OPCIÓN A

A 1 *(hasta 3 puntos)*
Considérense las siguientes desigualdades en el plano XY cuando $x \geq 0$ e $y \geq 0$:

$$x + 2y \leq 7, x + y \geq 3, 2y - x \geq -4$$

a) Dibuja el recinto restringido por las desigualdades anteriores en el plano XY.
b) Encuentra el máximo de la función $F(x,y) = 2x + 3y$ en el recinto del apartado anterior.
c) Encuentra el máximo de la función $F(x,y)$ cuando x e y son números enteros en el espacio de soluciones del apartado (a).

A 2 *(hasta 3 puntos)*
Un inversor conoce el valor que tendrán las acciones de una empresa a lo largo del año. La función $f(t) = t^3/3 - 5t^2 + 16t + 30$ expresa dicho valor en euros, donde el tiempo t está medido en meses, $0 \leq t \leq 12$. Si inicialmente dispone de 3000 euros y durante el año puede realizar como máximo 2 operaciones de compra y 2 de venta:

a) Utilizando el análisis de los máximos y mínimos de $f(t)$, deducir en qué instantes debe realizar el inversor cada compra y cada venta para que, a final de año (t =12), disponga del máximo de dinero.
b) ¿Cuál será el máximo beneficio que podrá obtener realizando las 4 operaciones óptimas indicadas en el apartado anterior?

Nota: Téngase en cuenta que el inversor, en cada operación, utilizará todo su dinero o todas sus acciones.

A 3 *(hasta 2 puntos)*
Un banco diseña diversos tipos de préstamos para empresas y particulares. A estos últimos les fueron concedidos el 60% del total. Pasado un tiempo, el banco no recuperó el 6% de los créditos a empresas y el 20% de los particulares.

a) Si se selecciona un crédito al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea moroso?
b) Entre los créditos que son morosos, ¿qué probabilidad corresponden a empresas?

A 4 *(hasta 2 puntos)*
En un gabinete médico se realiza una prueba de reacción a señales luminosas para medir los reflejos de los pacientes. Los resultados en milisegundos (ms) se ajustan a una distribución normal N(μ, σ), donde σ=300 ms. A partir de una muestra aleatoria simple, se obtiene un intervalo de confianza de (740,820) para esa media "μ", con n_c= 95%. Se pide:

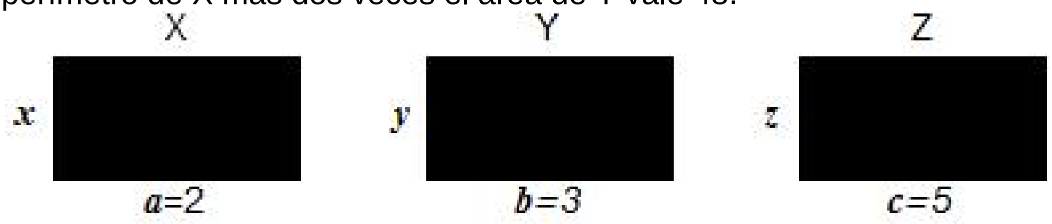
a) La media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
b) El error cometido en el cálculo de "μ", si ahora tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 64 y n_c= 86%.

OPCIÓN B

B 1 *(hasta 3 puntos)*

a) Dadas las matrices $\mathrm{R} = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -1+x & 3y \end{pmatrix}$ y $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$, determinar el valor de las componentes *x*>0 e *y* para que se verifique $\mathrm{R}^2 = \mathrm{S}$, donde $\mathrm{R}^2 = \mathrm{R} \cdot \mathrm{R}$.

b) Se conoce la longitud, *a*=2, *b*=3 y *c*=5, de un lado de cada rectángulo de la figura X, Y, Z (NO dibujados a escala) y la otra no, *x*, *y*, *z*. Determinar *x*, *y*, *z* para que se cumpla: (i) la suma del área de los tres rectángulos vale 64, (ii) la suma de los perímetros de los rectángulos X e Y vale 34 y (iii) la suma del perímetro de X más dos veces el área de Y vale 48.



B 2 *(hasta 3 puntos)*

La función *f*(*x*) está definida a trozos. Cuando *x*≤3 vale *f*(*x*)=*ax*+*b* y cuando *x*≥3 vale *f*(*x*)=$cx^2 + dx + e$, donde *a, b, c, d* y *e* son parámetros desconocidos. Si la función *f*(*x*) tiene un máximo en *x*=4 y la función y su derivada en *x*=3 valen respectivamente *f*(3)=3 y *f'*(3)= 2:

a) Hallar los valores de los parámetros *a, b, c, d* y *e* que determinan la función *f*(*x*).
b) Obtener las coordenadas de los puntos de corte *P* y *Q* de la función *f*(*x*) con el eje de abscisas OX y calcular la integral de *f*(*x*) en el intervalo [*P*,*Q*].

B3 *(hasta 2 puntos)*

En una urna hay 15 bolas blancas y 5 bolas negras. Calcular:

a) Si se extrae una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?
b) Extrayendo dos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?
c) Si se extrae primero una bola, y luego otra, siendo la primera negra, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea también negra?
d) Si se extrae una bola y luego otra, ¿cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

B4 *(hasta 2 puntos)*

Un estudio, sobre el número de fumadores de una zona a partir de una muestra de tamaño 361, señala que la proporción muestral de fumadores es del 35%. Con estos datos se pide calcular:

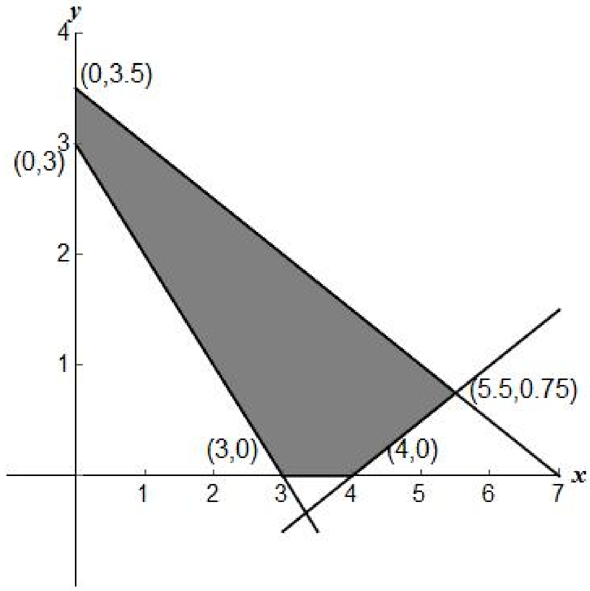
a) ¿Cuál es el intervalo de confianza al 95%?
b) ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza al 99% sea de 0'12?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A 1 *Problema de programación lineal en dos variables:*

a) Recinto de soluciones compatibles en el plano XY:



b) Los vértices del recinto son: (0,3), (0,3.5), (3,0), (4,0) y (5.5,0.75). El máximo de la función F(*x,y*) está en (5.5,0.75), F(5.5,0.75) =13.25

c) Los siguientes puntos del recinto tienen como coordenadas números enteros: (0,3), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1), (3,2), (4,0), (4,1) y (5,1). El máximo está en (5,1), F(5,1) =13.

A 2 *Cálculo de los valores de una función y sus máximos. Interpretación:*

a) $f(t) = t^3/3 - 5t^2 + 16t + 30 \Rightarrow f'(t) = t^2 - 10t + 16.$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = 2, \\ t = 8. \end{cases}$$

En *t*=2 está el máximo, *f''*(2)<0, y en *t*=8 el mínimo, *f''*(8)>0. Para obtener el mayor beneficio se comprará en precios mínimos (*t* =0 y *t* =8) y se venderá en precios máximos (*t* =2 y *t* =12).

b) Para obtener el máximo beneficio se debe seguir la siguiente secuencia:

t=0, *f*(0)=30: comprar 100 acciones = 3000€,

t=2, *f*(2)=134/3: vender las 100 acciones = 4466.67€.

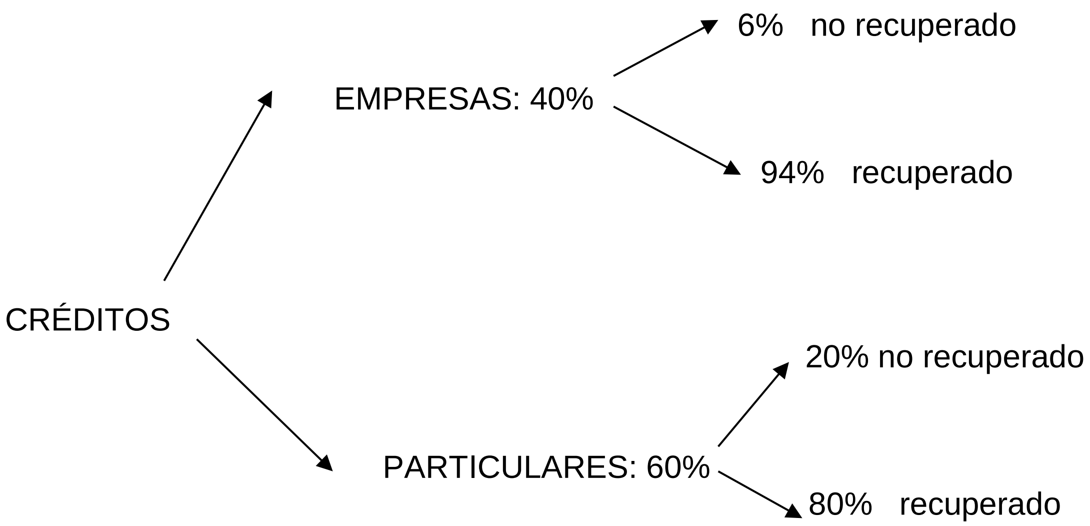
t=8, *f*(8)=26/3: comprar 515 acciones = 4466.67€ (3.33€ sobrantes).

t=12, *f*(12)=78 vender las 515 acciones = 40170€.

El dinero obtenido por la venta más el sobrante de 3.33€ = 40173.33€ menos los 3000€ iniciales = 37173.33€ (beneficios).

Observación: A los y las estudiantes que respondan la solución 40170€ ó 40173.33€ se les considerará el problema correcto dado que han entendido el proceso.

A 3 *Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicional:*



a) P(moroso)= 0’4 · 0’06 + 0’6 · 0’2 = 0’024 + 0’12 = 0’144.

b) P(empresa/moroso) = 0’4 · 0’06 / (0’4 · 0’06 + 0’6 · 0’2) = 0’024 / 0’144 = 0’166.

A 4 *Ejercicio de cálculo de un intervalo de confianza para la media de una población con distribución normal:*

a) Cálculo de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$: $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0'95}{2}$ = 0’9750 => $Z_{\frac{\alpha}{2}} =$ 1’96.

$(740, 820) = (\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} - 1'96 \frac{300}{\sqrt{n}} = 740 \\ \\ \bar{x} + 1'96 \frac{300}{\sqrt{n}} = 820 \end{array}\right\} \quad 2\,\bar{x} = 1560 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 780.$$

Cálculo del tamaño de la muestra: de la expresión $\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 820$, obtenemos:

$\sqrt{n}$ = 1’96· 300 / (820 -780) => n= 217 (redondeo del valor 216’09)

b) $n_c = 86\%$ n = 64.

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$: $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0'86}{2}$ = 0’9300 => $Z_{\frac{\alpha}{2}} =$ 1’48.

Error: $Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 1’48 · $\frac{300}{\sqrt{64}}$ = 1’48 · 37’5 = 55’5 ms.

OPCIÓN B

B 1 *Ejercicio de cálculo matricial y de resolución de sistemas lineales:*

a) $R^2 = \begin{pmatrix} -3+3x+x^2 & 3x+9y \\ -x+x^2-3y+3xy & -3+3x+9y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix} = S$

$x^2+3x-3=1, x>0 \Rightarrow x = \frac{-3+\sqrt{9+16}}{2} = 1$. Del resto: $y=-2$.

b) De las condiciones planteadas se deduce el siguiente sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y+5z=64, \\ 2(2+x)+2(3+y)=34, \\ 2(2+x)+2\cdot 3y=48. \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=7, \\ y=5, \\ z=7. \end{cases}$$

B 2 *Continuidad de funciones y cálculo de parámetros desconocido de una función. Cálculo de integral definida:*

a) $\begin{cases} x\le 3: f'(3)=2 \Rightarrow a=2,\ f(3)=3 \Rightarrow b=-3 \\ x\ge 3: f'(3)=2 \Rightarrow 6c+d=2,\ f(3)=3 \Rightarrow 9c+3d+e=3,\ f'(4)=0 \Rightarrow 8c+d=0, \end{cases}$

En consecuencia: $a=2, b=-3, c=-1, d=8, e=-12$.

b) Los puntos de corte de la función con el eje OX:

x≤3: $f(x)=0 \Rightarrow 2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow P=\left(\frac{3}{2},0\right)$.

x≥3: $f(x)=0 \Rightarrow -x^2+8x-12=0 \Rightarrow x=\frac{-8-\sqrt{64-48}}{-2}=6 \Rightarrow Q=(6{,}0)$.

Cálculo de la integral definida:

$$\int_{\frac{3}{2}}^{6} f(x)dx = \int_{\frac{3}{2}}^{3}(2x-3)dx + \int_{3}^{6}(-x^2+8x-12)dx$$

$$= [x^2-3x]_{3/2}^{3} + \left[-\frac{x^3}{3}+4x^2-12x\right]_3^6 = 2.25+9=11.25$$

B 3 *Cálculo de probabilidades de un suceso. Ley de Laplace:*

a) P(blanca)= 15/20 = 0’75.
b) P(dos blancas)= 15/20 · 14/19 = 21/38 = 0’552.
c) P(Si 1º es negra, 2ª negra)= 4/19 = 0’210.
d) P(dos bolas de color distinto)= 15/20 · 5/19 + 5/20 · 15/19 = 0’394.

B 4 *Cálculo del intervalo de confianza de la media de una población que sigue una distribución normal:*

a) $\hat{p} = 0'35$ $\hat{q} = 0'65$ $n_c = 0'95$ n= 361.

Cálculo de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$: $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0'95}{2}$ = 0'9750=> $Z_{\frac{\alpha}{2}} =$ 1'96.

$Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$ => 1'96 · $\sqrt{\frac{0'35\cdot 0'65}{361}}$ = 1'96 / 19 $\sqrt{0'2275}$ = 0'049.

I.C. ≡ $\left(\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ = (0'35-0'049, 0'35+0'049) = (0'301, 0'399).

b) Tamaño de la muestra "n"

$n_c = 0'99$ => $Z_{\frac{\alpha}{2}}$: $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0'99}{2}$ = 0'9950 => $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ = 2'575.

Si la amplitud del intervalo es 0'12, entonces, error = 0'06.

2'575 · $\sqrt{\frac{0'35\cdot 0'65}{n}} = 0'06$ => n =$\left(\frac{2'575}{0'06}\right)^2 \cdot 0'35 \cdot 0'65$ = 419'01 => n= 420.