

OPCIÓN A

A 1 (hasta 3 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- ¿Qué valores deben tomar los parámetros desconocidos $\{x, y, z\}$ para que se verifique la igualdad matricial $A \cdot B = C$?
- Calcula las componentes de la matriz E^{20} . Pista: aprovecha las simetrías en la matriz E o el cálculo de sus primeras potencias para identificar un patrón.

A 2 (hasta 3 puntos)

Se estima que el número de enfermos de gripe en una ciudad en el instante x está definido por la función $f(x) = -3x^2 + 24x$, siempre que ésta sea positiva. La variable x se mide en semanas. Los instantes en que $f(x) = 0$ marcan el intervalo de definición de $f(x)$ y la duración de la epidemia. El número de enfermos hospitalizados se estima por la función $g(x) = -4x^2 + 44x - 96$ cuando ésta sea positiva y $g(x) = 0$ en caso contrario.

- Esboza una gráfica de cada una de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ e indica en qué puntos alcanzan su máximo cada una de ellas.
- El número de personas enfermas de gripe que permanecen en su casa se estima mediante la función $h(x) = f(x) - g(x)$. Escribe la expresión de la función $h(x)$ e indica cuándo es creciente y cuándo decreciente.

A 3 (hasta 2 puntos)

Antes de acabar el curso la profesora hace una encuesta sobre las vacaciones de sus alumnos. El 30% responden que harán turismo en la propia autonomía, desplazándose el 70% en coche y el 30% en tren. Un 45% viajará a otras autonomías del Estado, desplazándose el 60% en coche, el 30% en tren y el 10% en avión. Los restantes saldrán al extranjero, desplazándose el 60% en avión, el 30% en coche y el 10% en tren. Si elegimos un alumno o alumna al azar, calcular:

- Probabilidad de que haya elegido desplazarse en coche o en avión.
- Si se va a desplazarse en avión, probabilidad de que no haya elegido ir al extranjero.

A 4 (hasta 2 puntos)

La edad de los alumnos que han acabado bachillerato sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma = 0,35$ años. La edad media de una muestra de 120 alumnos es 18,2 años. Determinar el intervalo de confianza al 96% para la edad media de la población total de alumnos μ que han acabado ese bachillerato.

OPCIÓN B

B 1 (hasta 3 puntos)

Para optimizar las ganancias un agricultor debe repartir sus 10 áreas de terreno cultivando una cierta superficie de pimientos "P" y de tomates "T". Descontando gastos, el beneficio por área de pimiento es de 200 € y de tomate 250 €. Diariamente hay 180 l. de agua para regar todo el terreno; un área de pimiento consume 10 l. mientras que una de tomate 20 l. La siembra de un área de pimiento cuesta 20 € y de una de tomate 10 €, siendo el presupuesto disponible 160 €.

- Dibuja en el plano (P, T) el recinto de posibles repartos de la superficie respetando las restricciones del problema.
- Escribe la función que calcula el beneficio $F(P, T)$ y encuentra el valor (P, T) en el que se alcanza el máximo. Calcula dicho máximo.

B 2 (hasta 3 puntos)

La función $f(x)$ está definida a trozos. Cuando $x \leq 0$, $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ y cuando $x > 0$, $f(x) = ax + b$.

- Hallar los coeficientes a y b para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$ y a su vez corte al eje OX en $x = 3/2$.
- Encontrar los dos puntos de corte de la curva $f(x)$ con el eje OX y calcular el área de la región limitada por la curva $f(x)$ y el eje OX entre dichos puntos.

B 3 (hasta 2 puntos)

En un laboratorio se ensaya en tres grupos de 100 ratones con tres tipos de bacterias (A, B y C) que pueden causar neumonía. A los ratones del primer grupo se les inocula la bacteria A y el 40% contraen neumonía, al segundo grupo la bacteria B y el 60% contraen neumonía y al tercer grupo la bacteria C y el 25% contraen neumonía. Después del experimento, se elige un ratón al azar.

- Calcula la probabilidad de que el ratón haya contraído una neumonía.
- Si el ratón ha contraído la neumonía, calcula la probabilidad de que pertenezca al grupo de ratones al que se le ha inoculado la bacteria de tipo B.

B 4 (hasta 2 puntos)

Una sociedad deportiva hace una campaña de captación de chicos y chicas para formar equipos de fútbol en todas sus categorías entre 10 y 18 años. La edad de los presentados sigue una distribución normal de desviación típica $\sigma = 2.5$. La media de edad en una muestra de chicos y chicas es de 13.7 años. Responder:

- ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para asegurar que el error de la estimación de la media poblacional μ no supera 0.4 años, con un nivel de confianza del 95%?
- Si la muestra fuese de 144 chicos y chicas ¿cuál sería el nuevo intervalo de confianza para la media poblacional μ con un nivel de confianza del 95%?



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A 1 (Ejercicio de cálculo matricial)

$$a) \quad \cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ y & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 6y & 2x - 6 \\ -9 - 5y & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & z \\ -z & -1 \end{pmatrix},$$

se deduce: $x = 5, y = -1, z = 4$

$$b) \text{ Datos } E = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ con } a = 1 \text{ y } b = 2 \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

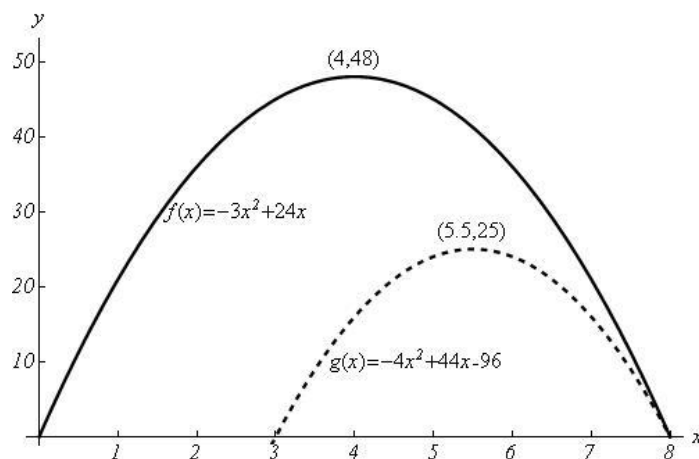
$$E^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = (a^2 + b^2) \cdot I,$$

$$E^3 = (a^2 + b^2) \cdot E, \quad E^4 = (a^2 + b^2)^2 \cdot I, \dots$$

$$\text{se deduce: } E^{20} = (a^2 + b^2)^{10} \cdot I = \begin{pmatrix} 5^{10} & 0 \\ 0 & 5^{10} \end{pmatrix}$$

A 2 (Cálculo de valores y máximo de una función. Interpretación)

a) Gráfica de las funciones



$$\text{Puntos de corte con el eje } OX: \begin{cases} f(x) = -3x^2 + 24x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 8, \\ g(x) = -4x^2 + 44x - 96 = 0 \Rightarrow x = 3, x = 8. \end{cases}$$

$$\text{Máximos: } f'(x) = 0 \Rightarrow x = 4, f(4) = 48. \quad g'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{2}, g\left(\frac{11}{2}\right) = 25$$

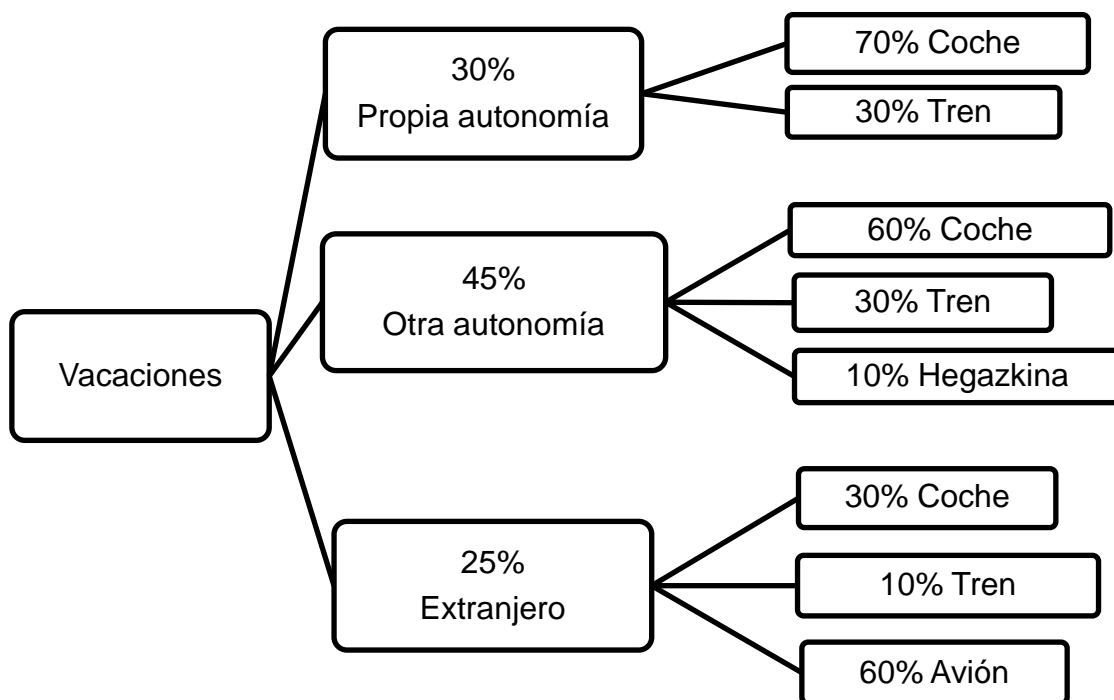
$$b) \quad h(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} -3x^2 + 24x, & 0 \leq x \leq 3, \\ x^2 - 20x + 96, & 3 \leq x \leq 8. \end{cases}$$



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

En el intervalo $0 \leq x < 3$, $h(x)$ es creciente ya que $h'(x) = -6x + 24 > 0$. En el intervalo $3 < x \leq 8$, $h(x)$ es decreciente ya que $h'(x) = 2x - 20 < 0$.

A 3 (Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicional)



a) $P(\text{coche o avión}) = 1 - P(\text{tren}) = 1 - (0'3 \cdot 0'3 + 0'45 \cdot 0'3 + 0'25 \cdot 0'1) = 1 - 0'25 = 0.75 \equiv 75\%$.

b) La única opción es un desplazamiento a otra autonomía del Estado:

$$P(\overline{\text{Ext}}|\text{Avión}) = \frac{0'45 \cdot 0'1}{0'45 \cdot 0'1 + 0'25 \cdot 0'6} = \frac{0'045}{0'195} = 0'2307 \equiv 23'07\%$$

A 4 (Ejercicio de cálculo de un intervalo de confianza para la media de una población con distribución normal)

Datos del problema: $\sigma = 0'35$ años, $\bar{x} = 18'2$ años, $n = 120$ tamaño muestra

Nivel de confianza: $n_c = 0'96 \Rightarrow \alpha = 0'04 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'02 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'055$

Amplitud del intervalo de confianza = $Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2'055 \cdot \frac{0'35}{\sqrt{120}} = 0'065$.

Intervalo de confianza = $(18'2 - 0'065, 18'2 + 0'065) = (18'135, 18'265)$.



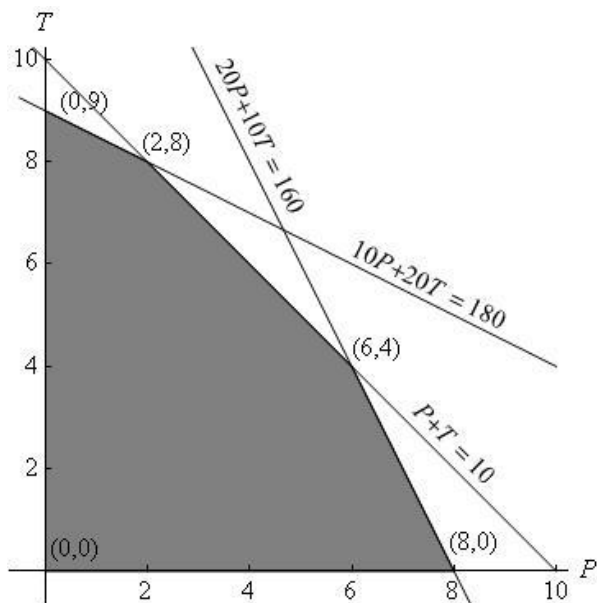
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

OPCIÓN B

B 1 (Resolución de un problema de programación lineal en dos variables)

a) Las restricciones del problema y el recinto que limitan son:

$$P + T \leq 10, \quad 10P + 20T \leq 180, \quad 20P + 10T \leq 160.$$



b) Función objetivo: $F(P, T) = 200P + 250T$. Los vértices del dominio de soluciones factibles: $A=(0,0)$, $B=(0,9)$, $C=(2,8)$, $D=(6,4)$ y $E=(8,0)$.
Máximo de la función objetivo: $F(2,8) = 2400$ que se alcanza en $C=(2,8)$.

B 2 (Continuidad de una función cálculo de parámetros y cálculo de un área mediante integral)

a) $f(0)=3$, luego para que $f(x)$ sea continua el límite izquierdo en $x=0$ es:

$$3 = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax + b) = b \Rightarrow b = 3. \text{ Por otra parte, } 0 = f\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow a = -2.$$

$$b) \begin{cases} x \leq 0, f(x) = -x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ x > 0, f(x) = -2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

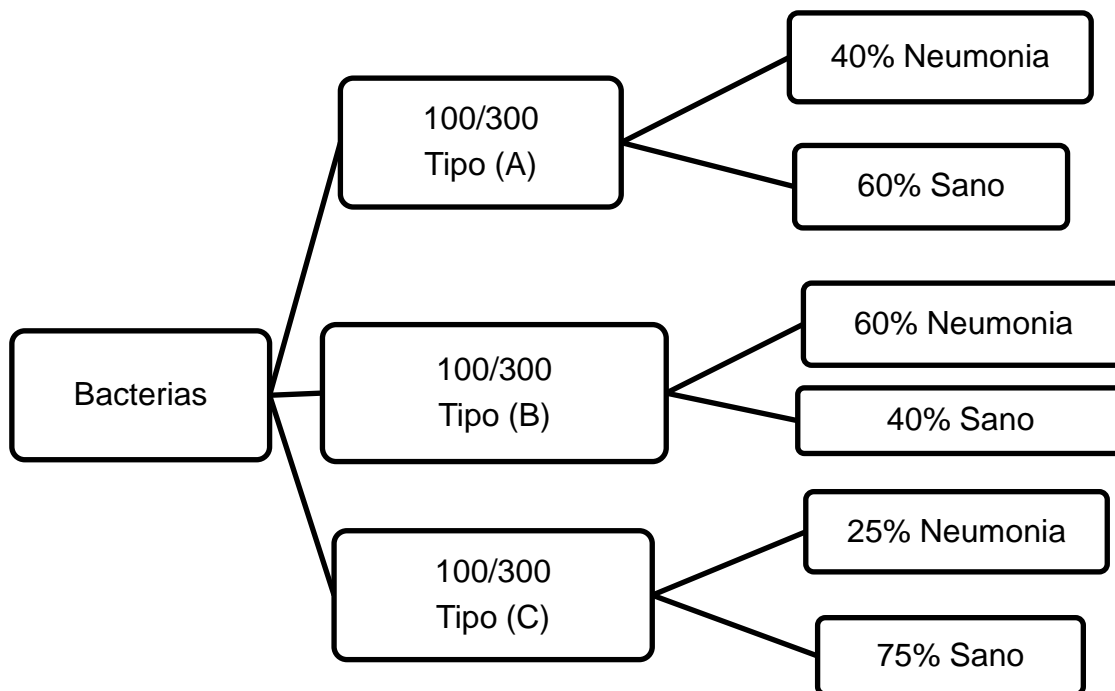
$$\text{Azalera} = \int_{-3}^0 (-x^2 - 2x + 3) dx + \int_0^{\frac{3}{2}} (-2x + 3) dx =$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x \right]_{-3}^0 + \left[-x^2 + 3x \right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{45}{4}.$$



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

B 3 (Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicional)



a) $P(\text{Neumonía}) = \frac{40+60+25}{300} = \frac{125}{300} = 0'4166 \equiv 41'66\%$.

b) $P(B|\text{Neumonía}) = \frac{0'6}{0'4+0'6+0'25} = \frac{0'6}{1'25} = 0'48 \equiv 48\%$.

B 4 (Cálculo del intervalo de confianza de la media de una población que sigue una distribución normal)

Datos del problema: $\sigma = 2'5$ años, $\bar{x} = 13'7$ años.

a) Nivel de confianza: $n_c = 0'95 \Rightarrow \alpha = 0'05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'025 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

Amplit. int. confianza = $Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96 \cdot \frac{2'5}{\sqrt{n}} \leq 0'4 \Rightarrow n \geq 150'06 \Rightarrow n = 151$.

b) Tamaño muestra: $n = 144$.

Nivel de confianza: $n_c = 0'95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'025 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

Amplitud del intervalo de confianza = $Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96 \cdot \frac{2'5}{12} = 0'408$.

Intervalo de confianza = $(13'7-0'408, 13'7+0'408) = (13'292, 14'108)$.