

✚ Las restricciones son:
$$\begin{cases} x + y \geq 1 \\ x \geq 0 \\ x \leq 4 \\ y \geq 0 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

✚ Recinto de soluciones compatibles en el plano XY:



✚ Los vértices del recinto son: $A(0, 1)$, $B(0, 2)$, $C(4, 2)$, $D(4, 0)$ y $E(1, 0)$.

✚ La función $F(x, y)$ tiene un **máximo en el punto C(4, 2)** siendo $F(4, 2) = 20$

✚ La función $F(x, y)$ tiene un **mínimo en el punto A(0, 1)** siendo $F(0, 1) = 2$

A 2 Cálculo de los parámetros de una función y sus máximos y mínimos relativos.

a) Determina a, b, c siendo $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

○ La función pasa por el punto $(0, 0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$$\text{Por lo tanto, } f(x) = x^3 + ax^2 + bx$$

○ La función pasa por el punto $(2, -4) \Rightarrow f(2) = -4 \Rightarrow 8 + 4a + 2b = -4$
 $\Rightarrow 2a + b = -6$

○ La función en $x = 2$ tiene un extremo relativo $\Rightarrow f'(2) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(2) = 0 = 12 + 4a + b \Rightarrow \\ \Rightarrow 4a + b = -12$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} 2a + b = -6 \\ 4a + b = -12 \end{cases} \Rightarrow a = -3 \text{ y } b = 0 \text{ Esto es: } f(x) = x^3 - 3x^2$$

b) Máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión

▪ Máximos y mínimos

$$\checkmark f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y } x = 2 \text{ puntos singulares}$$

$$\checkmark f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow$$

$$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ máximo, esto es, } (0, 0) \text{ **Máximo relativo**}$$

$$f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow x = 2 \text{ mínimo, esto es, } (2, -4) \text{ **Mínimo relativo**}$$

▪ Puntos de inflexión

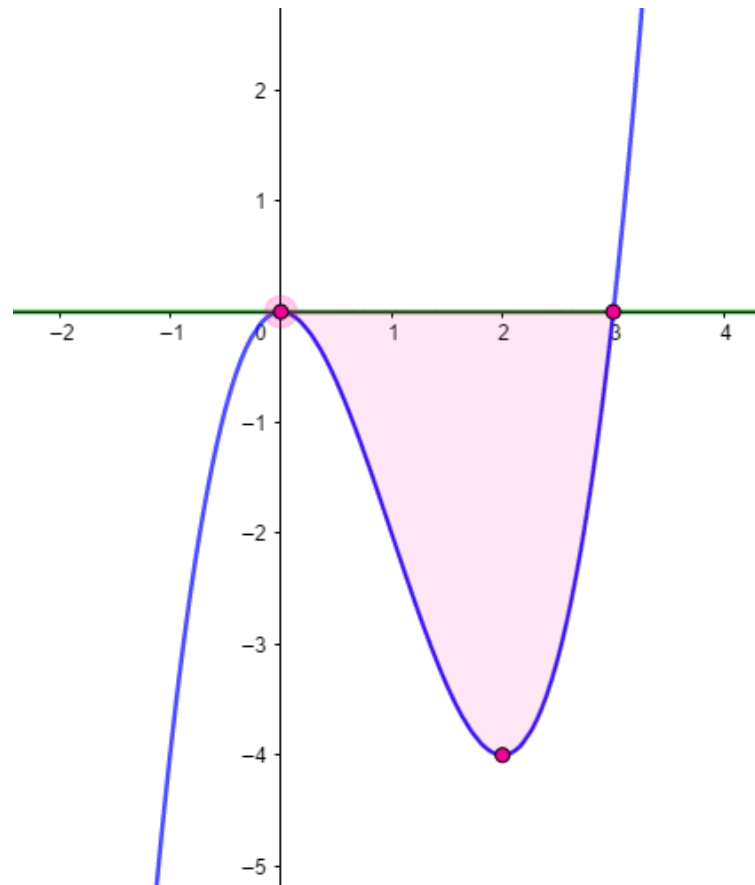
$$\checkmark f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\checkmark f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(1) = 6 \neq 0$$

Por lo tanto en $x = 1$ hay un punto de inflexión, esto es,

$$(1, -2) \text{ **Punto de inflexión**}$$

- c) Calcular la superficie de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas

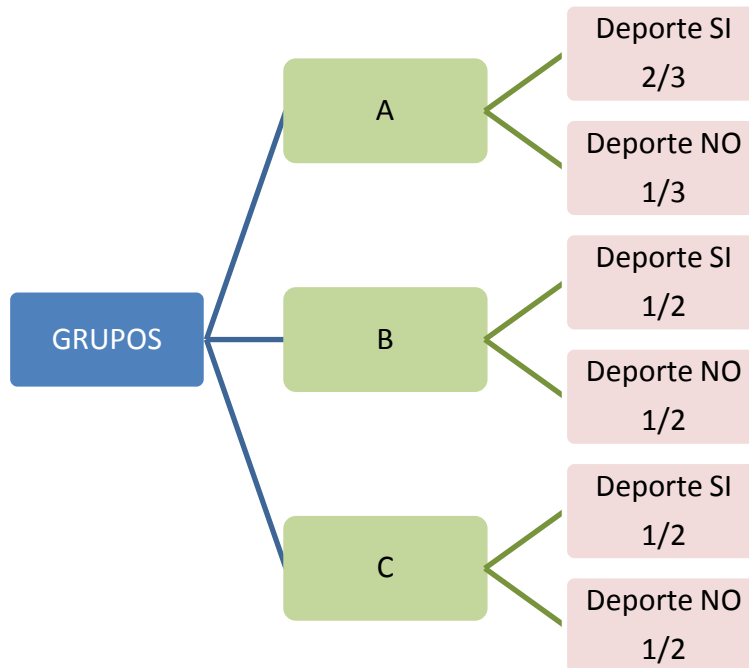


Para determinar el área hay que calcular la integral definida,

$$A = \int_0^3 [0 - (x^3 - 3x^2)] dx = \int_0^3 (-x^3 + 3x^2) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{27}{4} u^2$$

Por lo tanto: $A = \frac{27}{4} u^2$

A 3 Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse, a través de un diagrama de árbol (o a través de la fórmula de la probabilidad total) y la probabilidad condicionada (teorema de Bayes)



✚ Probabilidad total

$P(\text{deporte no}) =$

$$= P(A)P(\text{deporte no} | A) + P(B)P(\text{deporte no} | B) + P(C)P(\text{deporte no} | C) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{9}$$

✚ Probabilidad "a posteriori": Fórmula de Bayes

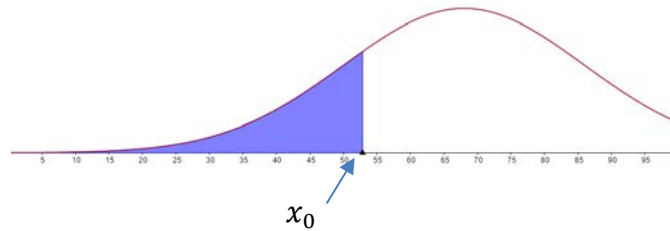
$$P(A | \text{deporte no}) = \frac{P(A \cap \text{deporte no})}{P(\text{deporte no})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = 1/4$$

A 4 Comprensión y utilización de una distribución normal.

$$X \equiv \text{testaren puntuazioa} \sim N(\mu, \sigma) = N(68, 18)$$

Hay que determinar los valores de x_0 y x_1 de tal modo que $P(X \leq x_0) = 0,2$ y $P(X \leq x_1) = 0,85$

$$\color{blue}{\oplus} P(X \leq x_0) = 0,2 \Rightarrow x_0$$



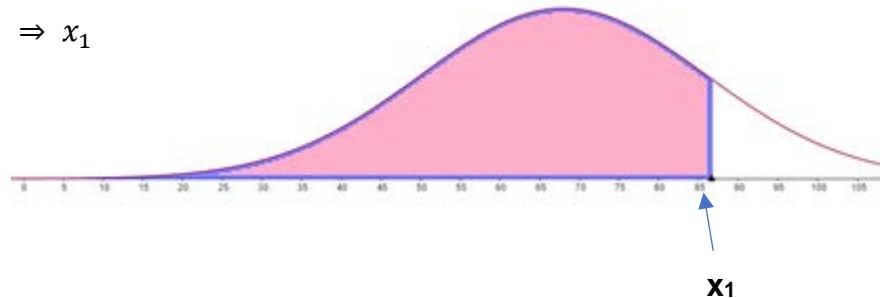
- ✓ Tipificación de la variable X : $Z = \frac{X-68}{18} \Rightarrow X = 18Z + 68$
- ✓ $P(X \leq x_0) = P(18Z + 68 \leq x_0) = P(Z \leq \frac{x_0-68}{18} = k) = 0,2$

$\frac{x_0-68}{18} = k$ es negativo porque la probabilidad es menor que 0,5; entonces, por simetría:

$$P(Z \leq -k) = 0,8 \Rightarrow -k = -\frac{x_0-68}{18} = 0,845 \Rightarrow x_0 = 52,79$$

Por lo tanto, el 20 % de la población ha sacado menos de 52,79 puntos.

$$\color{blue}{\oplus} P(X \leq x_1) = 0,85 \Rightarrow x_1$$



$$P(X \leq x_1) = P(18Z + 68 \leq x_1) = P\left(Z \leq \frac{x_1-68}{18}\right) = 0,85 \Rightarrow P(Z \leq k) = 0,85 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{x_1 - 68}{18} = 1,035 \Rightarrow x_1 = 86,63$$

Por lo tanto, el 15 % de la población ha sacado más de 86,63 puntos

En consecuencia, el 65 % de la población ha obtenido una puntuación mayor que 52,79 puntos y menor que 86,63.

Concluimos que: las personas de nivel cultural bajo han sacado menos de 52,79 puntos; las que tienen nivel cultural medio son las que han sacado una puntuación entre 52,79 y 86,63 puntos; y las de cultura general alta han conseguido una puntuación superior a 86,63 puntos

OPCIÓN B

B 1 Problema de cálculo matricial. Operaciones entre matrices. Matriz inversa.

a) La matriz inversa de $A - B \equiv (A - B)^{-1}$

$$\color{red}{+} \color{blue}{+} A - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\color{red}{+} \color{blue}{+} |A - B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists (A - B)^{-1}$$

$$\color{red}{+} \color{blue}{+} (A - B)^{-1} = \frac{1}{|A - B|} (\text{Adj}(A - B))^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esto es: $(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Determinar X tal que $X(A - B) = 2A - 3B$

$$X(A - B) = 2A - 3B \Rightarrow X(A - B)(A - B)^{-1} = (2A - 3B)(A - B)^{-1}$$

$$\Rightarrow X = (2A - 3B)(A - B)^{-1}$$

$$\color{red}{+} \color{blue}{+} (2A - 3B) = 2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\color{red}{+} \color{blue}{+} \text{Sabemos } (A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\color{red}{+} \color{blue}{+}$ Por lo tanto:

$$X = (2A - 3B)(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Esto es: $X = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

B 2 (Problema de análisis de funciones. Determinación de máximos, mínimos, puntos de inflexión, representación gráfica y cálculo de área entre dos curvas)

a)

✚ Analizamos la función: $f(x) = x^4 - 4$

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento

La primera derivada es: $y' = 4x^3$

$y' = 4x^3 > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en el intervalo $(0, \infty)$

$y' = 4x^3 < 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$

- Máximos y mínimos relativos:

$$y' = 4x^3 \Rightarrow 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y'' = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$y''' = 24x \Rightarrow f'''(0) = 0$$

$$y^{(4)} = 24 \Rightarrow f^{(4)}(0) = 24 > 0$$

La primera derivada que no se anula en $x = 0$ es de grado cuatro, esto es una derivada de grado par y su valor es positivo por lo tanto en el punto $x = 0$ la función tiene un mínimo relativo. Por lo tanto: **$(0, -4)$ mínimo relativo**

- La función $f(x)$ no tiene puntos de inflexión.

✚ Analizamos la función $g(x) = 3x^2$

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

La primera derivada es: $y' = 6x$

$y' = 6x > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow g(x)$ es creciente en el intervalo $(0, \infty)$

$y' = 6x < 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow g(x)$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$

- Máximos y mínimos relativos:

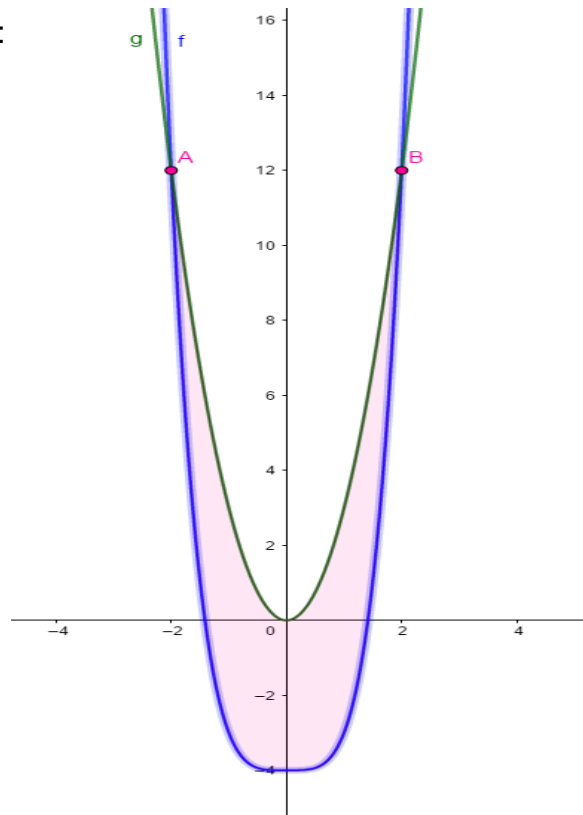
$$y' = 6x \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$y'' = 6 \Rightarrow g''(0) > 0 \Rightarrow$ En el punto $x = 0$ la función tiene un mínimo.

Por lo tanto, **$(0, 0)$ mínimo relativo**

- $g''(x) = 6 > 0 \forall x \Rightarrow$ la función no tiene puntos de inflexión.

b) Representación gráfica de las funciones:



c) Área de la región delimitada por ambas curvas:

- Puntos de corte entre ambas funciones:

$$\begin{cases} y = x^4 - 4 \\ y = 3x^2 \end{cases} \Rightarrow x^4 - 4 = 3x^2 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Como es una ecuación bicuadrada, haciendo el cambio de variable $x^2 = t$, la ecuación que conseguimos es:

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = -1 \text{ y } t = 4 \Rightarrow x = \pm 2, (x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R})$$

Por lo tanto, los puntos de corte son: $A = (-2, 12)$ y $B = (2, 12)$

- Para calcular el área comprendida entre las dos funciones resolvemos la siguiente integral definida:

$$A = \int_{-2}^2 [3x^2 - (x^4 - 4)] dx = \int_{-2}^2 [3x^2 - x^4 + 4] dx = \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + 4x \right]_{-2}^2 = \frac{96}{5} u^2$$

B 3 Problema de cálculo de probabilidades que se puede resolver con tabla de contingencia y con probabilidades condicionadas.

Con los datos del problema se elabora la tabla de contingencia:

| | Diabetes | No Diabetes | |
|--------|----------|-------------|------|
| Mujer | 0,06 | 0,48 | 0,54 |
| Hombre | 0,09 | 0,37 | 0,46 |
| | 0,15 | 0,85 | 1 |

a) La probabilidad de que una persona tomada al azar padezca diabetes es:

$$P(\text{diabetes}) = 0,06 + 0,09 = 0,15$$

b) La probabilidad de que, sabiendo que es mujer, no padezca diabetes es:

$$P(\text{no diabetes} \mid \text{mujer}) = \frac{P(\text{mujer} \cap \text{no diabetes})}{P(\text{mujer})} = \frac{0,48}{0,54} = 0,889$$

c) La probabilidad de que, sabiendo que tiene diabetes, sea mujer:

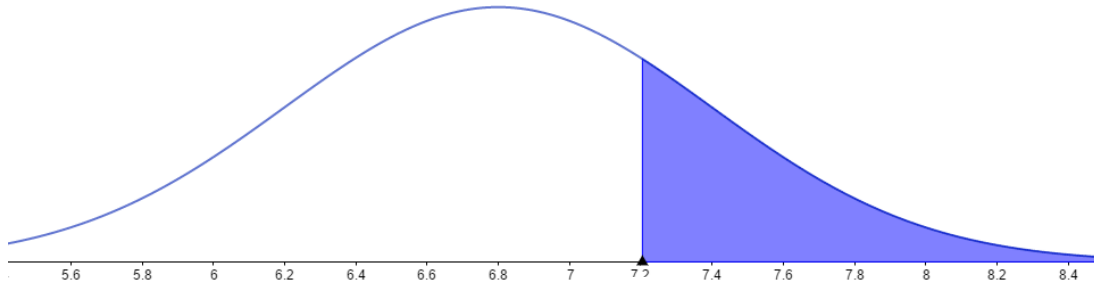
$$P(\text{mujer} \mid \text{diabetes}) = \frac{P(\text{mujer} \cap \text{diabetes})}{P(\text{diabetes})} = \frac{0,06}{0,15} = 0,4$$

B 4 Problema de cálculo de probabilidades en una distribución normal.

Carrera A: $X \equiv N(\mu, \sigma) = N(6,8; 0,6)$

Carrera B: $Y \equiv N(\mu', \sigma') = N(7; 0,5)$

 **Carrera A**



a

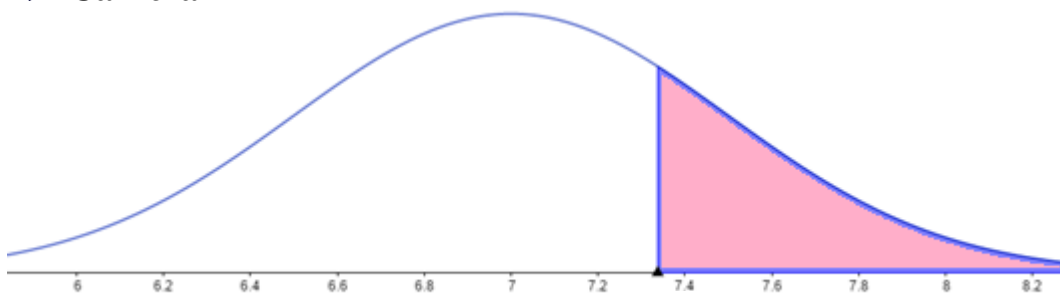
$$P(X > a) = 0,25 \Rightarrow P\left(\frac{X - 6,8}{0,6} > \frac{a - 6,8}{0,6}\right) = 0,25 \Rightarrow P\left(Z > \frac{a - 6,8}{0,6}\right) = 0,25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a - 6,8}{0,6}\right) = 0,25 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a - 6,8}{0,6}\right) = 0,75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a - 6,8}{0,6} = 0,675 \Rightarrow \mathbf{a = 7,205}$$

Por lo tanto, la nota mínima que se pedirá para entrar en la carrera A será 7,205.

 **Carrera B**



b

$$P(Y > b) = 0,25 \Rightarrow P\left(\frac{Y - 7}{0,5} > \frac{b - 7}{0,5}\right) = 0,25 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{b - 7}{0,5}\right) = 0,75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b - 7}{0,5} = 0,675 \Rightarrow \mathbf{b = 7,3375}$$

Por lo tanto, la nota mínima que se pedirá para entrar en la carrera B será 7,3375.

Concluimos que se pedirá una nota más baja para entrar en la carrera A.