OPCIÓN A

A 1 *(hasta 3 puntos)*
Una pastelera fabrica dos tipos de tartas. La tarta de tipo A se elabora con 1 kg. de masa y 1,5 kg. de chocolate, y se vende a 24 euros. La de tipo B se vende a 30 euros y se elabora con 1,5 kg. de masa y 1 kg. de chocolate, tal como aparece en la siguiente tabla:

	Masa	Chocolate
A	1 kg	1,5 kg
B	1,5 kg	1 kg

Si la pastelera sólo dispone de 300 kg. de cada ingrediente, ¿cuántas tartas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo ingreso? Calcula el valor de dicho ingreso.

A 2 *(hasta 3 puntos)*
Se considera la curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
b) Determinar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión.
c) Encontrar los puntos de corte con el eje OX. Realizar la representación gráfica de la función.
d) Calcular el área del recinto finito delimitado por la curva y el eje de abscisas OX.

A 3 *(hasta 2 puntos)*
Sean A y B dos sucesos tales que, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, y la probabilidad de la unión de ambos sucesos es $\frac{3}{4}$. Calcular:

a) La probabilidad de que ocurra el suceso A, condicionada a que se ha producido el suceso B.
b) La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.
c) La probabilidad de que ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B.
d) La probabilidad de que ocurra solo uno de los dos sucesos.

A 4 *(hasta 2 puntos)*
En una población se toma una muestra aleatoria de 500 personas y se les pregunta si son aficionadas al deporte o no. De ellas 350 respondieron que sí son aficionadas al deporte y el resto que no. Con esta información se pide:

a) Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que son aficionadas al deporte. Calcular, además, el error máximo para dicho nivel de confianza.
b) Interpretar los resultados obtenidos.

OPCIÓN B

B 1 *(hasta 3 puntos)*

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Determina la matriz inversa de la matriz $I + B$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

b) Calcular las matrices X e Y que verifican que:

$$\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases}$$

B 2 *(hasta 3 puntos)*

a) Hallar la función polinómica de segundo grado cuyo gráfico pasa por el punto $(0,\ 0)$, y tiene un máximo en el punto $(1,\ 1)$.

b) Hallar el área del recinto finito delimitado por la curva obtenida y el eje de abscisas OX.

B 3 *(hasta 2 puntos)*

Se dispone de dos urnas diferentes: A y B. La urna A contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras, mientras que la urna B contiene 10 bolas negras.

Se toma al azar una bola de cada una de las urnas al mismo tiempo y se intercambian (es decir, la bola extraída de la urna A se introduce en la urna B y la bola extraída de la urna B se introduce en la urna A). Si a continuación se extrae una bola de la urna A, ¿cuál es la probabilidad de que sea negra?

B 4 *(hasta 2 puntos)*

En una determinada ciudad el gasto anual en transporte público realizado por las familias sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 75 euros.

Se toma una muestra aleatoria de 100 familias, de la que se obtiene un gasto medio de 250 euros.

a) Calcular entre qué valores estará el gasto medio de la población con un nivel de confianza del 99 %.

b) ¿Qué tamaño debería tener la muestra para que el error máximo sea de 10 euros con un nivel de confianza del 99 %?

OPCIÓN A

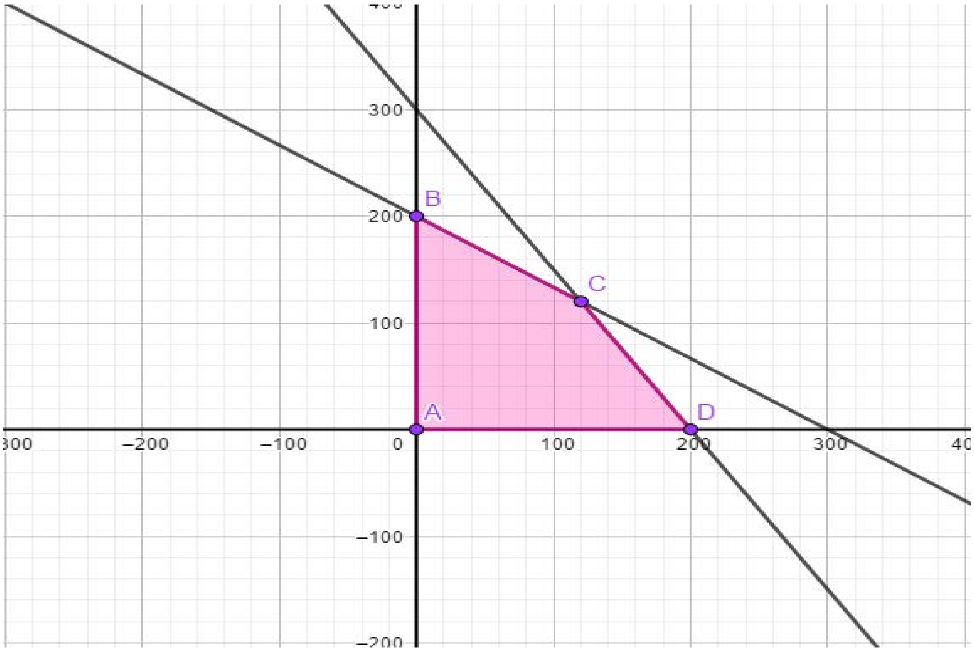
A 1 *Problema de programación lineal con dos variables.*

	Masa	Chocolate	Precio (€)	¿Cuánto?
A	1 kg	1,5 kg	24€	x
B	1,5 kg	1 kg	30€	y

- Maximizar la función objetivo $f(x,y) = 24x + 30y$,
- Teniendo las siguientes restricciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + 1{,}5y \leq 300 \\ 1{,}5x + y \leq 300 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

- En el plano XY la región factible es:



- Los vértices son: $A(0,0)$, $B(0,200)$, $C(120,\ 120)$, eta $D(200,0)$.

- **El máximo** de la función está en el punto $\boldsymbol{C(120,\ 120)}$, siendo el valor de la función en ese punto $\boldsymbol{f(120,\ 120) = 6480}$.

Por lo tanto, para conseguir **el ingreso máximo se deberían hacer 120 tartas de cada tipo.**

A 2 *Problema de análisis de una función. Cálculo de máximos, mínimos, puntos de inflexión y representación gráfica.*

a) Estudiamos el signo de la primera derivada para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \ \Rightarrow \ f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \ \Rightarrow \ f'(x) = 3\,(x-1)(x-3)$$

1 3

	0	2	4
$(x-1)$	-	+	+
$(x-3)$	-	-	+
$(x-1)(x-3)$	+	-	+

Por lo tanto, es creciente en $(-\infty, \mathbf{1}) \cup (\mathbf{3}, \infty)$ **y decreciente en el intervalo** $(\mathbf{1}, \mathbf{3})$

b) Máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión

- Máximos y mínimos relativos
  - ✓ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = 3$ puntos singulares
  - ✓ $f''(x) = 6x - 12$

  $f''(1) = 6 - 12 = -6 < 0$; $f(1) = 4$ → (1, 4) **Máximo relativo**

  $f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0$; $f(3) = 0$ → (3, 0) **Mínimo relativo**

- Puntos de inflexión:
  - ✓ $f''(x) = 6x - 12 = 0 \ \rightarrow \ x = 2$
  - ✓ $f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(2) = 6 \neq 0$. Entonces, $x = 2$

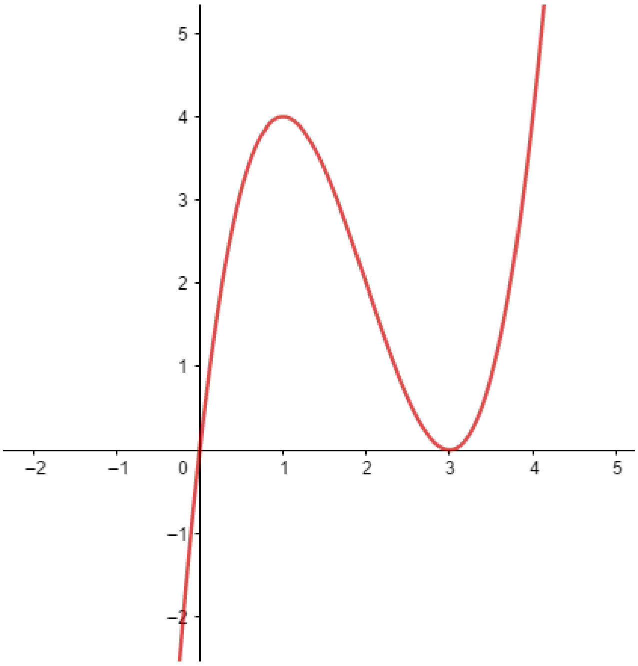
    $f(2) = 8 - 24 + 18 = 2 \quad \Rightarrow \ (\mathbf{2}, \mathbf{2})$ **Punto de inflexión**

c) Puntos de corte de la curva y el eje OX:

$$\begin{cases} y = x^3 - 6x^2 + 9x \\ \quad y = 0 \end{cases} \Rightarrow \ x = 0, \ x = 3 \ \Rightarrow$$

los puntos $(\mathbf{0}, \ \mathbf{0})$ $\boldsymbol{y}$ $(\mathbf{3}, \ \mathbf{0})$ son los puntos de corte de la curva con el eje OX.

- Representación gráfica:

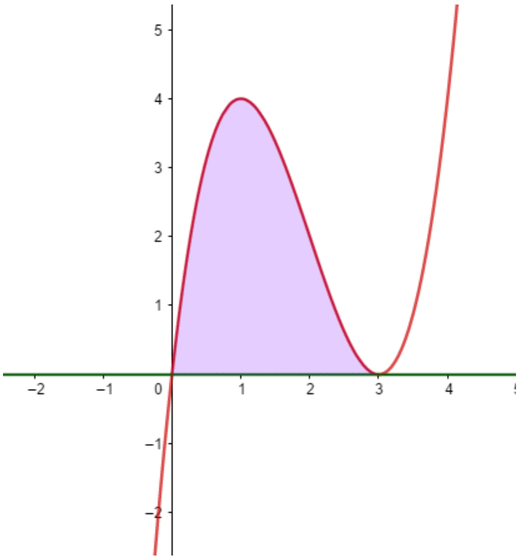


d) Área de la superficie comprendida entre la curva y el eje de abscisas:

$$A = \int_0^3 [(x^3 - 6x^2 + 9x) - 0]dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{27}{4}u^2$$

Esto es: $\boldsymbol{A = \frac{27}{4}u^2}$



A 3 *Problema de cálculo de probabilidades que puede resolverse con tabla de contingencia y probabilidades condicionadas.*

Datos: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

a) Probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B, es decir, $P(A|B)$:

- $P(A \cap B)$?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - P(A \cap B) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(A \cap B) = \frac{1}{12}}$$

- Entonces, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/12}{1/3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(A \mid B) = \frac{1}{4}}$

b) La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos: $P(\bar{A} \cap \bar{B})$:

- Formamos la tabla de contingencia o doble entrada, sabiendo $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cap B)$.

	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{\bar{A}}$	
$\boldsymbol{B}$	$1/12$	$1/4$	$1/3$
$\boldsymbol{\bar{B}}$	$5/12$	$1/4$	$2/3$
	$1/2$	$1/2$	1

En la tabla vemos: $\boldsymbol{P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{4}}$

- **Otra forma**:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

c) La probabilidad de que ocurra el suceso A y no ocurra el suceso B: $\boldsymbol{P(A \cap \bar{B})}$.

- En la tabla vemos: $\boldsymbol{P(A \cap \bar{B}) = \frac{5}{12}}$
- **Otra forma**:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

d) La probabilidad de que ocurra uno de los sucesos, esto es,

$$\boldsymbol{P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B).}$$

- En la tabla vemos: $\boldsymbol{P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}}$
- **Otra forma**:

$$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = 1 - [P(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup P(A \cap B)] =$$

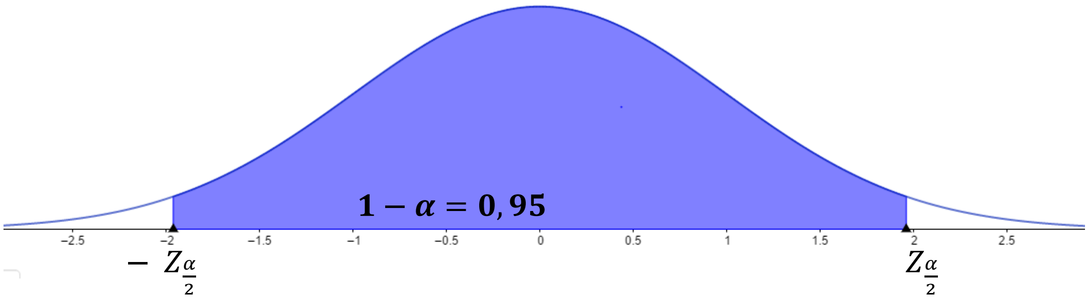
$$= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

A 4 *Cálculo del intervalo de confianza para la proporción de una población y del error.*

a) Estimar el porcentaje de personas de la población que son aficionadas al deporte:

- El tamaño de la muestra es $n = 500$
- $\boldsymbol{\hat{p}} = \frac{\mathbf{350}}{\mathbf{500}} = \mathbf{0,7}$ proporción de aficionados de la muestra.
- $\hat{q} = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

- Intervalo de confianza para la proporción con un nivel de confianza del 95 %:



- Nivel de confianza: $n_c = 0{,}95$

$$n_c = 0{,}95 = 1 - \alpha \ \Rightarrow\ \alpha = 0{,}05 \ \Rightarrow\ \frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \ \Rightarrow\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}025 \ \Rightarrow\ 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}025 \ \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow\ P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}975 \ \Rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96 \end{array} \right.$$

- Intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}},\ \ \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}\ \right)$$

$$\left(0{,}7 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{500}},\quad 0{,}7 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{500}}\right) = (0{,}7 - 0{,}04\,;0{,}7 + 0{,}04) =$$

$$= (\mathbf{0,66}\,;\mathbf{0,74})$$

Por lo tanto, el porcentaje de personas de la población aficionadas al deporte está entre el 66 % y el 74 % con un nivel de confianza del 95 %.

- Error máximo con un nivel de confianza del 95 %.

El error máximo para la proporción es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza, esto es,

$$e_m = Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$$

$e_m = 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{500}} = \mathbf{0,04}$, es decir, el **4 %.**

b) Explicación de los resultados obtenidos:

Se puede decir con un nivel de confianza del 95 %, que el porcentaje de la población que es aficionada al deporte en esa población es mayor que el 66 % y menor que el 74 %, lo que supone un error máximo del 4 %.

OPCIÓN B

B 1 *Problema de cálculo matricial. Sistema matricial.*

a) Determinar $(I+B)^{-1}$

- A la matriz $I+B$ le llamamos D:

$$I+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}=D$$

- $(I+B)^{-1}=D^{-1}=\frac{1}{|D|}(Adj\ D)^t=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1/2}&\mathbf{0}\\\mathbf{-1/6}&\mathbf{1/3}\end{pmatrix}$

b) Calcular las matrices X e Y que verifican:

$$\begin{cases}AX+BY=C\\ \quad AX=Y\end{cases}$$

- $\begin{cases}AX+BY=C\\ \quad AX=Y\end{cases}\Rightarrow\ Y+BY=C\ \Rightarrow\ I\,Y+BY=C\ \Rightarrow\ (I+B)Y=C\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow DY=C\ \Rightarrow\ D^{-1}\,DY=D^{-1}C\ \Rightarrow\ \boldsymbol{Y=D^{-1}C}$$

- Por lo tanto:

$$Y=D^{-1}C=\begin{pmatrix}1/2&0\\-1/6&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&11\\4&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{5}&\mathbf{11/2}\\\mathbf{-1/3}&\mathbf{1/2}\end{pmatrix}$$

- Para determinar X:

$$AX=Y\ \Rightarrow\ A^{-1}\,AX=A^{-1}Y\ \Rightarrow\ X=A^{-1}Y$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj\ A)^t=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Entonces:

$$X=A^{-1}Y=\begin{pmatrix}1/2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&11/2\\-1/3&1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{5/2}&\mathbf{11/4}\\\mathbf{-1/3}&\mathbf{1/2}\end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{5/2}&\mathbf{11/4}\\\mathbf{-1/3}&\mathbf{1/2}\end{pmatrix}\quad \text{e}\quad \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\mathbf{5}&\mathbf{11/2}\\\mathbf{-1/3}&\mathbf{1/2}\end{pmatrix}$$

B 2 *Cálculo de los valores de una función y del área que forma con el eje de abscisas.*

a) Determinar a, b, c siendo $f(x) = ax^2 + bx + c$

- La función pasa por el punto $(0, 0)$ $\Longrightarrow$ $f(0) = 0$ $\Longrightarrow c = 0$

Por lo tanto: $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx}$

- Máximo relativo en el punto $(1, 1)$ $\Longrightarrow$
  - $f'(1) = 0$ $\Rightarrow f'(1) = 2a + b = 0$
  - Es un punto de la función $\Rightarrow f(1) = 1$ $\Rightarrow f(1) = a + b = 1$

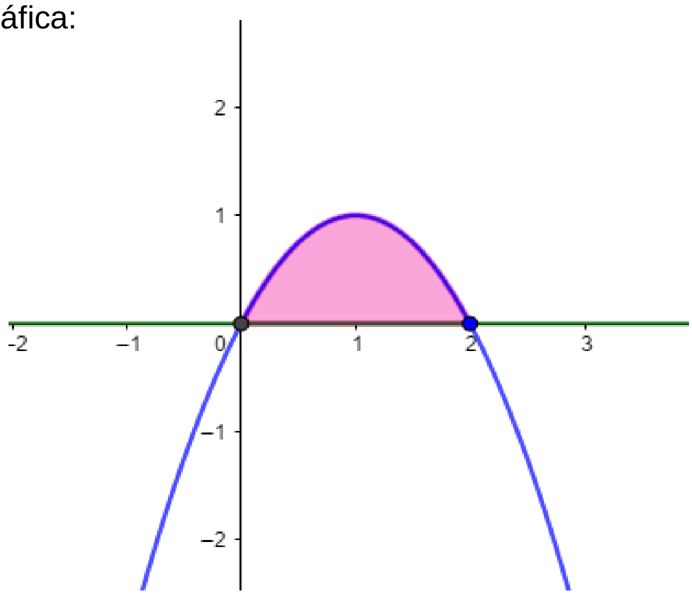
Por lo tanto: $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$ $\Longrightarrow a = -1$ y $b = 2$ Esto es, $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 2x}$

b) La superficie del recinto determinado por la función y el eje de abscisas OX:

- Determinamos los puntos de corte entre la curva y el eje OX:

$\begin{cases} f(x) = -x^2 + 2x \\ y = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x = 0,\ x = 2 \Rightarrow (0,\ 0)$ y $(2,\ 0)$ puntos de corte

- Representación gráfica:

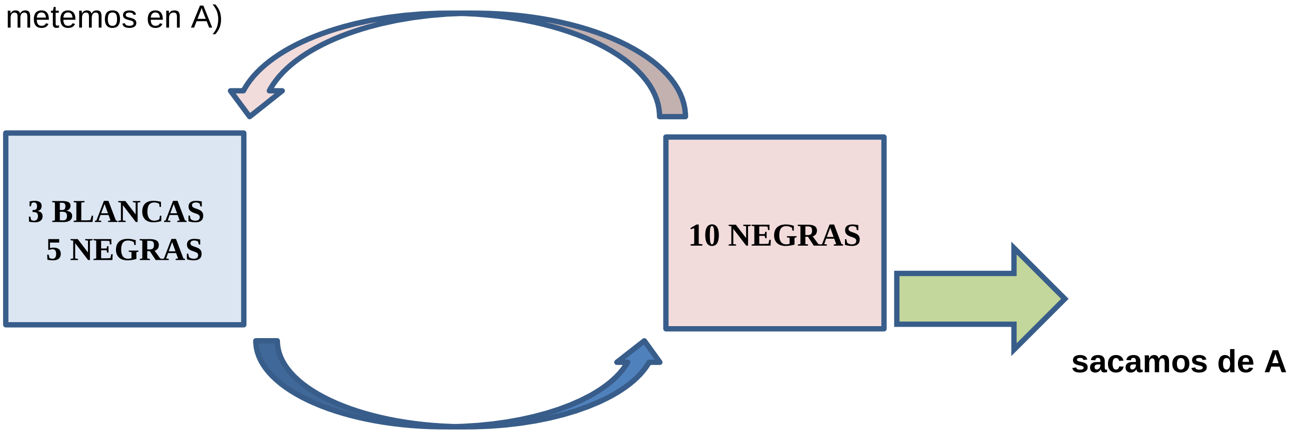


- Para determinar el área calculamos la integral definida:

$$A=\int_0^2 [-x^2 + 2x]\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \boldsymbol{\frac{4}{3} u^2}$$

B 3 *Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse***,** *a través de un diagrama de árbol (o a través de la fórmula de la probabilidad total)*

SIEMPRE NEGRA (siempre sacamos de B una bola negra y la metemos en A)



Sacamos de A N_A o B_A , esto es, N_A = sacamos una bola negra de A y la metemos en B

B_A = sacamos una bola blanca de A y la metemos en B

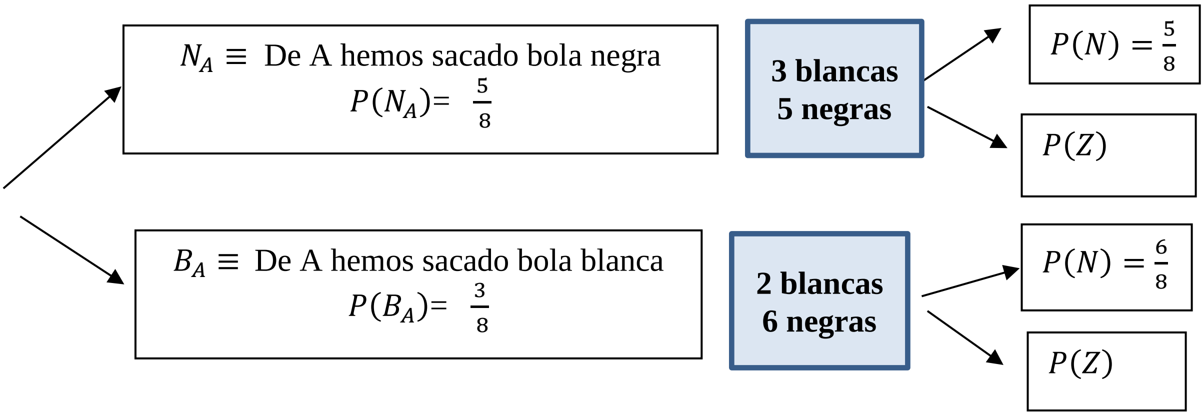
Calculamos la probabilidad de extraer una bola negra $\equiv P(N)$

- **Un modo:** Probabilidad Total:

$$P(N) = P(N_A) \cdot P(N \mid N_A) + P(B_A) \cdot P(N \mid B_A)$$

$$\Rightarrow P(\mathrm{N}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{8} = \frac{43}{64} = \mathbf{0,672}$$, esto es **67,2 %**

- **Otro modo:** A través de un diagrama de árbol:



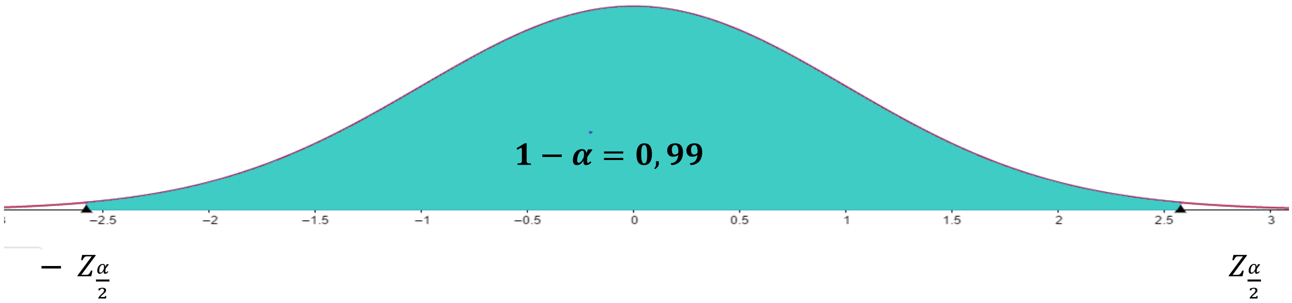
$$\Rightarrow P(\mathrm{N}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{8} = \frac{43}{64} = \mathbf{0,672}$$

B 4. *Cálculo del intervalo de confianza de la media para una población con distribución normal. Tamaño de la muestra.*

Los datos son:

- La media aritmética de la población μ y la desviación típica $\sigma = 75$
- El tamaño de la muestra es: $n = 100$
- La media de la muestra es: $\bar{x}$ =250

a) Para la media del gasto el intervalo de confianza del 99 %:



- El nivel de confianza es: $n_c = 0{,}99$

$$n_c = 0{,}99 = 1-\alpha \ \Rightarrow\ \alpha = 0{,}01 \ \Rightarrow\ \frac{\alpha}{2} = 0{,}005 \ \Rightarrow\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}005 \ \Rightarrow\ 1-P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}005 \ \Rightarrow \\ \Rightarrow P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}995 \ \Rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575 \end{array} \right.$$

- El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow\ \left(250 - 2{,}575\,\frac{75}{\sqrt{100}}\ ;\ 250 + 2{,}575\,\frac{75}{\sqrt{100}}\right) = \ (250 - 19{,}3125\,; 250 + 19{,}3125)$$

$$\Rightarrow\ (\mathbf{230,6875\ ;\ 269,3125})$$

b) El tamaño de la muestra con un nivel de confianza del 99 % para que el error máximo sea de 10 euros:

El error máximo para la media es: $Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, esto es, la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575 \cdot \frac{75}{\sqrt{n}} \leq 10 \ \Rightarrow \sqrt{n} \geq 2{,}575\,\frac{75}{10} = 19{,}3125 \ \ \Rightarrow\ n = \ 372{,}97 \Rightarrow \boldsymbol{n} = \mathbf{373}$$

Por lo tanto**, se tendría que tomar una muestra de 373 personas.**