

OPCIÓN A

A 1 (hasta 3 puntos)

Consideramos la función lineal $F(x,y) = 15x + 6y$ definida en el plano XY y las siguientes restricciones:

$$6 \leq 2x + 3y \leq 29, \quad 0 \leq y \leq -1 + 2x, \quad 5x + 2y \leq 45.$$

- Dibujar en el plano XY la región de soluciones factibles que cumplen las restricciones.
- Hallar los máximos y mínimos de la función $F(x,y)$ en la región descrita en el apartado anterior.

A 2 (hasta 3 puntos)

El polinomio cúbico $f(x) = ax^3 + bx - 22$ pasa por el punto $(1,0)$ y tiene un máximo en $x = 2$. Responder las siguientes preguntas:

- Encontrar con la información anterior los coeficientes a y b .
- Encontrar el mínimo y el máximo de la función $f(x)$ y hacer un esbozo de la gráfica del polinomio con todas sus características significativas.

A 3 (hasta 2 puntos)

Un productor de Ecuador y otro de Brasil trasladan cajas idénticas de una tonelada (tn) de peso a un almacén. Cada caja puede contener plátanos o café. El productor de Brasil aporta 600 cajas de plátanos y 1.200 de café y el de Ecuador aporta 750 cajas de plátanos y un número desconocido de cajas de café. Responder las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas toneladas de café habrá aportado Ecuador si el café es el 60 % del contenido del almacén?

Un cliente compra café de Ecuador dejando sólo 400 tn de este producto en el almacén.

- Si alguien elige al azar consecutivamente dos cajas, ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo país?
- ¿Qué probabilidad hay de que si una caja elegida al azar es de plátanos, su origen sea Ecuador?

A 4 (hasta 2 puntos)

En una muestra de 300 universitarios el 80 % ha respondido que acude semanalmente al cine.

- ¿Entre qué valores se encuentra, con un nivel de confianza del 95 %, la proporción del total de universitarios que acude todas las semanas al cine?
- ¿Y el intervalo para la proporción anterior con un nivel de confianza del 99 %?

OPCIÓN B

B 1 (hasta 3 puntos)

- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ a & b \end{pmatrix}$, determinar los valores de los parámetros a y b para que se verifique la ecuación matricial $A^2 = 2A$.
- Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular la matriz $D = B^{50} \cdot C^T$ (C^T es la matriz traspuesta de C).

B 2 (hasta 3 puntos)

A lo largo de la semana una planta potabilizadora de agua aporta al depósito municipal una cantidad de litros expresada por la función $p(x) = 10x^2 - 100x + 550$, donde $0 \leq x \leq 7$ representa el instante de la semana medido en días. De la misma manera, la demanda de agua se representa por la función $d(x) = -10x^2 + 80x + 240$. Por un lado el flujo de agua en el instante x es la diferencia entre lo aportado y lo extraído, es decir, $f(x) = p(x) - d(x)$ y por otro el excedente $e(r)$ es la cantidad de agua acumulada hasta el momento r , $e(r) = \int_0^r f(x)dx$. Responder:

- ¿Cuál es el instante de mayor demanda?
- ¿En qué intervalo de tiempo el flujo es negativo, es decir, el depósito se está vaciando?
- ¿Cuál es el excedente al final de la semana ($r = 7$)?

B 3 (hasta 2 puntos)

Un concesionario vende vehículos de dos gamas: U (urbano) y L (lujoso). El 60 % son de la gama U; de éstos, el 4 % vienen con cambio automático (A), mientras que el resto de los de gama U son de cambio manual (M). En el stock total el porcentaje de vehículos con cambio automático A es el 5 % y de cambio manual M el 95 %.

- Si se elige un vehículo al azar y tiene cambio automático, hallar la probabilidad de que sea urbano.
- ¿Qué porcentaje de vehículos de lujo tienen cambio automático?

B 4 (hasta 2 puntos)

Las calificaciones de 1000 estudiantes sometidos a un test de inteligencia se distribuyen normalmente con media 70 y desviación típica 20. Calcular:

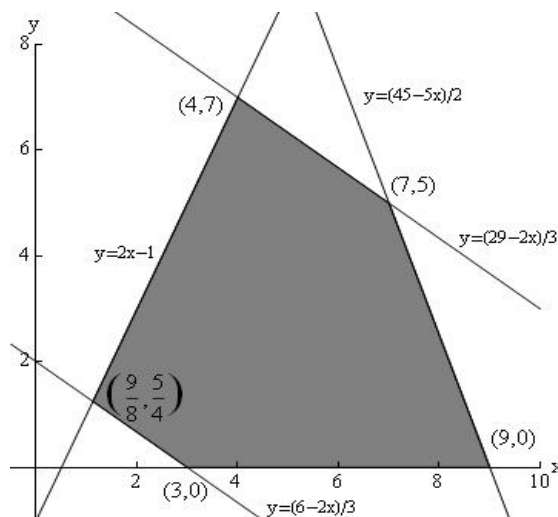
- La probabilidad de que un estudiante obtenga más de 80 puntos.
- La probabilidad de que un estudiante obtenga menos de 50 puntos.
- ¿Cuál es, con una probabilidad del 95 %, la calificación máxima que se puede esperar alcanzar?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A 1 (Resolución de un problema de programación lineal)

a) La siguiente figura corresponde al dominio:



b) El mínimo se obtiene en el punto $F\left(\frac{9}{8}, \frac{5}{4}\right) = 24,375$ y el máximo en todos los puntos (x,y) del segmento entre $(7,5)$ y $(9,0)$ y vale $F(x,y) = 135$.

A 2 (Cálculo de parámetros de una función. Interpretación)

$$f(x) = ax^3 + bx - 22$$

a) $f'(x) = 3ax^2 + b$, en consecuencia $0 = f'(2) = 12a + b \Rightarrow b = -12a$

Además $0 = f(1) = a - 12a - 22 \Rightarrow a = -2, b = 24$

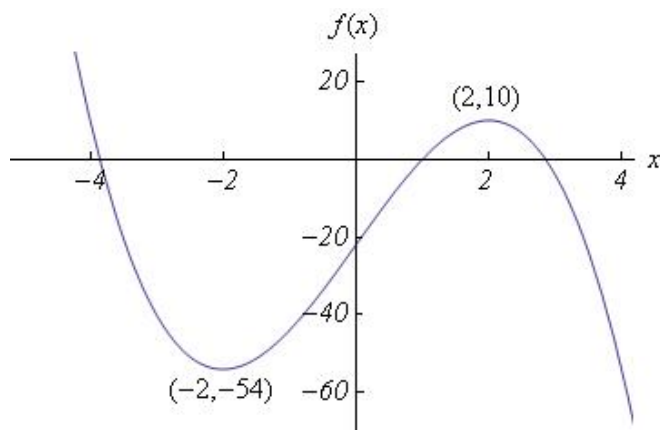
b) $f(x) = -2x^3 + 24x - 22 \Rightarrow f'(x) = -6x^2 + 24 \Rightarrow f''(x) = -12x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ son los extremos de la función.

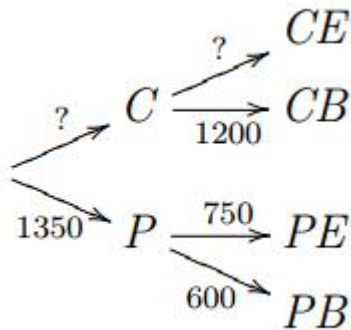
$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ es el punto de inflexión.

$f''(2) = -24 \Rightarrow x = +2$ es el máximo y $f''(-2) = 24 \Rightarrow x = -2$ el mínimo.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ eta $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$



A 3 (Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicional)



Para definir el árbol:

CE Toneladas de café de Ecuador,

CB Toneladas de café de Brasil,

PE Toneladas de plátanos de Ecuador,

PB Toneladas de plátanos de Brasil,

P =plátano, C =café, B =Brasil, E =Ecuador

$$a) 60\% = \frac{60}{100} = \frac{CE+1200}{CE+1200+750+600} \Rightarrow CE = 825$$

b) Siendo $CE = 400$, en total hay $400+750+1200+600 = 2950$ cajas.

Denominando $A1$ y $A2$ la primera y segunda caja respectivamente,

$$\begin{aligned} p(A1 = B) \cdot p(A2 = B|A1 = B) + p(A1 = E) \cdot p(A2 = E|A1 = E) \\ = \frac{1150}{2950} \cdot \frac{1149}{2949} + \frac{1800}{2950} \cdot \frac{1799}{2949} = 0,5241 \end{aligned}$$

$$c) p(E|P) = p(P|E) \frac{p(E)}{p(P)} = \frac{750}{1150} \cdot \frac{1150/2950}{1350/2950} = \frac{750}{1350} = 0,5556$$

A 4 (Cálculo del intervalo de confianza de una población. Se necesita conocer la fórmula correspondiente y saber aplicarla)

$Y=X/N$ es la proporción de la población de N individuos. El tamaño de la muestra es

$n = 300$, ($n \geq 30$) y la proporción de la muestra $\hat{Y} = 0,8$.

$$Y = N \left(\hat{Y}, \sqrt{\hat{Y}(1 - \hat{Y})/N} \right) = N(0,8, 0,0231) \Rightarrow Z = \frac{Y - 0,8}{0,0231} = N(0,1)$$

a) El intervalo de confianza al 95 % de Y :

$$(z_{-0,025}, z_{0,025}) = (-1,96, 1,96) \Rightarrow 0,755 < Y < 0,845$$

b) El intervalo de confianza al 99 % de Y :

$$(z_{-0,005}, z_{0,005}) = (-2,58, 2,58) \Rightarrow 0,74 < Y < 0,86$$

OPCIÓN B

B 1 (Ejercicio de cálculo matricial)

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} 9 - 3a & -9 - 3b \\ 3a + ab & -3a + b^2 \end{pmatrix}, 2A = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 2a & 2b \end{pmatrix}$$

$$A^2 = 2A \Rightarrow a = 1, b = -1$$

b) El producto de las matrices propuestas resulta una matriz como la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a + b & 1 \end{pmatrix}$$

Repitiendo el proceso $B^{n+1} \cdot C^T = B \cdot (B^n \cdot C^T)$ se obtiene este resultado:

$$B \cdot C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B^2 \cdot C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, B^{50} \cdot C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -48 & 1 \end{pmatrix}$$

B 2 (Ejercicio de cálculo de los valores de una función y su máximo. Interpretación)

a) Demanda máxima de agua es en el instante $d'(x) = -20x + 80 = 0 \Rightarrow x = 4$.

b) Para que el flujo sea negativo:

$$p(x) - d(x) < 0 \Leftrightarrow 20x^2 - 180x + 310 < 0 \Leftrightarrow 2,32 < x < 6,68$$

c) Excedente: $\int_0^7 f(x) dx = \left[\frac{20x^3}{3} - 90x^2 + 310x \right]_0^7 = \frac{140}{3} = 46,67$

B 3 (Ejercicio de cálculo de probabilidades que se puede resolver con una tabla de doble entrada)

	A	M	suma
U	2,4	57,6	60
L	2,6	37,4	40
suma	5	95	

$$a) p(U|A) = \frac{p(U \cap A)}{p(A)} = \frac{0,024}{0,05} = 0,48 = 48\%$$

$$b) p(A|L) = \frac{p(A \cap L)}{p(L)} = \frac{0,026}{0,4} = 0,065 = 6,5\%$$

B 4 (Comprensión y utilización de la distribución normal)

La calificación de un estudiante sigue una distribución normal $X = N(70,20)$ y $Z = (X - 70)/20 = N(0,1)$ es la variable estandarizada.

a) Probabilidad de obtener más de 80 puntos:

$$p(X > 80) = p(Z > 0,5) = 1 - p(Z \leq 0,5) = 0,3085$$

b) Probabilidad de obtener menos de 50 puntos:

$$p(X < 50) = p(Z < -1) = 0,1587$$

c) La máxima calificación que se puede esperar con una probabilidad del %95:

$$p(X \leq n) = 0,95 \Rightarrow p\left(\frac{X - 70}{20} \leq \frac{n - 70}{20}\right) = 0,95 \Rightarrow \frac{n - 70}{20} = 1,64 \Rightarrow n = 102,8$$