OPCIÓN A

A 1 *(hasta 3 puntos)*
Sean las cuatro inecuaciones lineales:

(i) $4y - x \geq 4,$ (ii) $2y - x \leq 6,$ (iii) $y - x \leq 1,$ (iv) $2y + x \leq 8$

a) Dibuja en el plano XY el recinto limitado por las inecuaciones (i), (ii), (iii) y (iv). ¿Qué inecuación es superflua? (su ausencia no altera dicho recinto).
b) ¿Cuál es el máximo de la función $F(x,y) = 3x\text{-}2y$ en el recinto definido en el apartado anterior?

A 2 *(hasta 3 puntos)*
En el periódico local se publican al mes x anuncios de un gimnasio, para captar abonados, siendo $0 \leq x \leq 14$. El precio por anuncio es de 300 €. El número de abonados se estima mediante la función $A(x) = -x^2 + 28x$, y cada uno paga mensualmente 100 €. Además del gasto en anuncios, el gimnasio gasta mensualmente 12.000 € en mantenimiento. El balance mensual, $f(x)$, son las cuotas de socios menos los gastos.

a) ¿Cuál es el menor número de anuncios a contratar para eliminar las pérdidas y conseguir que el negocio sea rentable?
b) ¿Cuántos anuncios deben contratarse para maximizar las ganancias y a cuántos euros ascienden dichas ganancias?

A 3 *(hasta 2 puntos)*
En una clínica se realizan únicamente tres tipos de servicios: ecografías, en el 35% de los casos, radiografías, en el 40% y resonancias magnéticas en el 25%. El 60% de las ecografías son de mujeres, el 50% de las radiografías son de mujeres y el 60% de las resonancias son de hombres. Si se elige un paciente al azar se pide:

a) La probabilidad de que el paciente elegido haya sido mujer.
b) Si el paciente elegido ha sido mujer, probabilidad de que el servicio realizado sea una ecografía.

A 4 *(hasta 2 puntos)*
El número de viajes realizados mensualmente por los usuarios habituales de la línea de autobuses Donostia-Bilbao sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma=10$. Si seleccionamos una muestra de 625 usuarios, resulta que la media de viajes realizados por los viajeros es de 16 viajes. Contestar:

a) ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media μ de viajes mensuales en toda la población para un nivel de significación del 4%?
b) ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media μ de viajes mensuales en toda la población para un nivel de confianza del 98%?

OPCIÓN B

B 1 *(hasta 3 puntos)*

Dadas las matrices $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$, encontrar las componentes de las matrices de dimensión 2x2, $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ y $\mathrm{H} = \begin{pmatrix} f & g \\ h & i \end{pmatrix}$ para que se cumplan las siguientes igualdades matriciales:

a) $\mathrm{A\,M\,B} = \mathrm{C}$
b) $\mathrm{A\,H\,B}^{-1} = \mathrm{C}$.

B 2 *(hasta 3 puntos)*

Sean el polinomio cúbico $p(x) = 2x^3+bx^2+c$ y la parábola $q(x) = -x^2+6x+10$.

a) Determinar los coeficientes de las incógnitas b y c para que dos de los puntos de corte entre $p(x)$ y $q(x)$ tengan por abscisas $x=0$ y $x=6$. Dibujar un esbozo de la gráfica de las funciones $p(x)$ y $q(x)$.
b) Calcular el área de la región limitada por las curvas $p(x)$ y $q(x)$ en el intervalo $0 \le x \le 6$, sabiendo que en su interior no hay ningún punto de corte de $p(x)$ y $q(x)$.

B 3 *(hasta 2 puntos)*

Una familia hace sus compras de la siguiente manera: el 50% en tiendas locales, el 40% por Internet y, el resto, a través de terceras personas. En las tiendas pagan en el 60% de los casos con tarjeta y en el resto en metálico. En Internet pagan en el 70% de los casos con tarjeta y en el resto en metálico (contra reembolso). Si compran a través de una tercera persona, siempre pagan en metálico. Si se elige una compra al azar:

a) Calcular la probabilidad de que ésta se haya pagado en metálico.
b) Si una compra se ha pagado con tarjeta, calcular la probabilidad de que ésta se haya hecho en una tienda.

B 4 *(hasta 2 puntos)*

Se desea estimar la proporción de personas que son miopes, para lo cual, se toma una muestra de n individuos.

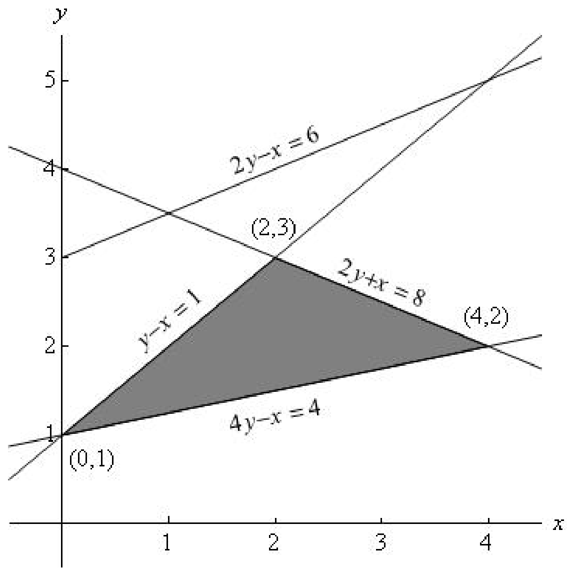
a) El porcentaje de miopes en esa muestra es del 32%. Calcular el tamaño mínimo de la muestra para que, con un nivel de confianza del 92%, el error cometido en la estimación de la proporción en toda la población p no supere el 3%.
b) En una muestra de 625 personas la proporción de miopes es del 30%. Calcular el intervalo de confianza correspondiente a un nivel de significación del 2% para la proporción p de miopes de la población.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A 1 *(Ejercicio de programación lineal en dos variables)*

a) Recinto limitado por las restriciones del problema:



De las cuatro restricciones, la frontera de la (ii) es $2y - x = 6$ y esta recta queda fuera del recinto limitado por las otras tres restricciones.

b) El máximo de la función lineal $F(x,y)$ se alcanza en uno de los vértices de la región del apartado anterior: A=(0,1) , B=(2,3) o C=(4,2):

$F(\mathrm{A}) = -2, \quad f(\mathrm{B}) = 0, \quad f(\mathrm{C}) = 8$ (máximo).

A 2 *(Cálculo de valores de una función y de su máximo. Interpretación)*

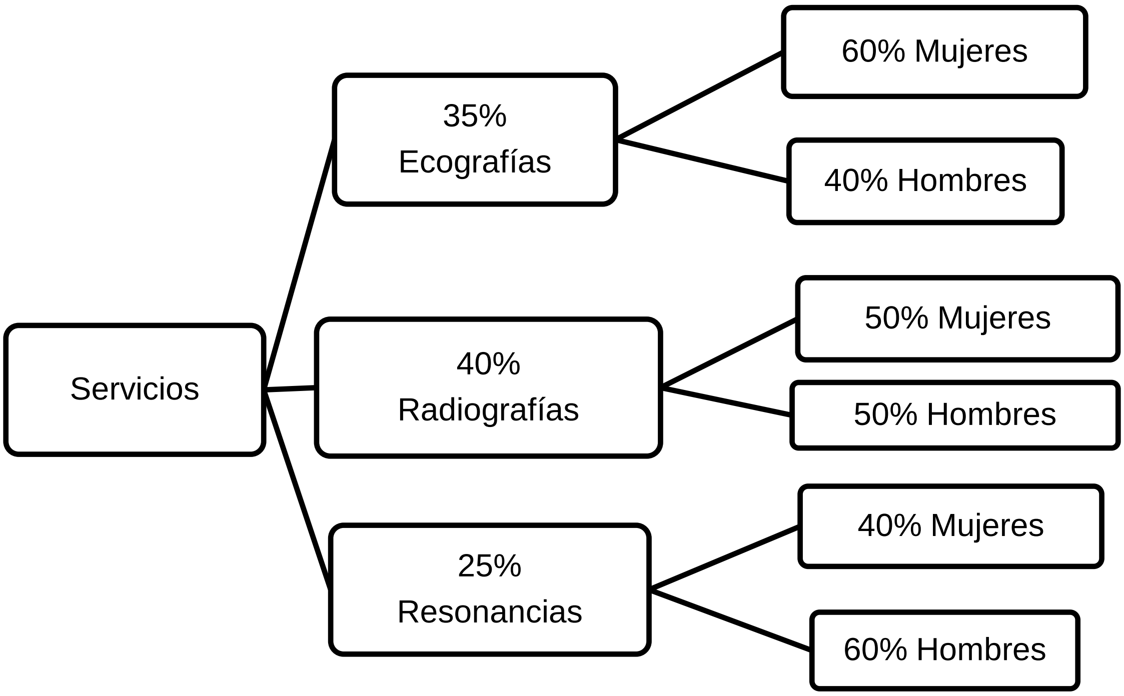
$$f(x) = 100(-x^2 + 28x) - 300x - 12000 = 100(-x^2 + 25x - 120),$$

a) La función $f(x)$ es positiva en el intervalo 6'48 ≤ x ≤ 18'52. Luego el mínimo número de anuncios para hacer el negocio rentable es x = 7.

b) $f'(x) = 100(-2x + 25) = 0 \Rightarrow x = 12'5$.

x debe ser un número entero: $f(12) = f(13) = 3600$ € es la ganancia máxima, luego $x=12$ o $x=13$ es el número de anuncios apropiado.

A 3 *(Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicional)*



a) P (mujer) = 0'35· 0'6 + 0'4· 0'5 + 0'25· 0'4 = 0'21 + 0'2 + 0'1 = 0'51 ≡ 51%

b) P (Eco/mujer) $= \frac{0'35 \cdot 0'6}{0'35 \cdot 0'6 + 0'4 \cdot 0'5 + 0'25 \cdot 0'4} = \frac{0'21}{0'51} = 0'4117 \equiv 41'17\%$

A 4 *(Cálculo del intervalo de confianza de la media de una población que sigue una distribución normal)*

Datos del problema: σ = 10 viajes, $\bar{x}$ = 16 viajes, n = 625 tamaño muestra.

a) Nivel de significación: $\alpha = 0'04 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'02 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'055$

Amplitud del intervalo de confianza = $Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2'055 \cdot \frac{10}{25} = 0'822$.

Intervalo de confianza = (16-0'822, 16+0'822) = (15'178, 16'822).

b) Nivel de confianza: $n_c = 0'98 \Rightarrow \alpha = 0'02 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'01 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'33$

Amplitud del intervalo de confianza = $Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2'33 \cdot \frac{10}{25} = 0'932$.

Intervalo de confianza = (16-0'932, 16+0'932) = (15'068, 16'932).

OPCIÓN B

B 1 *(Ejercicio de cálculo matricial)*

a) $\mathrm{A}\cdot\mathrm{M}\cdot\mathrm{B}=\mathrm{C}\Longrightarrow\begin{pmatrix}2p-4q & 6p+4q\\ -r+2s & -3r-2s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & -6\\ -9 & -11\end{pmatrix}$,

Se deduce: $p=1,\ q=-3,\ r=5,\ s=-2$

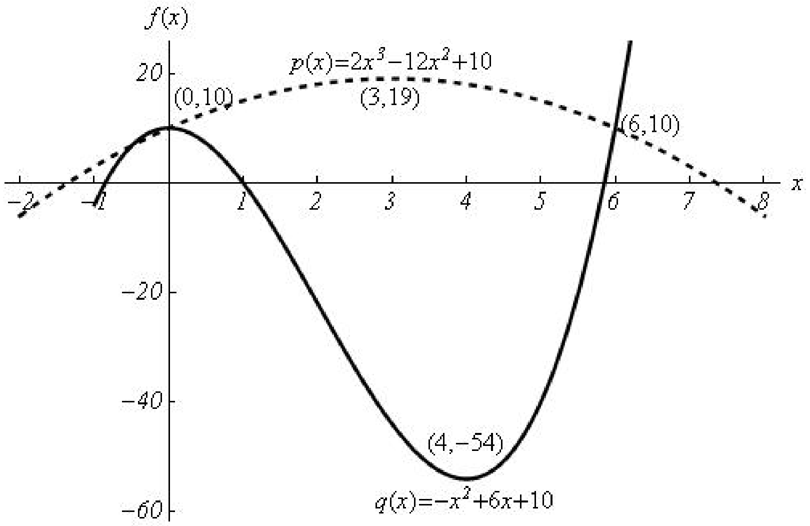
b) $\mathrm{A}\cdot\mathrm{H}\cdot\mathrm{B}^{-1}=\mathrm{C}\Longleftrightarrow\mathrm{A}\cdot\mathrm{H}=\mathrm{C}\cdot\mathrm{B}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}2f & 2g\\ -h & -i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26 & 30\\ 13 & -49\end{pmatrix}$

Se deduce: $f=13,\ g=15,\ h=-13,\ i=49$

B 2 *(Cálculo de parámetros de una función. Cálculo del área mediante integral)*

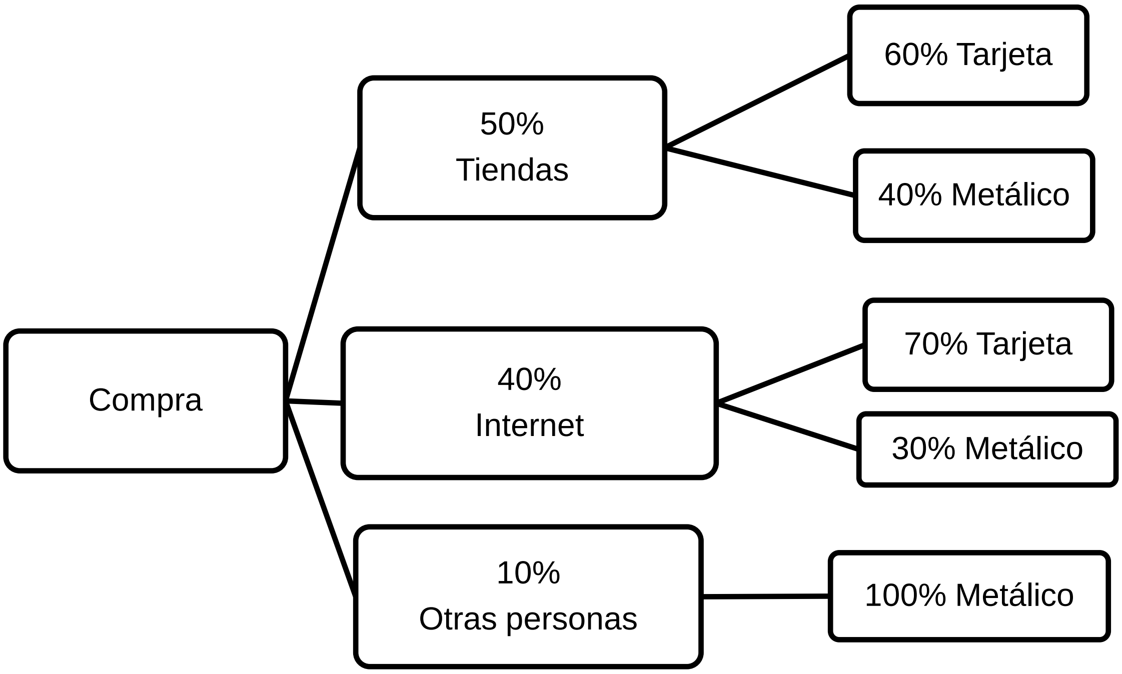
a) $10=q(0)=p(0)=c\Longrightarrow c=10$,

$10=q(6)=p(6)=2\cdot6^3+b\cdot6^2+10\Longrightarrow b=-12$.



b) $\int_0^6[p(x)-q(x)]\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2+10x-\frac{1}{2}x^4+4x^3-10x\right]_0^6=252.$

B 3 *(Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicional)*



a) $\mathrm{P(met)} = 0'5 \cdot 0'4 + 0'4 \cdot 0'3 + 0'1 \; = \; 0'2 + \; 0'12 + 0'1 = 0'42 \equiv 42\%$.

b) $\mathrm{P(tienda|tarjeta)} = \frac{0'6 \cdot 0'5}{0'6 \cdot 0'5 + 0'7 \cdot 0'4} = \frac{0'3}{0'58} = 0'5172 \equiv 51'72\%$.

B 4 *(Cálculo del intervalo de confianza de la proporción de una población)*

a) Datos: $\hat{\mathrm{p}} = 0'32$ proporción de míopes de la muestra, $\hat{\mathrm{q}} = 1 - \hat{\mathrm{p}} = 0'68$.
Nivel de confianza: $\mathrm{n_c} = 0'92 \Rightarrow \alpha = 0'08 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'04 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'75$
Amplitud del intervalo de confianza = $Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1'75 \cdot \sqrt{\frac{0'32 \cdot 0'68}{n}}$

$$1'75 \cdot \sqrt{\frac{0'32 \cdot 0'68}{n}} \leq 0'03 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{1'75}{0'03}\right)^2 \cdot 0'32 \cdot 0'68 = 744'4 \Longrightarrow n = 745\,.$$

b) Datos: $\hat{\mathrm{p}} = 0'30, \; \hat{\mathrm{q}} \; = \; 1 - \hat{\mathrm{p}} = 0'70, \; \mathrm{n} = 625$.
Nivel de significación: $\alpha = 0'02 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'01 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'325$.
Amplitud intervalo de confianza = $Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2'325 \cdot \sqrt{\frac{0'3 \cdot 0'7}{625}} \; = \; 0'042$.
Intervalo de confianza = (0’3 – 0’042, 0’3 + 0’042) = (0’258, 0’342)