A 1 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Se considera la ecuación matricial:

$$A \cdot X = A^t \cdot B \qquad \text{donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) $[\![\boldsymbol{0,5\ puntos}]\!]$ ¿Qué dimensión debe tener la matriz X?
b) $[\![\boldsymbol{2\ puntos}]\!]$ Resuelve la ecuación matricial.

A 2 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Sea $f(x)$ la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ ax + 2 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

a) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ Determina el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 1$.
b) $[\![\boldsymbol{0,5\ puntos}]\!]$ Realiza la representación gráfica de la función cuando $a = 2$.
c) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX para $a = 2$.

A 3 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se han extraído dos bolas de la caja como se explica a continuación: se ha extraído una bola, y antes de sacar la segunda se ha devuelto a la caja la primera bola extraída, añadiendo otra bola del mismo color.

a) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado era azul.
b) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul.
c) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ Si la segunda bola ha sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?

A 4 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

La altura en centímetros de las mujeres de un determinado país sigue una distribución normal de media 163 cm y desviación típica 7 cm.

a) $[\![\boldsymbol{1,5\ puntos}]\!]$ Si se toma una mujer al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su altura sea superior a 171 cm? ¿Y de que su altura esté comprendida entre 155 y 171 cm?
b) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ Una empresa que fabrica disfraces quiere elaborar cuatro tallas en función de la altura, de tal modo que cada una de ellas sea adecuada para el 25 % de las mujeres. ¿Cuáles serán las alturas que marcarán el cambio de una talla a otra?

B 1 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Un guía de turismo quiere adquirir tickets de diferentes actividades para sus clientes. En concreto, quiere comprar al menos 16 tickets para acudir a un museo, 20 para realizar una visita guiada y 16 para asistir a un espectáculo.
Dos agencias disponen de ofertas para dichos tickets combinados en paquetes:

- La agencia A ofrece paquetes formados por 6 tickets para el museo, 4 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 210 € cada paquete.
- La agencia B ofrece paquetes formados por 4 tickets para el museo, 6 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 230 € cada paquete.

¿Cuántos paquetes deberá comprar el guía a cada agencia para que su coste sea mínimo? ¿A cuánto asciende dicho coste?

B 2 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Sea la siguiente función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

a) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función.
b) $[\![\boldsymbol{0,5\ puntos}]\!]$ Calcula las asíntotas verticales y horizontales de la función.
c) $[\![\boldsymbol{0,5\ puntos}]\!]$ Representa gráficamente el área comprendida entre la función y la recta $y = \frac{x}{2}$.
d) $[\![\boldsymbol{0,5\ puntos}]\!]$ Obtén la primitiva de la función $f(x)$, sabiendo que en $x = 0$ toma el valor 1.

B 3 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Sean A y B dos sucesos compatibles asociados a un experimento aleatorio.
Se sabe que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ y $P(A \cap B) = 0{,}4$. Calcula:

a) $[\![\boldsymbol{0,65\ puntos}]\!]$ $P(A \cup B)$
b) $[\![\boldsymbol{0,6\ puntos}]\!]$ $P(A^c \cap B^c)$
c) $[\![\boldsymbol{0,6\ puntos}]\!]$ $P(A^c \cap B)$
d) $[\![\boldsymbol{0,65\ puntos}]\!]$ $P(A|B)$

B 4 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una distribución normal de media 250 gramos y desviación típica 50 gramos. Únicamente son aptas para la venta aquellas que superan un determinado peso.

a) $[\![\boldsymbol{1,25\ puntos}]\!]$ ¿Cuál debería ser ese peso si se quiere que el 40 % de las truchas de la piscifactoría sean aptas para la venta?
b) $[\![\boldsymbol{1,25\ puntos}]\!]$ Si dicho peso se establece en 280 gramos y en la piscifactoría hay un total de 6000 truchas, ¿cuántas de ellas se podrán poner a la venta?

SOLUCIONES

A 1 *Dimensión de una matriz. Cálculo matricial. Ecuación matricial.*

a) Dimensión de la matriz X, esto es, $X \in \mathcal{M}_{mxn}$

- $A \in \mathcal{M}_3 \Rightarrow A^t \in \mathcal{M}_3$
- $A^t \in \mathcal{M}_{3x3} \quad \wedge \quad B \in \mathcal{M}_{3x1} \Rightarrow A^t \cdot B \in \mathcal{M}_{3x1}$
- $A \cdot X = A^t \cdot B \in \mathcal{M}_{3x1} \Rightarrow A \cdot X \in \mathcal{M}_{3x1}$

$$\left.\begin{array}{l} \circ \quad A \in \mathcal{M}_{3x3} \quad \wedge \quad X \in \mathcal{M}_{mxn} \Rightarrow \exists\ A \cdot B \quad m = 3 \\ \circ \quad A \in \mathcal{M}_{3x3}\ ,\ X \in \mathcal{M}_{3xn} \wedge A \cdot X \in \mathcal{M}_{3x1} \Rightarrow n = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{X \in \mathcal{M}_{3x1}}$$

b) Resolución de la ecuación matricial: $A \cdot X = A^t \cdot B$.

- $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1$
- $(Adj\ A)^t$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\ A)^t = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $AX = A^t \cdot B \quad \Rightarrow \quad A^{-1}\ AX = A^{-1}A^tB \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}A^tB$
- $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
- Por lo tanto,

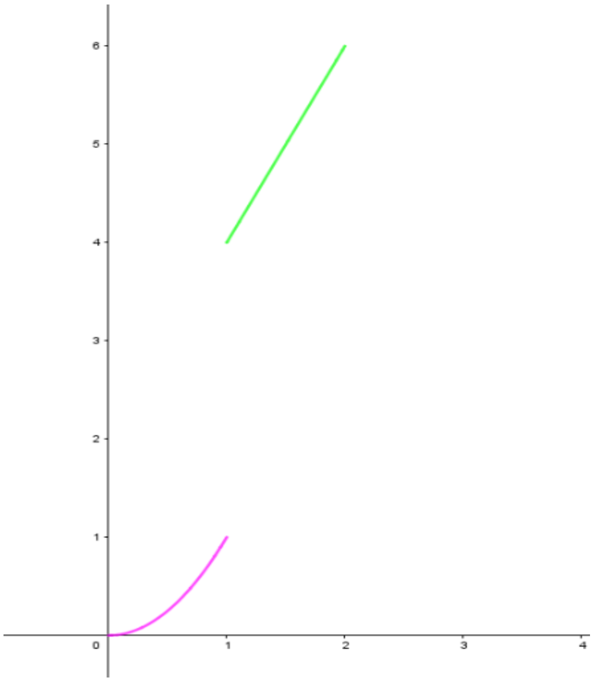
$$\boldsymbol{X} = \left[\begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 8 & -8 \\ 6 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-29} \\ \mathbf{14} \\ \mathbf{-4} \end{pmatrix}$$

A 2 *Continuidad de una función. Representación gráfica. Cálculo de los valores de una función y del área que forma con el eje de abscisas*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ ax + 2 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

a) a tal que $f(x)$ continua en $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (ax + 2) = a + 2$
- $f(1) = 1^2 = 1$
- Por lo tanto, $a + 2 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{a = -1}$



b) Representación gráfica de la función cuando $a = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 2x + 2 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

c) Área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX:

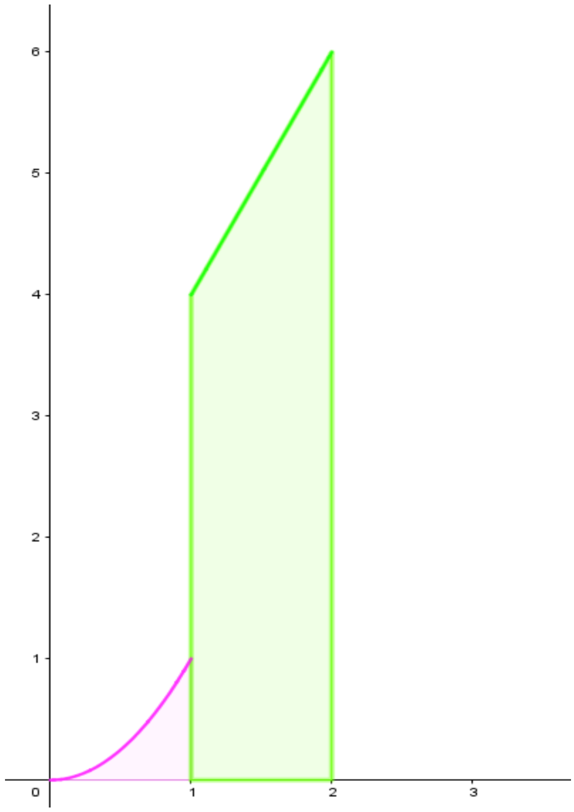
- $\boldsymbol{A = A_1 + A_2}$

- $A_1 = \int_0^1 (x^2 - 0)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \; \boldsymbol{u^2}$

- $A_2 = \int_1^2 (2x + 2 - 0)dx = \left[\frac{2x^2}{2} + 2x\right]_1^2 =$

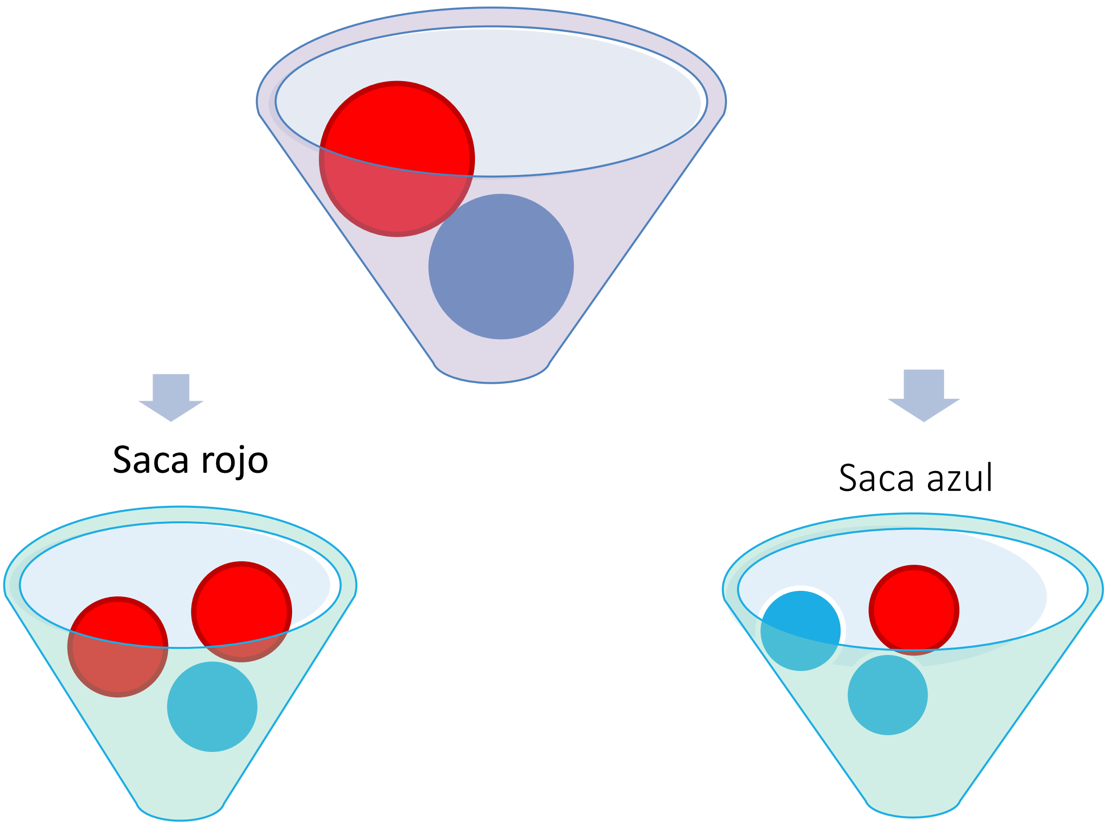
$= [x^2 + 2x]_1^2 = (4 + 4) - (1 + 2) =$

$= \mathbf{5}\, \boldsymbol{u^2}$



- Esto es: $\boldsymbol{A = \left(\frac{1}{3} + 5\right) u^2 = \frac{16}{3} \; u^2}$

A 3 *Cálculo de probabilidades***;** *probabilidad total y probabilidad a posteriori.*



Sucesos;

A_1 = la primera bola azul A_2 = la segunda bola azul

R_1 = la primera bola roja R_2 = la segunda bola roja

a) Probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado ha sido azul: $P(R_2|A_1)$

$$P(R_2|A_1) = \mathbf{1}/\mathbf{3}$$

b) Probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul: $P(A_2)$

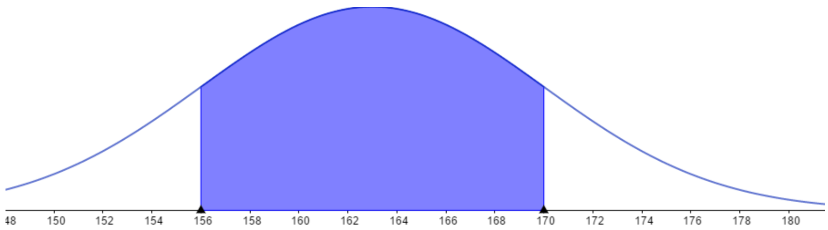
$$P(A_2) = P(R_1)\ P(A_2|R_1) + P(A_1)\ P(A_2|A_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \mathbf{1}/\mathbf{2}$$

c) Si la segunda bola ha sido azul la probabilidad de que la primera fuera roja: $\mathrm{P}(\mathrm{R}_1|\mathrm{A}_2)$

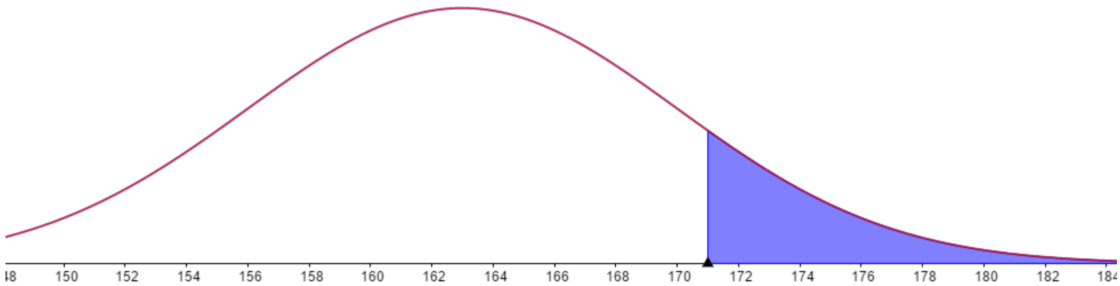
$$\mathrm{P}(\mathrm{R}_1|\mathrm{A}_2) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{A}_2)}{\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)} = \frac{P(R_1)\ P(A_2|R_1)}{\mathrm{P}(\mathrm{A}_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \mathbf{1}/\mathbf{3}$$

A 4 *Comprensión y utilización de una distribución normal.*

a) $X \equiv \text{altura} \sim N(\ \mu\ ,\sigma\ ) = N(\ 163,\ \ 7\ )$



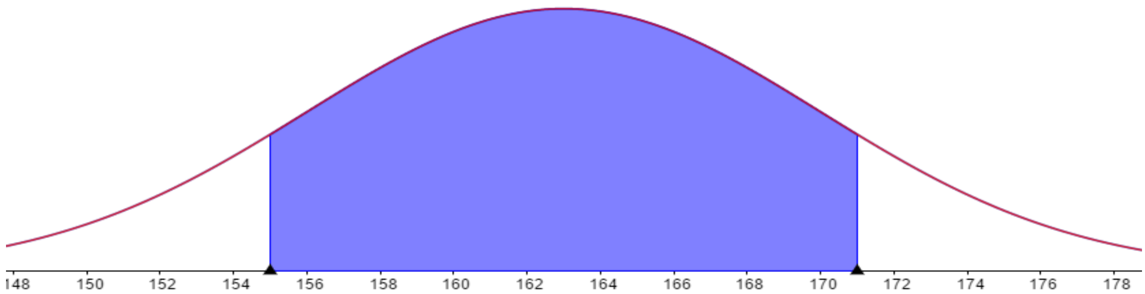
- $P(X > 171)$?



$$P(X > 171) = P\left(\frac{X-163}{7} > \frac{171-163}{7}\right) = P(Z > 1{,}14) = 1 - P(Z \leq 1{,}14) =$$

$$=1 - 0{,}8729 = \mathbf{0{,}1271}$$

- $P\ (155 \leq X \leq 171)$?



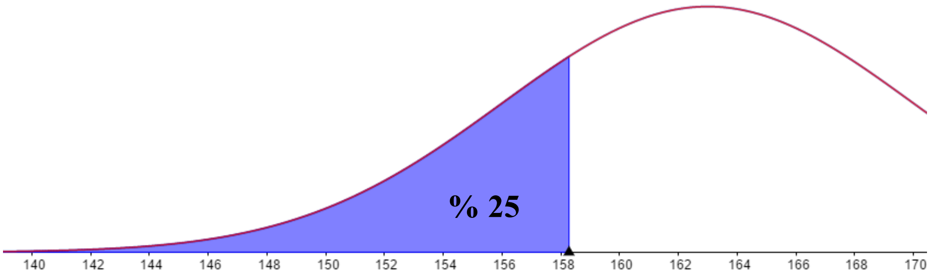
$$P\ (155 \leq X \leq 171) = P\left(\frac{155-163}{7} \leq \frac{X-163}{7} \leq \frac{171-163}{7}\right) = P(-1{,}14 \leq X \leq 1{,}14)$$

$$= 0{,}8729 - (1 - 0{,}8729) = \mathbf{0{,}7458}$$

b) Cálculo de las alturas que marcan el paso de una talla a otra.

Se deben determinar los puntos a, b y c tales que: $P(X \leq a) = 0{,}25$, $P(X \leq b) = 0{,}5$ y $P(X \leq c) = 0{,}75$.

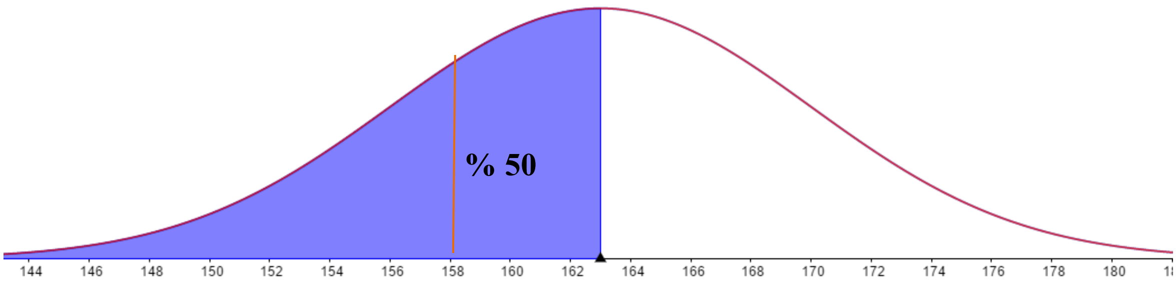
- a ? tal que $P(X \leq a) = 0{,}25$



$$P(X<a)=0{,}25 \;\Rightarrow\; P\left(\frac{X-163}{7}\leq\frac{a-163}{7}\right)=0{,}25 \;\Rightarrow P\left(Z\leq\frac{a-163}{7}\right)=0{,}25$$

$$\Rightarrow\; \frac{a-163}{7}=-0{,}675 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{a=158,275}$$

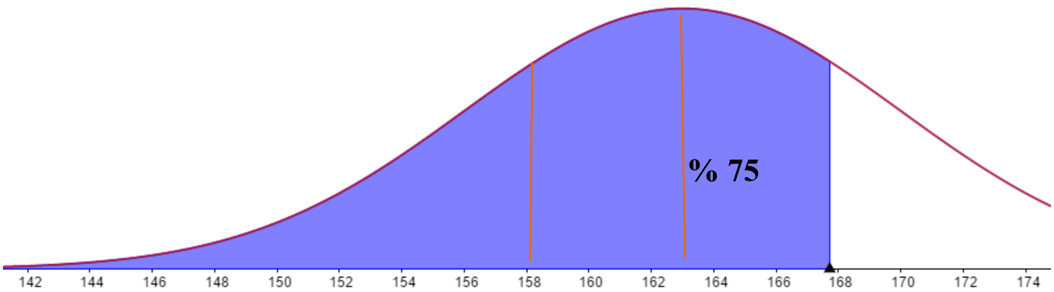
- b ? tal que $P(X\leq b)=0{,}5$



$$P(X<b)=0{,}5 \;\Rightarrow\; P\left(\frac{X-163}{7}\leq\frac{b-163}{7}\right)=0{,}5 \;\Rightarrow P\left(Z\leq\frac{b-163}{7}\right)=0{,}5$$

$$\Rightarrow\; \frac{b-163}{7}=0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{b=163}$$

- c ? tal que $P(X\leq c)=0{,}75$



$$P(X<c)=0{,}75 \;\Rightarrow\; P\left(\frac{X-163}{7}\leq\frac{c-163}{7}\right)=0{,}75 \;\Rightarrow P\left(Z\leq\frac{c-163}{7}\right)=0{,}75$$

$$\Rightarrow\; \frac{c-163}{7}=0{,}675 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{c=167,725}$$

Por lo tanto, las tres alturas que marcarán el paso de una talla a la siguiente son **158,275 cm, 163 cm y 167,725 cm.**

B 1 *Problema de programación lineal con dos variables:*

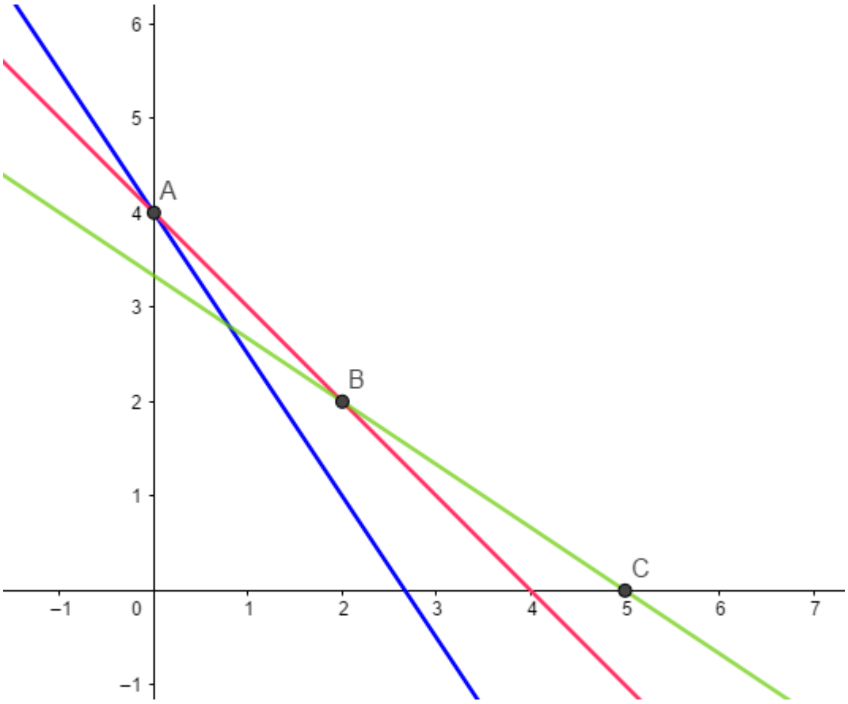
	MUSEO	VISITA GUIADA	ESPECTÁCULO	PRECIO	CANTIDAD
A	6	4	4	210 €	x
B	4	6	4	230 €	y

- La función objetivo es:

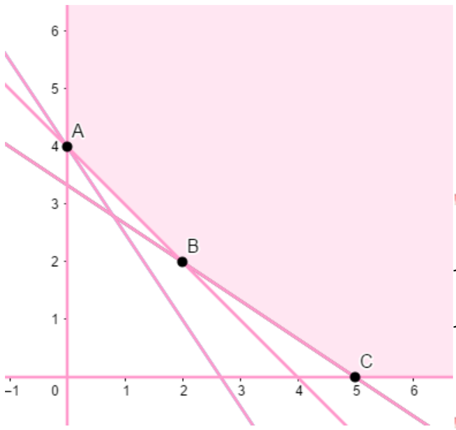
$f(x,y) = 210\,x + 230\,y$

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 4y \geq 16 \\ 4x + 6y \geq 20 \\ 4x + 4y \geq 16 \end{cases}$$



- En el plano XY la región factible es:



- Por lo tanto, los vértices son:

$A(0,4)$, $B(2,2)$, $C(5,0)$

- $f(A) = f(0,4) = 920$

$f(B) = f(2,2) = 880$

$f(C) = f(5,0) = 1050$

- Por lo tanto, el valor mínimo de la función se obtiene en el punto $\boldsymbol{B(2,\ 2)}$, y consecuentemente, el guía tiene que comprar dos paquetes a cada agencia para conseguir el coste mínimo, esto es, **880 euros.**

B 2 *Problema de análisis de una función. Cálculo de la función primitiva de una función.*

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

a) Estudiamos el crecimiento de la función, a través del signo de $f'(x)$:

- $f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$
- $f(x)$ es creciente cuando $f'(x) > 0$

$$\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} > 0 \;\Rightarrow\; -x^2+1 > 0 \;\Rightarrow\; (x+1)(x-1) < 0 \;\Rightarrow$$

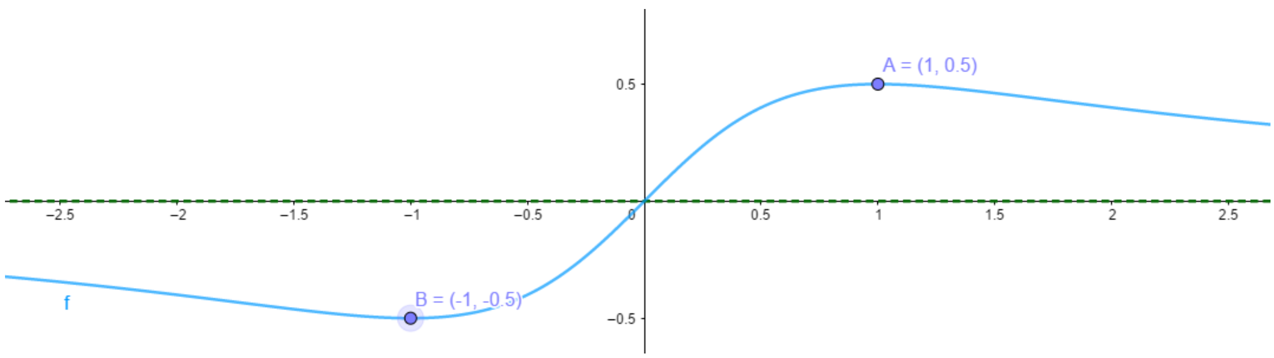
	-1		1
	-2	0	2
$(x+1)$	-	+	+
$(x-1)$	-	-	+
$(x+1)(x-1)$	+	-	+
$\boldsymbol{f(x)}$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$

Por lo tanto, $\boldsymbol{f(x)}$ **es decreciente en** $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ **y creciente en** $(-1, 1)$

- Máximos y mínimos relativos:
  - $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1)$ y creciente en $(-1, 1)$, por lo tanto, en el punto de abscisa $x = -1$ la función tiene un mínimo relativo.

    $f(-1) = -{}^{1}/_{2} \;\Rightarrow$ el punto $\left(-1,\ -{}^{1}/_{2}\right)$ **es un mínimo relativo.**
  - En el intervalo $(-1, 1)$ la función es creciente y en $(1, \infty)$ es decreciente, por lo tanto, en el punto de abscisa $x = 1$ la función tiene un máximo relativo.

    $f(1) = {}^{1}/_{2} \;\Rightarrow$ **el punto** $\left(1,\ {}^{1}/_{2}\right)$ **es un máximo relativo.**

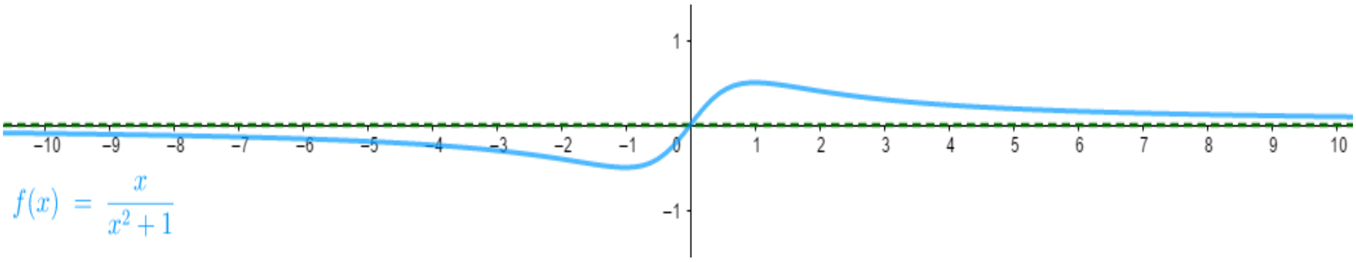


a. Asíntotas verticales:

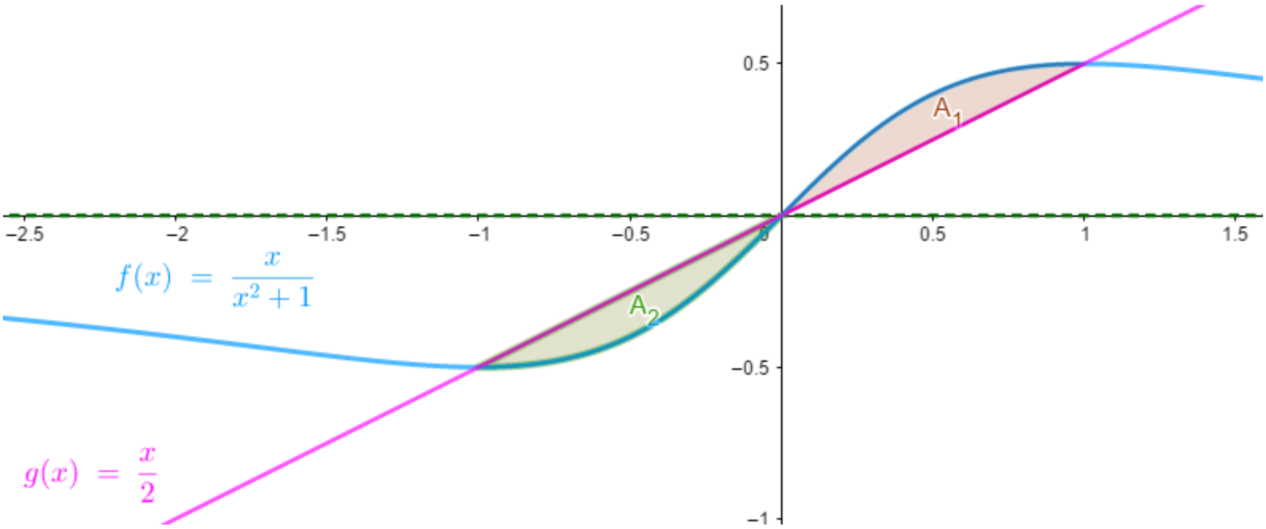
El dominio de definición de $f(x)$ es $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \nexists\, x_0$ tal que $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, por lo tanto, la función no tiene asíntotas verticales.

b. Asíntotas horizontales:

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$, por lo tanto, $\boldsymbol{y = 0}$ **asíntota horizontal.**



c) Representar el área de la superficie comprendida entre la función y la recta $y = \frac{x}{2}$:



d) Calcular la función primitiva de la función $f(x)$ que tiene el valor 1 cuando $x = 0$:

- Calcularemos $F(x) = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$:

$$F(x) = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,Ln(x^2+1) + K$$

- Entonces, como $F(0) = 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\,Ln\,1 + K = 1 \;\Rightarrow K = 1$

Por lo tanto, $\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{2}\,Ln(x^2+1) + 1}$

B 3 *Problema de cálculo de probabilidades.*

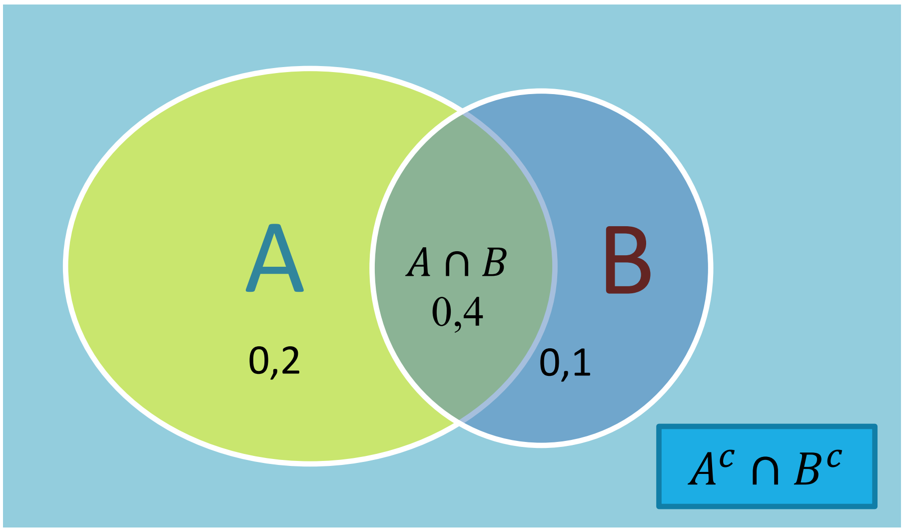
Sabemos $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}5$; $P(A \cap B) = 0{,}4$

a) Calcular: $P(A \cup B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}7 \Rightarrow \boldsymbol{P(A \cup B) = 0,7}$

b) Calcular: $P(A^c \cap B^c)$

$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3 \Rightarrow \boldsymbol{P(A^c \cap B^c) = 0,3}$



c) Calcular: $P(A^c \cap B)$

$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}1 \Rightarrow \boldsymbol{P(A^c \cap B) = 0,1}$

d) Calcular: $P(A|B)$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A|B) = \frac{0{,}4}{0{,}5} = 0{,}8 \Rightarrow \boldsymbol{P(A|B) = 0,8}$

OTRA MANERA: a través de una tabla de contingencia o de doble entrada.

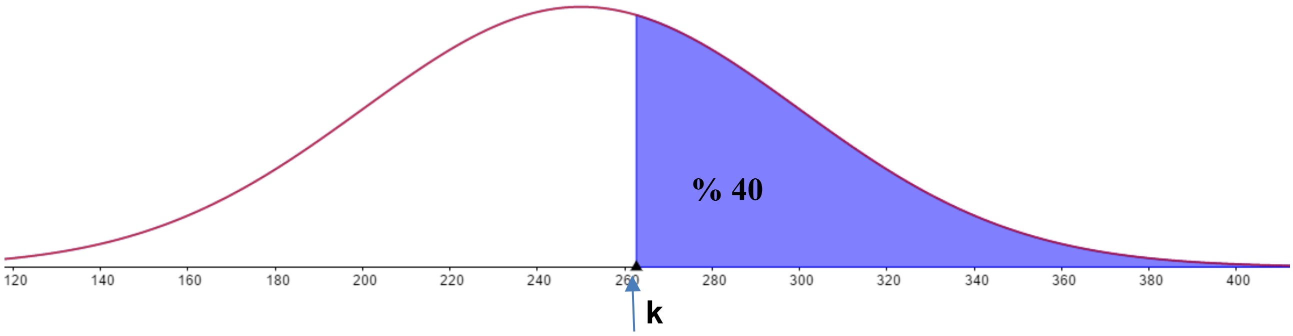
	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{B^c}$	
$\boldsymbol{A}$	0,4	0,2	**0,6**
$\boldsymbol{A^c}$	0,1	0,3	**0,4**
	0,5	**0,5**	**1**

B 4 *Comprensión y uso de la distribución normal, y cálculo de probabilidades.*

$X \equiv \text{peso de las truchas} \sim N(250, 50)$

a) Peso mínimo para que la piscifactoría pueda vender el 40 % de las truchas.

- Tenemos que encontrar k tal que $P(X \geq k) = 0{,}4$



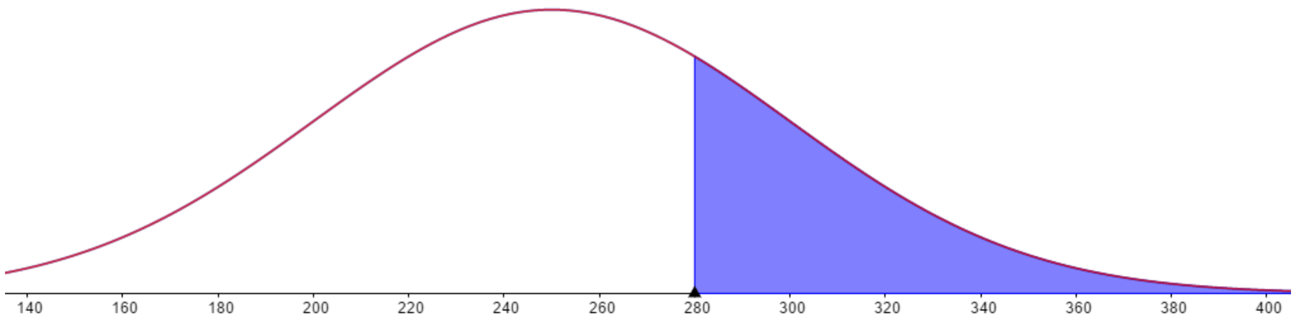
- Tipificación de la variable X : $Z = \frac{X-250}{50} \Rightarrow X = 50Z + 250$

- $P(X \geq k) = P(50Z + 250 \geq k) = P\left(Z \geq \frac{k-250}{50}\right) = 0{,}4$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{k-250}{50}\right) = 0{,}4 \Rightarrow P\left(Z < \frac{k-250}{50}\right) = 0{,}6$$

- Mirando en la tabla de la distribución normal, $\frac{k-250}{50} = 0{,}255 \Rightarrow k = 262{,}75$
- Por lo tanto, **el peso mínimo tiene que ser 262,75 gramos.**
-

b) Calcular $P(X \geq 280)$, $N = 6000$



- $P(X \geq 280) = P(50Z + 250 \geq 280) = P\left(Z \geq \frac{280-250}{50}\right) = P(Z \geq 0{,}6) =$

$$= 1 - P(Z < 0{,}6) = 1 - 0{,}7257 = 0{,}2743 \Rightarrow \mathbf{27{,}43}\ \%$$

- El 27,43 % de 6000 $\Rightarrow 6000 \cdot 0{,}2743 = 1645{,}8$

Por lo tanto, en la piscifactoría se podrán poner a la venta aproximadamente **1646 truchas**.