MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO

CUADERNO DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD   ECIR EDITORIAL

SOLUCIONARIO DE LOS EJERCICIOS

JOSÉ FRANCISCO NAVARRO MARTÍN

ÁLGEBRA LINEAL

1. Dado el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{4x + 4\lambda y + 2z = 2\lambda} \\ \mathbf{\lambda x + y - \lambda z = \lambda} \\ \mathbf{4\lambda x + 4\lambda y + \lambda z = 9} \end{aligned}\right\}$$

se pide:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

$$\begin{matrix} 4x \cdot 4\ y \cdot 2z : 2 \\ x \cdot y - z : \\ 4\ x \cdot 4\ y \cdot z : 9 \end{matrix} \quad \text{La matriz } A|B \text{ del sistema es } \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 2 \\ & 1 & \cdot & \\ 4 & 4 & & 9 \end{array}\right)$$

El determinante de la matriz A de los coeficientes es:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 4\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot \lambda + 4\lambda \cdot (-\lambda) \cdot 4\lambda + 2 \cdot \lambda \cdot 4\lambda - 2 \cdot 1 \cdot 4\lambda - 4\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda - 4 \cdot (-\lambda) \cdot 4\lambda =$$

$$= 4\lambda - 16\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda - 4\lambda^3 + 16\lambda^2 = -20\lambda^3 + 24\lambda^2 - 4\lambda = -4\lambda \cdot (5\lambda^2 - 6\lambda + 1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -4\lambda = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0 \\ 5\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2 \cdot 5} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{10} = \dfrac{6 \pm \sqrt{16}}{10} = \dfrac{6 \pm 4}{10} = \dfrac{3 \pm 2}{5} \begin{cases} \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = \dfrac{1}{5} \end{cases} \end{cases}$$

- Si $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ ó $\lambda = \dfrac{1}{5}$, entonces rg (A) = 2

:

- Si $\lambda = 0$ la matriz $(A|B)$ es $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$ y de ella se extrae el menor $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} =$

$= 4 \cdot 1 \cdot 9 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 9 - 4 \cdot 0 \cdot 0 = 36 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 36 \neq 0 \rightarrow$

$\rightarrow rg(A|B) = 3 \Rightarrow$ El sistema es incompatible porque $rg(A) \neq rg(A|B)$

- Si $\lambda = 1$ la matriz $(A|B)$ es $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right)$ y de ella se extrae el menor $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix} =$

$= 4 \cdot (-1) \cdot 9 + 2 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 9 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -36 + 8 + 2 + 8 - 18 - 4 = -40 \neq 0 \rightarrow$

$\rightarrow rg(A|B) = 3 \Rightarrow$ El sistema es incompatible porque $rg(A) \neq rg(A|B)$

$* \quad \text{Si}\,\lambda = \dfrac{1}{5}$ la matriz $\left(A\middle|B\right)$ es $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4/5 & 2 & 2/5 \\ 1/5 & 1 & -1/5 & 1/5 \\ 4/5 & 4/5 & 1/5 & 9 \end{array}\right)$ y de ella, $\begin{vmatrix} 4 & 4/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1 & 1/5 \\ 4/5 & 4/5 & 9 \end{vmatrix} =$

$$= 4\cdot 1\cdot 9 + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} - \frac{2}{5}\cdot 1\cdot\frac{4}{5} - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot 9 - 4\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5} = 36 + \frac{16}{125} + \frac{8}{125} - \frac{8}{25} - \frac{36}{25} - \frac{16}{25} =$$

$$= 36 + \frac{24}{125} - \frac{60}{25} = \frac{36\cdot 125 + 24 - 60\cdot 5}{125} = \frac{4500 + 24 - 300}{125} = \frac{4224}{125} \neq 0 \rightarrow$$

$\rightarrow \text{rg}\left(A\middle|B\right) = 3 \Rightarrow$ El sistema es incompatible porque $\text{rg}\left(A\right) \neq \text{rg}\left(A\middle|B\right)$

Si $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ ó $\lambda = 1/5$ el <u>sistema es incompatible</u>.

- Si $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ ó $\lambda \neq \dfrac{1}{5}$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A\,|\,B) = 3$ y <u>el sistema es compatible determinado</u>.

b) Resolver el sistema para $\lambda = -1$

Si $\lambda = -1$:

$$\left.\begin{array}{r} 4x - 4y + 2z = -2 \\ -x + y + z = -1 \\ -4x - 4y - z = 9 \end{array}\right\} \text{La matriz } (A\,|\,B) \text{ es } \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[e_3+e_1]{4e_2+e_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & -8 & 1 & 7 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & -8 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} 4x - 4y + 2z = -2 \\ -8y + z = 7 \\ 6z = -6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{y=z=-1} 4x - 4\cdot(-1) + 2\cdot(-1) = -2 \rightarrow * \\ \xrightarrow{z=-1} -8y - 1 = 7 \rightarrow -8y = 7 + 1 = 8 \rightarrow y = \dfrac{8}{-8} = -1 \\ \rightarrow z = -6 : 6 = -1 \end{array}$$

$$* \rightarrow 4x + 4 - 2 = -2 \rightarrow 4x + 2 = -2 \rightarrow 4x = -2 - 2 = -4 \rightarrow x = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\boxed{x = y = z = -1}$$

2. Obtener para todo número real *n* el valor de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^n \Rightarrow \begin{cases}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\4&4\end{pmatrix}\\ \dots\\ \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^{n-1}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}^n \Rightarrow \begin{cases}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-4\\-4&4\end{pmatrix}\\ \dots\\ \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}^{n-1}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1}&-2^{n-1}\\-2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^n+\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2^{n-1}&-2^{n-1}\\-2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1}+2^{n-1}&2^{n-1}-2^{n-1}\\2^{n-1}-2^{n-1}&2^{n-1}+2^{n-1}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2\cdot 2^{n-1}&0\\0&2\cdot 2^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&2^n\end{pmatrix}\end{aligned}}$$

3. Determine si existe una matriz X tal que AX = B.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&3&0\\2&0&1\\5&1&3\end{pmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\\0&3\end{pmatrix}$$

$$A\cdot X=B\rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\rightarrow I\cdot X=A^{-1}\cdot B\rightarrow X=A^{-1}\cdot B$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\2&0&1&0&1&0\\5&1&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3-5F_1]{F_2-2F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\0&-6&1&-2&1&0\\0&-14&3&-5&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{3F_3-7F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\0&-6&1&-2&1&0\\0&0&2&-1&-7&3\end{array}\right)\xrightarrow{2F_2-F_3}$$

$$\xrightarrow{2F_2-F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\0&-12&0&-3&9&-3\\0&0&2&-1&-7&3\end{array}\right)\xrightarrow{4F_1+F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&0&0&1&9&-3\\0&-12&0&-3&9&-3\\0&0&2&-1&-7&3\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{4}F_1\ ,\ -\frac{1}{12}F_2\ ,\ \frac{1}{2}F_3}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}F_1\ ,\ -\frac{1}{12}F_2\ ,\ \frac{1}{2}F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{9}{4}&\frac{-3}{4}\\0&1&0&\frac{-3}{-12}&\frac{9}{12}&\frac{-3}{-12}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{-7}{2}&\frac{3}{2}\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{9}{4}&\frac{-3}{4}\\0&1&0&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{-7}{2}&\frac{3}{2}\end{array}\right)\rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{9}{4}&\frac{-3}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}&\frac{-7}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{9}{4} & \frac{-3}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}_{3\times3}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}_{3\times2}=\begin{pmatrix}\frac{11}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{-9}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}_{3\times2}$$

4. Discutir razonadamente, en función del parámetro k, el siguiente sistema:

$$\begin{cases}\mathbf{x+ky+z=k+2}\\ \mathbf{kx+y+z=k}\\ \mathbf{x+y+kz=-2\cdot(k+1)}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+ky+z=k+2\\ kx+y+z=k\\ x+y+kz=-2\cdot(k+1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}kx+y+z=k\\ x+ky+z=k+2\\ x+y+kz=-2\cdot(k+1)\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}k & 1 & 1 & k\\ 1 & k & 1 & k+2\\ 1 & 1 & k & -2\cdot(k+1)\end{array}\right)\xrightarrow[k\cdot F_3-F_1]{k\cdot F_2-F_1}$$

$$\xrightarrow[k\cdot F_3-F_1]{k\cdot F_2-F_1}\left(\begin{array}{ccc|c}k & 1 & 1 & k\\ 0 & k^2-1 & k-1 & k^2+2k-k\\ 0 & k-1 & k^2-1 & -2\cdot(k+1)\cdot k-k\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}k & 1 & 1 & k\\ 0 & k^2-1 & k-1 & k^2+k\\ 0 & k-1 & k^2-1 & -2k^2-2k-k\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}k & 1 & 1 & k\\ 0 & k^2-1 & k-1 & k^2+k\\ 0 & k-1 & k^2-1 & -2k^2-3k\end{array}\right)\xrightarrow{(k+1)\cdot F_3-F_2}$$

$$\xrightarrow{(k+1)\cdot F_3-F_2}\left(\begin{array}{ccc|c}k & 1 & 1 & k\\ 0 & k^2-1 & k-1 & k^2+k\\ 0 & 0 & (k^2-1)\cdot(k+1)-(k-1) & (-2k^2-3k)\cdot(k+1)-(k^2+k)\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}k & 1 & 1 & k\\ 0 & k^2-1 & k-1 & k^2+k\\ 0 & 0 & k^3+k^2-k-1-k+1 & -2k^3-2k^2-3k^2-3k-k^2-k\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}k & 1 & 1 & k\\ 0 & k^2-1 & k-1 & k^2+k\\ 0 & 0 & k^3+k^2-2k & -2k^3-6k^2-4k\end{array}\right)\to\begin{cases}kx+y+z=k\\ (k^2-1)\cdot y+(k-1)\cdot z=k^2+k\\ (k^3+k^2-2k)\cdot z=-2k^3-6k^2-4k\end{cases}$$

$$\begin{cases}kx+y+z=k\\ (k+1)\cdot(k-1)\cdot y+(k-1)\cdot z=k^2+k\\ k\cdot(k^2+k-2)\cdot z=-2k\cdot(k^2+3k+2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}kx+y+z=k\\ (k+1)\cdot(k-1)\cdot y+(k-1)\cdot z=k^2+k\\ (k^2+k-2)\cdot z=-2\cdot(k^2+3k+2)\end{cases}$$

$$k^2+k-2=0\to k=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}=\begin{cases}k_1=\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1\\ k_2=\frac{-1-3}{2}=\frac{-4}{2}=-2\end{cases}$$

$$k^2+3k+2=0 \rightarrow k=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{-3\pm1}{2}=\begin{cases} k_3=\dfrac{-3+1}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1 \\ k_4=\dfrac{-3-1}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2 \end{cases}$$

I) Si k = 1:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \quad 0=2 \\ \quad 0=-12 \end{cases}$$

Si k = 1 el Sistema es Incompatible

II) Si k = -2:

$$\begin{cases} -2x+y+z=-2 \\ \quad 3y-3z=2 \\ \quad 0=0 \end{cases}$$

Si k = -2 el Sistema es Compatible Indeterminado

III) Si k = -1, al diagonalizar la matriz de coeficientes no podíamos multiplicar por k+1, por ello:

$$\begin{cases} -x+y+z=-1 \xrightarrow[z=0]{y=-\frac{1}{2}} x=\dfrac{1}{2} \\ \quad -2z=0 \rightarrow z=0 \\ -2y \quad =1 \rightarrow y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Si k = -1 el Sistema es Compatible Determinado.

Si $k \neq 1$ y $k \neq -2$ el Sistema es Compatible Determinado.

5. Encuentra el conjunto de soluciones del sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{x+y-3z=0} \\ \mathbf{2x+6y+2z=0} \\ \mathbf{x+13y+21z=2} \end{cases}$$

e interpreta geométricamente el resultado.

$$\begin{cases} x+y-3z=0 \\ 2x+6y+2z=0 \\ x+13y+21z=2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 13 & 21 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{F_2}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 21 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 12 & 24 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{F_2}{2}\text{ y }\frac{F_3}{2}}$$

$$\xrightarrow{\frac{F_2}{2}\text{ y }\frac{F_3}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-6\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y-3z=0 \\ \quad y+2z=0 \\ \quad 0\neq1 \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si el sistema es incompatible, hay cuatro posibilidades, considerando las 3 ecuaciones del sistema como las ecuaciones generales o implícitas de 3 planos:

I) Dos de los planos son coincidentes y además son paralelos al tercer plano.

II) Los tres planos son paralelos.

III) Dos de los planos son paralelos y el tercero los corta en sendas rectas paralelas.

IV) Los tres planos se cortan dos a dos en tres rectas paralelas.

$$\begin{cases} x+y-3z=0 \\ 2x+6y+2z=0 \\ x+13y+21z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 \equiv x+y-3z=0 \\ \pi_2 \equiv x+3y+z=0 \\ \pi_3 \equiv x+13y+21z=2 \end{cases}$$

- Posición relativa de los planos π_1 y π_2:

  $\frac{1}{1} \neq \frac{1}{3} \neq \frac{-3}{1} \neq \frac{0}{0} \rightarrow$ los planos se cortan en una recta

- Posición relativa de los planos π_2 y π_3:

  $\frac{1}{1} \neq \frac{3}{13} \neq \frac{1}{21} \neq \frac{0}{2} \rightarrow$ los planos se cortan en una recta

- Posición relativa de los planos π_1 y π_2:

  $\frac{1}{1} \neq \frac{13}{1} \neq \frac{21}{-3} \neq \frac{2}{0} \rightarrow$ los planos se cortan en una recta

El sistema es incompatible y representa a tres planos que se cortan dos a dos en tres rectas paralelas.

6. Considera la matriz:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Demostrar que $A^3+I=0$, siendo I la matriz identidad y 0 la matriz nula. Calcula razonadamente A^{10}.

$$A^3+I=A^2\cdot A+I=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}^2\cdot\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&4&4\\-1&-3&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=$$

$$A^{10}=A^3\cdot A^3\cdot A^3\cdot A=(-I)\cdot(-I)\cdot(-I)\cdot A=I\cdot(-I)\cdot A=(-I)\cdot A=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&3&4\\1&-4&-5\\-1&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3&-4\\-1&4&5\\1&-3&-4\end{pmatrix}=-A$$

7. Resuelve el sistema $\begin{cases}x+\ \ y+\ \ z=7\\-x+2y+\ \ z=5\\2x-\ \ y+az=2\end{cases}$ sólo en el caso en que el sistema tenga soluciones.

En este caso interpreta geométricamente el significado de cada ecuación y del sistema.

$$\begin{cases}x+\ \ y+\ \ z=7\\-x+2y+\ \ z=5\\2x-\ \ y+az=2\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&7\\-1&2&1&5\\2&-1&a&2\end{array}\right)\xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2+F_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&7\\0&3&2&12\\0&-3&a-2&-12\end{array}\right)\xrightarrow{F_3+F_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&7\\0&3&2&12\\0&0&a&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+\ \ y+\ \ z=7\\ \quad 3y+2z=12\\ \qquad az=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{Si } a=0\longrightarrow\text{Sistema Compatible Indeterminado}\\ \text{Si } a\neq 0\longrightarrow\text{Sistema Compatible Determinado}\end{cases}$$

- $a\neq 0$

$$\begin{cases}x+\ \ y+\ \ z=7\xrightarrow{y=4\ ;\ z=0}x+4+0=7\to x+4=7\to x=7-4=3\\ 3y+2z=12\xrightarrow{z=0}3y+2\cdot 0=12\to 3y+0=12\to 3y=12\to y=\dfrac{12}{3}=4\\ az=0\xrightarrow{a\neq 0}z=0\end{cases}$$

<u>Si a no es nulo, entonces la solución del sistema es (x , y , z) = (3 , 4 , 0) y su interpretación geométrica sería que cada ecuación representa la ecuación de un plano y la intersección de los tres planos sería el punto (3 , 4 , 0).</u>

- $$a = 0$$

$$\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = 7 \xrightarrow{y=4-\frac{2}{3}\cdot\lambda \ ; \ z=\lambda} x + 4 - \frac{2}{3}\cdot\lambda + \lambda = 7 \rightarrow x + 4 + \frac{1}{3}\cdot\lambda = 7 \rightarrow x = 3 - \frac{1}{3}\cdot\lambda \\ \quad 3y + 2z = 12 \xrightarrow{z=\lambda} 3y + 2\lambda = 12 \rightarrow 3y = 12 - 2\lambda \rightarrow y = \frac{12-2\lambda}{3} = 4 - \frac{2}{3}\cdot\lambda \\ \qquad 0z = 0 \rightarrow z = \lambda \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 - \frac{1}{3}\cdot\lambda \\ y = 4 - \frac{2}{3}\cdot\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv (\,3, 4, 0\,) + \lambda\cdot\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right) \equiv (\,3, 4, 0\,) + \lambda\cdot(\,1, 2, -3) \Rightarrow r \equiv x - 3 = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{-3}$$

<u>Si a es nulo, entonces la solución del sistema es (x , y , z) = (3 – λ , 4 - 2 λ , 3 λ) y su interpretación geométrica sería que cada ecuación representa la ecuación de un plano y la intersección de los tres planos sería la recta r : (x , y , z) = (3 – λ , 4 - 2 λ , 3 λ).</u>

8. Sea A una matriz que verifica $A^2 + A = 0$, siendo 0 la matriz nula.

a) Demostrar que la matriz A es regular y obtener una expresión sencilla de su inversa A^{-1} en función de la matriz A y de la matriz identidad I.

$$A^2 + A = 0 \rightarrow A\cdot A + A = 0 \rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot A + A^{-1}\cdot A = 0 \rightarrow I\cdot A + I = 0 \rightarrow A + I = 0 \rightarrow I = -A \rightarrow$$
$$\rightarrow A^{-1}\cdot I = A^{-1}\cdot(-A) \rightarrow A^{-1} = -I$$

b) Halla la inversa de la matriz de los coeficientes del sistema $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}\cdot F_2}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}\cdot F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

c) Resuelve el anterior sistema de ecuaciones con la matriz inversa hallada.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow I = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}_{2x2}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{2x1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{2x1} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

9. Encontrar una matriz X que verifique AX + B = C, siendo:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&4\end{pmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&5&2\\0&1&3\end{pmatrix}$$

$$A\cdot X+B=C\equiv A\cdot X+I=C\rightarrow A\cdot X=C-I\rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(C-I)\rightarrow I\cdot X=A^{-1}\cdot C-A^{-1}\cdot I\rightarrow$$
$$\rightarrow X=A^{-1}\cdot C-A^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\1&2&0&0&1&0\\1&2&4&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&2&0&-1&1&0\\0&2&4&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3-F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&2&0&-1&1&0\\0&0&4&0&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot F_2\ ;\ \frac{1}{4}\cdot F_3}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot F_2\ ;\ \frac{1}{4}\cdot F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{array}\right)\rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot C-A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0&0\\2&5&2\\0&1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}&1\\-\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{4}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\-\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}&0\end{pmatrix}$$

10. Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}\mathbf{x+\ \ y+2z=3}\\ \mathbf{x+2y+3z=5}\\ \mathbf{x+3y+mz=7}\end{cases}$$

Determina:

a) El valor de m para que el sistema tenga soluciones. Para ese valor de m calcula todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} x+\ \ y+2z=3 \\ x+2y+3z=5 \\ x+3y+mz=7 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & m & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & m-2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-2\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & m-4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\ \ y+2z=3 \\ \quad\ \ y-\ \ z=2 \\ (m-4)\cdot z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=4 \rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado} \\ m\neq 4 \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \end{cases}$$

- Si m = 4 :

$$\begin{cases} x+\ \ y+2z=3 \xrightarrow[z=\lambda]{y=2-\lambda} x+(2-\lambda)+2\lambda=3 \rightarrow x=2-\lambda+2\lambda=3 \rightarrow x=1-\lambda \\ \quad y+\ \ z=2 \xrightarrow{z=\lambda} y+\lambda=2 \rightarrow y=2-\lambda \\ \quad\quad 0=0 \end{cases}$$

<u>La solución del sistema sería (x , y , z) = (1 - λ , 2 - λ , λ).</u>

- Si m ≠ 4 :

$$\begin{cases} x+\ \ y+2z=3 \xrightarrow[z=0]{y=2} x+2+0=3 \rightarrow x=3-2=1 \\ \quad y+\ \ z=2 \xrightarrow{z=0} y+0=2 \rightarrow y=2 \\ \quad\quad mz=0 \rightarrow z=\dfrac{0}{m}=0 \end{cases}$$

<u>La solución del sistema sería (x , y , z) = (1 , 2 , 0).</u>

b) Los valores de m para los que el sistema carece de solución.

<u>No hay ningún valor de m para el que el sistema carece de solución.</u>

11. a) Una matriz cuadrada A verifica que $A^2 + 3A = I$, siendo I la matriz unidad. Encuentra razonadamente el valor de la incógnita x en la ecuación $A^{-1} = A + xI$.

$$A^2+3\cdot A=I \rightarrow A\cdot(A+3\cdot I)=I \rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot(A+3\cdot I)=A^{-1}\cdot I \rightarrow I\cdot(A+3\cdot I)=A^{-1}\cdot I \rightarrow$$
$$\rightarrow A^{-1}=A+3\cdot I \xrightarrow{A^{-1}=A+x\cdot I} x=3$$

b) Obtén la inversa de la matriz de los coeficientes del sistema $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$ y resuelve el sistema utilizando esa matriz inversa.

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_2}$$

$$\xrightarrow{F_1-F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \to I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}_{2x2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}_{2x1} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{2x1} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

12. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{x - \ \ y = 3} \\ \mathbf{2x - 3y = 2k} \\ \mathbf{3x - 5y = k} \end{cases}$$

a) Discutirlo según los valores del parámetro k.

$$\begin{cases} x - \ \ y = 3 \\ 2x - 3y = 2k \\ 3x - 5y = k \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 2k \\ 3 & -5 & 0 & k \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2k-6 \\ 0 & -2 & 0 & k-9 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2k-6 \\ 0 & 0 & 0 & -3k+3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \ \ y = 3 \\ \quad -y = 2k-6 \\ \quad\ \ 0 = -3k+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Sistema Compatible Determinado} \leftrightarrow k=1 \\ \text{Sistema Incompatible} \leftrightarrow k \neq 1 \end{cases}$$

b) Resolverlo cuando sea posible.

k = 1 :

$$\begin{cases} x - \ \ y = 3 \\ \ -y = 2\cdot 1 - 6 \\ \ \ 0 = -3\cdot 1 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \ \ y = 3 \\ \ -y = 2 - 6 \\ \ \ 0 = -3 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \ \ y = 3 \xrightarrow{y=4} x - 4 = 3 \to x = 3+4 = 7 \\ \ -y = -4 \to y = 4 \\ \ \ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x = 7 \ ; \ y = 4}$$

13. Estudiar, según los valores del parámetro λ, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \lambda x+y=1 \\ \lambda x+z=1 \\ \lambda x+2y+z=1 \end{cases}$$

Resolverlo en los casos en que sea compatible e indeterminado.

$$\begin{cases} \lambda x+y \quad =1 \\ \lambda x \quad +z=1 \\ \lambda x+2y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x+2y+z=1 \\ \lambda x \quad +z=1 \\ \lambda x+y \quad =1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z+2y+\lambda x=1 \\ z \quad +\lambda x=1 \\ y+\lambda x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z+2y+\lambda x=1 \\ y+\lambda x=1 \\ z \quad +\lambda x=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+2\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2\lambda & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{F_3}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{cases} z+2y+\lambda x=1 \\ y+\lambda x=1 \\ \lambda x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \rightarrow \text{Sistema Incompatible} \\ \lambda \neq 0 \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \end{cases}}$$

En ningún caso el Sistema será Compatible Indeterminado, pero vamos a resolverlo si $\lambda \neq 0$:

$$\begin{cases} z+2y+\lambda x=1 \xrightarrow{x=\frac{1}{\lambda}\ ;\ y=0} z+2\cdot 0+\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}=1 \rightarrow z+0+1=1 \rightarrow z=1-1=0 \\ y+\lambda x=1 \xrightarrow{x=\frac{1}{\lambda}} y+\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}=1 \rightarrow y+1=1 \rightarrow y=1-1=0 \\ \lambda x=1 \rightarrow x=\frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

$$\boxed{x=\frac{1}{\lambda}\,;\,y=0\,;\,z=0}$$

14. Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} \mathbf{2(x^2-1)} & \mathbf{x+1} & \mathbf{(x+1)^2} \\ \mathbf{x-1} & \mathbf{x+1} & \mathbf{x+1} \\ \mathbf{(x-1)^2} & \mathbf{x-1} & \mathbf{x^2-1} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

$$\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} = 2\cdot(x^2-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2-1)+(x+1)^2\cdot(x-1)^2+(x+1)^2\cdot(x-1)^2-$$

$$-(x+1)^3\cdot(x-1)^2-2\cdot(x^2-1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)-(x^2-1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)=2\cdot(x+1)^3\cdot(x-1)^2+$$

$$+2\cdot(x+1)^2\cdot(x-1)^2-(x+1)^3\cdot(x-1)^2-3\cdot(x^2-1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)=(x+1)^3\cdot(x-1)^2+2\cdot(x+1)^2\cdot(x-1)^2-$$

$$-3\cdot(x^2-1)\cdot(x^2-1)=(x+1)^3\cdot(x-1)^2+2\cdot(x+1)^2\cdot(x-1)^2-3\cdot(x+1)^2\cdot(x-1)^2=(x+1)^3\cdot(x-1)^2+$$

$$-(x+1)^2\cdot(x-1)^2=(x+1)^2\cdot(x-1)^2\cdot[\,(x+1)-1\,]=0 \rightarrow \begin{cases} (x+1)^2=0 \rightarrow x_1=-1 \\ (x-1)^2=0 \rightarrow x_2=1 \\ [\,(x+1)-1\,]=0 \rightarrow x_3=0 \end{cases}$$

$$\boxed{x_1=-1 \;\;;\;\; x_2=0 \;\;;\;\; x_3=1}$$

15. Si $A=(\,C_1\,,C_2\,,C_3\,)$ es una matriz cuadrada de orden 3 con columnas C_1 , C_2 y C_3 y se sabe que $\det(\,A)=4$, se pide:

a) Calcular $\det\left(A^3\right)$ y $\det\left(3A\right)$.

$$\boxed{\det\left(A^3\right) = |A^3| = |A|^3 = 4^3 = 64}$$

$$\boxed{\det\left(3A\right) = |3A| = 3^3 \cdot |A| = 27 \cdot 4 = 108}$$

b) Calcular $\det\left(B\right)$ y $\det\left(B^{-1}\right)$, siendo
$B = \left(2C_3\,, C_1 - C_2\,, 5C_1\right)$
la matriz cuyas columnas son $2C_3\,, C_1 - C_2\,, 5C_1$.

$$\boxed{\det\left(B\right) = |B| = 2 \cdot 5 \cdot |A| = 10 \cdot 4 = 40}$$

$$\boxed{\det\left(B^{-1}\right) = |B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{40} = 0'025}$$

16. Estudiar, según los valores del parámetro λ, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + \ \ y + \lambda z = \lambda \\ x + \lambda y - \ \ z = \lambda \\ \qquad y + \lambda z = \lambda \end{cases}$$

No es necesario resolver el sistema para ningún valor de λ.

$$\begin{cases} x - \ \ y + \lambda z = \lambda \\ x + \lambda y - \ \ z = \lambda \\ \qquad y + \lambda z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda+1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow{(\lambda+1)\cdot F_3 - F_2}$$

$$\xrightarrow{(\lambda+1)\cdot F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda+1 & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\cdot(\lambda+1)+\lambda+1 & \lambda\cdot(\lambda+1) \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda+1 & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)\cdot(\lambda+1) & \lambda\cdot(\lambda+1) \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \qquad y + \qquad \lambda z = \lambda \\ (\lambda+1)\cdot y - (\lambda+1)\cdot z = 0 \\ \qquad (\lambda+1)^2 \cdot z = \lambda\cdot(\lambda+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \lambda = -1 \rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado} \\ \text{Si } \lambda \neq -1 \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \end{cases}$$

Podemos estudiar el sistema de ecuaciones lineales, calculando el rango de la matriz ampliada:

$$\begin{cases} x- \quad y+\lambda z=\lambda \\ x+\lambda y- \quad z=\lambda \\ \quad y+\lambda z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda \end{array}\right) \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+0+\lambda-0+1+\lambda=\lambda^2+2\lambda+1=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} = \frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{0}}{2} = \frac{-2\pm0}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \lambda=-1 \rightarrow rg(A|B)=2 \\ \text{Si } \lambda\neq-1 \rightarrow rg(A|B)=3 \end{cases}$$

<u>Si λ= -1 , el Sistema es Compatible Indeterminado, pero si λ ≠ -1, el Sistema es Compatible Determinado.</u>

17. Resolver el sistema formado por las tres ecuaciones:

$\mathbf{x+y-z=3}$; $\mathbf{2x-y=1}$; $\mathbf{-x+2y+z=2}$

y justificar si tiene o no las misma soluciones que el sistema:

$\mathbf{x+y+z=3}$; $\mathbf{2x-y=1}$.

$$\begin{cases} x+ \quad y- \quad z=3 \\ 2x- \quad y \qquad =1 \\ -x+2y+ \quad z=2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2-2\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+ \quad y- \quad z= \ 3 \xrightarrow{y=\frac{5}{3}\ ;\ z=0} x+\frac{5}{3}-0= \ 3 \rightarrow x=3-\frac{5}{3}=\frac{9-5}{3}=\frac{4}{3} \\ -3y+2z=-5 \xrightarrow{y=\frac{5}{3}} -3\cdot\frac{5}{3}+2z=-5 \rightarrow -5+2z=-5 \rightarrow 2z=-5+5=0 \rightarrow z=0 \\ 3y \quad = \ 5 \rightarrow y=\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \xrightarrow{x=\frac{1+\lambda}{2}\ ;\ y=\lambda} \frac{1+\lambda}{2}+\lambda+z=3 \rightarrow \frac{1+\lambda}{2}+\frac{2\lambda}{2}+\frac{2z}{2}=\frac{2\cdot3}{2} \rightarrow 1+3\lambda+2z=6 \rightarrow z=\frac{5-3\lambda}{2} \\ 2x-y \quad =1 \xrightarrow{y=\lambda} 2x-\lambda=1 \rightarrow 2x=1+\lambda \rightarrow x=\frac{1+\lambda}{2} \end{cases}$$

El primer sistema es Compatible Determinado cuyas soluciones son $(x,y,z)=\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},0\right)$ y el segundo sistema es Compatible Indeterminado de soluciones $(x,y,z)=\left(\frac{1+\lambda}{2},\lambda,\frac{5-3\lambda}{2}\right)$.

Para el caso en que $\lambda=\frac{5}{3}$, el segundo sistema tendría de soluciones:

$$\begin{cases} x=\dfrac{1+\frac{5}{3}}{2}=\dfrac{\frac{3}{3}+\frac{5}{3}}{2}=\dfrac{\frac{8}{3}}{2}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \\ z=\dfrac{5-3\cdot\frac{5}{3}}{2}=\dfrac{5-5}{2}=\dfrac{0}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\text{El 2º sistema tiene infinitas soluciones, incluida la del 1º.}}$$

18. Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} \mathbf{x-ay=2} \\ \mathbf{ax-y=a+1} \end{cases}$

Se pide:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro a y resolverlo cuando la solución sea única.

$$\begin{cases} x - ay = 2 \\ ax - y = a+1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 2 \\ a & -1 & a+1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -a \\ a & -1 \end{vmatrix} = -1 + a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1$$

- Si a = -1 :

$$\begin{cases} x - ay = 2 \\ ax - y = a+1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 2 \\ a & -1 & a+1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - a\cdot F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 2 \\ 0 & -1+a^2 & a+1-2a \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 2 \\ 0 & a^2-1 & -a+1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - ay = 2 \\ \left(a^2-1\right)\cdot y = -a+1 \end{cases} \xrightarrow{y=-1} \begin{cases} x + y = 2 \\ 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

- Si a = 1 :

$$\begin{cases} x - ay = 2 \\ \left(a^2-1\right)\cdot y = -a+1 \end{cases} \xrightarrow{y=1} \begin{cases} x - y = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

- Si a ≠ -1 , 1 :

$$\begin{cases} x - ay = 2 \xrightarrow{y=\frac{1}{a-1}} x - a\cdot\dfrac{1}{a-1} = 2 \rightarrow x - a\cdot\left(-\dfrac{1}{a+1}\right) = 2 \rightarrow x + \dfrac{a}{a+1} = 2 \rightarrow x = 2 - \dfrac{a}{a+1} = \dfrac{a+2}{a+1} \\ \left(a^2-1\right)\cdot y = -a+1 \xrightarrow{a\neq -1,1} y = \dfrac{-a+1}{a^2-1} = -\dfrac{a-1}{\left(a+1\right)\cdot\left(a-1\right)} = -\dfrac{1}{a+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Si } a = -1 \rightarrow \text{Sistema Incompatible} \\ \text{Si } a = 1 \rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado} \\ \text{Si } a \neq -1 \text{ y } a \neq 1 \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado con solución } \left(x, y\right) = \left(\dfrac{a+2}{a+1}, \dfrac{-1}{a+1}\right) \end{cases}$$

b) Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene una solución en la que y = 2.

- Si a ≠ -1 , 1 :

$$y = \frac{-1}{a+1} = 2 \rightarrow -1 = 2\cdot\left(a+1\right) = 2a+2 \rightarrow 2a = -1-2 = -3 \rightarrow a = -\frac{3}{2} = -1'5$$

- Si a = 1 :

$$\begin{cases} x - ay = 2 \\ \left(a^2-1\right)\cdot y = -a+1 \end{cases} \xrightarrow{y=1} \begin{cases} x - y = 2 \xrightarrow{y=2} x - 2 = 2 \rightarrow x = 2+2 = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

<u>El sistema tiene una solución en la que y = 2 si a = - 1’5 ó a = 1.</u>

19. Indica el valor de a para que el sistema:

$$\mathbf{x + y + z = 0 \quad ; \quad 2x + y + 3z = 0 \quad ; \quad x + az = 0}$$

tenga soluciones distintas de (0 , 0 , 0), y en este caso halla todas las soluciones del sistema, interpretando el resultado obtenido como intersección de planos.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+3z=0 \\ x \quad +az=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a+3+0-1-0-2a=-a+2=0 \rightarrow a=2 \Rightarrow \text{Si } a=2 \rightarrow \text{rg}\,A=2 \rightarrow \text{S.C.I.}$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+3z=0 \\ x \quad +2z=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \xrightarrow[z=\lambda]{y=\lambda} x+2\lambda=0 \rightarrow x=-2\lambda \\ -y+z=0 \xrightarrow{z=\lambda} y=\lambda \end{cases}$$

<u>El sistema tiene soluciones distintas de (0, 0, 0) si a = 2. En este caso las soluciones son (-2λ, λ, λ).</u>

La solución obtenida se interpreta como que los tres planos tienen en común la recta r :

$$r \equiv \begin{cases} x=-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv (0,0,0)+\lambda\cdot(-2,1,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{r} \equiv (-2,1,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ P(-2,1,1) \end{cases}$$

20. Calcula el producto de matrices

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 & 4 \\ \frac{9}{2} & 8 & -\frac{11}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

y utiliza el producto anterior para obtener la solución del sistema:

$$\begin{cases} 5x+4y+2z=2 \\ 2x+2y+3z=3 \\ 7x+6y+6z=5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 & 4 \\ \frac{9}{2} & 8 & -\frac{11}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \Rightarrow A^{-1}\cdot A = I$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3x1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}_{3x1} \Rightarrow A\cdot X=B \rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B \rightarrow I\cdot X=A^{-1}\cdot B \rightarrow X=A^{-1}\cdot B \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3x1} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 4 \\ \frac{9}{2} & 8 & -\frac{11}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}_{3x1} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{11}{2} \\ 0 \end{pmatrix}_{3x1} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=\dfrac{11}{2} \\ z=0 \end{cases}$$

21. Determina el valor de m para el cual el sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x+2y+\ \ z=3} \\ \mathbf{x+3y+2z=5} \\ \mathbf{x+my+3z=7} \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones, y obtén esas soluciones.

Calcula razonadamente que no hay valores de m para los que el sistema no tenga solución.

$$\begin{cases} x+2y+\ \ z=3 \\ x+3y+2z=5 \\ x+my+3z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\ \ z+2y=3 \\ x+2z+3y=5 \\ x+3z+my=7 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & m & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & m-2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-2\cdot F_2}$$

$$\xrightarrow{F_3-2\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & m-4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+\ \ z+2y=3 \\ \qquad z+\ \ y=2 \\ (m-4)\cdot y=0 \end{cases} \rightarrow \text{el sistema es compatible indeterminado si } m=4$$

$$\boxed{\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \xrightarrow[z=\lambda]{y=2-\lambda} x+2\cdot(2-\lambda)+\lambda=3 \rightarrow x+4-2\lambda+\lambda=3 \rightarrow x=-1+\lambda \\ \qquad y+z=2 \xrightarrow{z=\lambda} y=2-\lambda \end{cases}$$

$\text{Si } m\neq 4:$

$$\begin{cases} x+\ \ z+2y=3 \xrightarrow[z=2]{y=0} x+2+2\cdot 0=3 \rightarrow x=1 \\ \qquad z+\ \ y=2 \xrightarrow{y=0} z=2 \\ \qquad\quad y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \text{El sistema es compatible determinado}$$

<u>No hay valores de m para los que el sistema no tenga solución ya que es compatible siempre.</u>

22. En el supuesto de que exista, calcular una matriz X tal que AX = B, en los casos siguientes:

a) $\mathbf{A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$ **y** $\mathbf{B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$

$$A\cdot X=B \rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B \rightarrow I\cdot X=A^{-1}\cdot B \rightarrow X=A^{-1}\cdot B$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2\cdot F_3-5\cdot F_1]{2\cdot F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -5 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{3\cdot F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -14 & -2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[4\cdot F_3+\cdot F_3]{4\cdot F_1-F_3}$$

$$\xrightarrow[4\cdot F_3+\cdot F_3]{4\cdot F_1-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 18 & 2 & -6 \\ 0 & 24 & 0 & -18 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -14 & -2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{F_1}{8}\ ;\ \frac{F_2}{24}\ ;\ \frac{F_3}{4}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{3x2}}$$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$A\cdot X = B \rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \rightarrow I\cdot X = A^{-1}\cdot B \rightarrow X = A^{-1}\cdot B$

Pero $\nexists A^{-1}$ porque A no es cuadrada, así que es imposible hallar X, ya que tampoco existe.

23. Dada la siguiente matriz de orden n:

$$\mathbf{A_n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Calcular el determinante de la matriz A_2.

$$\boxed{\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 9+1 = 10}$$

b) Calcular el determinante de la matriz A_3.

$$\boxed{\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 81-1+1+9+1+9 = 100}$$

c) Calcular el determinante de la matriz A_5.

$$\det(A_5)=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\-1&9&1&1&1\\-1&-1&9&1&1\\-1&-1&-1&9&1\\-1&-1&-1&-1&9\end{vmatrix}\overset{F_5+F_1}{=}\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\-1&9&1&1&1\\-1&-1&9&1&1\\-1&-1&-1&9&1\\0&0&0&0&10\end{vmatrix}=10\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&9&1&1\\-1&-1&9&1\\-1&-1&-1&9\end{vmatrix}\overset{F_4+F_1}{=}$$

$$\overset{F_4+F_1}{=}10\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-1&9&1&1\\-1&-1&9&1\\0&0&0&10\end{vmatrix}=10\cdot10\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&9&1\\-1&-1&9\end{vmatrix}=100\cdot100=10000$$

24. Resolver:

$$\begin{cases}\mathbf{2x+\ \ 3y+2z=z}\\\mathbf{2x-\ \ \ \ y+4z=x}\\\mathbf{4x+12y-5z=y}\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x+\ \ 3y+2z=z\\2x-\ \ \ \ y+4z=x\\4x+12y-5z=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+\ \ 3y+\ \ z=0\\\ \ x-\ \ \ \ y+4z=0\\4x+11y-5z=0\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1&0\\1&-1&4&0\\4&11&-5&0\end{array}\right)\xrightarrow[F_3-2\cdot F_1]{2\cdot F_2-F_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1&0\\0&-5&7&0\\0&5&-7&0\end{array}\right)\xrightarrow{F_3+F_2}$$

$$\xrightarrow{F_3+F_2}\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1&0\\0&-5&7&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}2x+3y+z=0\xrightarrow{y=\frac{7\lambda}{5}\ ;\ z=\lambda}2x+3\cdot\dfrac{7\lambda}{5}+\lambda=0\rightarrow 2x+\dfrac{26\lambda}{5}=0\rightarrow x=-\dfrac{13\lambda}{5}\\-5y+7z=0\xrightarrow{z=\lambda}y=\dfrac{7\lambda}{5}\end{cases}$$

El Sistema es Compatible Indeterminado con solución: $x=-\dfrac{13\lambda}{5}$; $y=\dfrac{7\lambda}{5}$; $z=\lambda$

25. Resolver la ecuación matricial AXB = C, siendo

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}\quad;\quad\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{1}&\mathbf{3}\end{pmatrix}\quad\mathbf{y}\quad\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$A\cdot X\cdot B=C\xrightarrow{A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_{2x2}}X\cdot B=C\rightarrow X\cdot B\cdot B^{-1}=C\cdot B^{-1}\rightarrow X\cdot I=C\cdot B^{-1}\rightarrow X=C\cdot B^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\1&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1-2\cdot F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&-2\\0&1&-1&1\end{array}\right)\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$X=C\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}_{2x2}\cdot\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}_{2x2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}_{2x2}$$

26. Resolver la ecuación matricial PX+3I = Q , donde I es la matriz identidad de orden 2 y P y Q son las matrices:

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{2}&\mathbf{2}\end{pmatrix}\qquad\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2}&\mathbf{3}\\\mathbf{1}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$$

$$P\cdot X+3\cdot I=Q \to P\cdot X=Q-3\cdot I \to P^{-1}\cdot P\cdot X=P^{-1}\cdot(\,Q-3\cdot I\,)\to I\cdot X=P^{-1}\cdot(\,Q-3\cdot I\,)\to X=P^{-1}\cdot(\,Q-3\cdot I\,)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{F_2+2\cdot F_1}\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[\frac{1}{2}\cdot F_2]{-F_1}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)\Rightarrow P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=P^{-1}\cdot(\,Q-3\cdot I\,)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}}$$

27. Discutir la existencia de soluciones del siguiente sistema según los valores del parámetro α. Resolver, si es posible, para α = 10.

$$\begin{cases} \mathbf{2x+\ y-\ z=1} \\ \mathbf{x-2y+\ z=3} \\ \mathbf{5x-5y+2z=\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+\ y-\ z=1 \\ x-2y+\ z=3 \\ 5x-5y+2z=\alpha \end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & \alpha \end{array}\right)\xrightarrow[2\cdot F_3-5\cdot F_1]{2\cdot F_2-F_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & -15 & 9 & 2\alpha-5 \end{array}\right)\xrightarrow{F_3-3\cdot F_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha-20 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 2x+\ y-\ z=1 \\ -5y+3z=5 \\ 0=\alpha-10 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \text{Si }\alpha\neq 10\to\text{Sistema Incompatible} \\ \text{Si }\alpha=10\to\text{Sistema Compatible Indeterminado} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+\ y-\ z=1\xrightarrow{y=\frac{3\lambda}{5}-1\ ;\ z=\lambda}2x+\dfrac{3\lambda}{5}-1-\lambda=1\to 2x-\dfrac{2\lambda}{5}-1=1\to 2x=\dfrac{2\lambda}{5}+2\to x=\dfrac{\lambda}{5}+1 \\ -5y+3z=5\xrightarrow{z=\lambda}-5y+3\lambda=5\to -5y=5-3\lambda\to y=\dfrac{-3\lambda+5}{-5}=\dfrac{3\lambda}{5}-1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x=\dfrac{\lambda}{5}+1 \\ y=\dfrac{3\lambda}{5}-1 \\ z=\lambda \end{cases}\xrightarrow{\lambda=5\mu}\begin{cases} x=\mu+1 \\ y=3\mu-1 \\ z=5\mu \end{cases}}$$

28. Dada la matriz $\mathbf{A=\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}}$ **se pide:**

a) Determinar el rango de A según los valores del parámetro a.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}\xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-a\cdot F_1}\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 0 & a\cdot(-a-1) & 1-a \\ 0 & -a-1 & a \end{pmatrix}\xrightarrow{a\cdot F_3-F_2}\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 0 & a\cdot(-a-1) & -a+1 \\ 0 & 0 & a^2+a-1 \end{pmatrix}$$

$$a^2+a-1=0 \rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\begin{cases} a_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ a_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases}\text{Si } a=-1,\ a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ a=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\rightarrow rg(A)=2\\ \text{Si } a\neq-1,\ a\neq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ a\neq\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\rightarrow rg(A)=3\end{cases}}$$

b) Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para a = 1.

La matriz A es invertible cuando su determinante es no nulo, es decir cuando rg (A) = 3.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot[\,adj(A)\,]^t=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}^t=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}\cdot\alpha_{11}&(-1)^{2+1}\cdot\alpha_{21}&(-1)^{3+1}\cdot\alpha_{31}\\(-1)^{1+2}\cdot\alpha_{12}&(-1)^{2+2}\cdot\alpha_{22}&(-1)^{3+2}\cdot\alpha_{32}\\(-1)^{1+3}\cdot\alpha_{13}&(-1)^{2+3}\cdot\alpha_{23}&(-1)^{3+3}\cdot\alpha_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_{11}&-\alpha_{21}&\alpha_{31}\\-\alpha_{12}&\alpha_{22}&-\alpha_{32}\\\alpha_{13}&-\alpha_{23}&\alpha_{33}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix}2&2&1\\2&0&1\\2&0&2\end{vmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}0&-2&0\\-4&2&4\\2&0&-4\end{pmatrix}^t=\frac{1}{4-8}\cdot\begin{pmatrix}0&-4&2\\-2&2&0\\0&4&-4\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}0&-4&2\\-2&2&0\\0&4&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{-4}{-4}&\frac{2}{-4}\\\frac{-2}{-4}&\frac{2}{-4}&0\\0&\frac{4}{-4}&\frac{-4}{-4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

29. Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases}\mathbf{x-2y+z-3v=-4}\\\mathbf{x+2y+z+3v=4}\\\mathbf{2x-4y+2z-6v=-8}\\\mathbf{2x+2z=0}\end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y+z-3v=-4 \\ x+2y+z+3v=4 \\ 2x-4y+2z-6v=-8 \\ 2x+2z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & -6 & -8 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4-2F_1]{F_2-F_1,\ F_3-2F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4-F_2}$$

$$\xrightarrow{F_4-F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{F_2}{2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-2y+z-3v=-4 \xrightarrow[z=\mu]{v=\lambda,\ y=2-\frac{3\lambda}{2}} * \\ 2y+3v=4 \xrightarrow{v=\lambda} y=2-\dfrac{3\lambda}{2} \end{array}\right.$$

$$* \xrightarrow[z=\mu]{v=\lambda,\ y=2-\frac{3\lambda}{2}} x-2\cdot\left(2-\frac{3\lambda}{2}\right)+\mu-3\lambda=-4 \rightarrow x-4+3\lambda+\mu-3\lambda=-4 \rightarrow x=-\mu$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Sistema Compatible Indeterminado:} \\ x=-\mu\ ;\ y=2-\dfrac{3\lambda}{2}\ ;\ z=\mu\ ;\ v=\lambda \end{array}}$$

30. El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

$$\begin{array}{l} x=\text{nº de billetes de 10 €} \\ y=\text{nº de billetes de 20 €} \\ z=\text{nº de billetes de 50 €} \end{array} \left\{\begin{array}{l} x+y+z=225 \\ 10x+20y+50z=7000 \\ x+z=2y \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x+y+z=225 \\ 10x+20y+50z=7000 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 10 & 20 & 50 & 7000 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-10\cdot F_1}$$

$$\xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-10\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & 10 & 40 & 4750 \\ 0 & -3 & 0 & -225 \end{array}\right) \xrightarrow{10\cdot F_3+3\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & 10 & 40 & 4750 \\ 0 & 0 & 120 & 12000 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{F_2}{10}\ ;\ \frac{F_3}{120}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & 1 & 4 & 475 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=225 \xrightarrow[y=75]{z=100} x+75+100=225 \rightarrow x+175=225 \rightarrow x=225-175=50 \\ y+4z=475 \xrightarrow{z=100} y+4\cdot 100=475 \rightarrow y+400=475 \rightarrow y=475-400=75 \\ z=100 \end{array}\right.$$

<u>Los viernes depositan 50 billetes de 10 € , 75 billetes de 20 € y 100 billetes de 50 €.</u>

31. Resolver, por el método de Gauss, el siguiente sistema e interprétese geométricamente el resultado:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x-3y-z=-1} \\ \mathbf{x+5y+3z=3} \\ \mathbf{x+y+z=1} \\ \mathbf{3x+7y+5z=5} \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4-3\cdot F_1]{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 16 & 8 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{F_2}{4};\frac{F_3}{2};\frac{F_4}{8}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4-F_3]{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 3y - z = -1 \xrightarrow{y=\frac{1-\lambda}{2}\ ;\ z=\lambda} x - 3\cdot\dfrac{1-\lambda}{2} - \lambda = -1 \rightarrow x + \dfrac{-3+\lambda}{2} = -1 \rightarrow x = \dfrac{1-\lambda}{2} \\ 2y + z = \ 1 \xrightarrow{z=\lambda} 2y + \lambda = 1 \rightarrow 2y = 1-\lambda \rightarrow y = \dfrac{1-\lambda}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{x = \frac{1-\lambda}{2} \quad ; \quad y = \frac{1-\lambda}{2} \quad ; \quad z = \lambda}$$

El sistema es compatible indeterminado. Su interpretación geométrica es que los cuatro planos representados por las cuatro ecuaciones, se cortan en una recta.

32. Discutir y resolver el siguiente sistema, según los distintos valores del parámetro λ .

$$\begin{cases} \lambda x + \ \ y + \ \ z = 1 \\ x + \lambda y + \ \ z = \lambda \\ x + \ \ y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda x+\ y+z=1 \\ \ x+\lambda y+z=\lambda \\ \ x+\ y+\lambda z=\lambda^2 \end{cases} \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right) \xrightarrow[\lambda F_3-F_1]{\lambda F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda^2-1 & \lambda-1 & \lambda^2-1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda^2-1 & \lambda^3-1 \end{array}\right) \xrightarrow{(\lambda+1)\cdot F_3-F_2}$$

$$\xrightarrow{(\lambda+1)\cdot F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (\lambda+1)\cdot(\lambda-1) & \lambda-1 & (\lambda+1)\cdot(\lambda-1 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda+1)-(\lambda-1) & \left(\lambda^3-1\right)\cdot(\lambda+1)-(\lambda+1 \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (\lambda+1)\cdot(\lambda-1) & \lambda-1 & (\lambda+1)\cdot(\lambda-1) \\ 0 & 0 & \left[(\lambda+1)^2-1\right]\cdot(\lambda-1) & (\lambda+1)\cdot\left[\left(\lambda^3-1\right)-(\lambda-1)\right] \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (\lambda+1)\cdot(\lambda-1) & \lambda-1 & (\lambda+1)\cdot(\lambda-1) \\ 0 & 0 & \left(\lambda^2+2\lambda\right)\cdot(\lambda-1) & (\lambda+1)\cdot\left(\lambda^3-\lambda\right) \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (\lambda+1)\cdot(\lambda-1) & \lambda-1 & (\lambda+1)\cdot(\lambda-1) \\ 0 & 0 & \lambda\cdot(\lambda+2)\cdot(\lambda-1) & \lambda\cdot(\lambda+1)^2\cdot(\lambda-1) \end{array}\right) \xrightarrow{\text{si } \lambda\neq 1 \Longrightarrow \frac{F_2}{\lambda-1}\ ;\ \frac{F_3}{\lambda-1}}$$

$$\xrightarrow{\text{si } \lambda\neq 1 \Longrightarrow \frac{F_2}{\lambda-1}\ ;\ \frac{F_3}{\lambda-1}} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & \lambda\cdot(\lambda+2) & \lambda\cdot(\lambda+1)^2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{si } \lambda\neq 0 \Longrightarrow \frac{F_3}{\lambda}} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & (\lambda+1)^2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda x+\ \ y+z=1 \xrightarrow{y=\frac{1}{\lambda+2}\ ;\ z=\frac{\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda+2}} \lambda x+\frac{1}{\lambda+2}+\frac{\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda+2}=1 \longrightarrow \lambda x+\frac{\lambda^2+2\lambda+2}{\lambda+2}=1 \\ (\lambda+1)\cdot y+z=\lambda+1 \xrightarrow{z=\frac{\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda+2}} (\lambda+1)\cdot y+\frac{\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda+2}=\lambda+1 \longrightarrow (\lambda+1)\cdot y+\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \\ \quad (\lambda+2)\cdot z=\lambda^2+2\lambda+1 \xrightarrow{\text{si } \lambda\neq -2} z=\frac{\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda+2} \end{cases}$$

$$* \xrightarrow{\text{si } \lambda\neq -1} y+\frac{\lambda+1}{\lambda+2}=1 \longrightarrow y=1-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}=\frac{\lambda+2}{\lambda+2}-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}=\frac{\lambda+2-\lambda-1}{\lambda+2}=\frac{1}{\lambda+2}$$

$$** \longrightarrow \lambda x=1-\frac{\lambda^2+2\lambda+2}{\lambda+2}=\frac{\lambda+2}{\lambda+2}-\frac{\lambda^2+2\lambda+2}{\lambda+2}=\frac{\lambda+2-\lambda^2-2\lambda-2}{\lambda+2}=\frac{-\lambda^2-\lambda}{\lambda+2}=-\frac{\lambda\cdot(\lambda+1)}{\lambda+2}$$

$$\xrightarrow{\lambda\neq 0} x=-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}$$

$$\text{Si}\quad \lambda=0 \Rightarrow \begin{cases} y+z=1 \\ x \quad +z=0 \\ x+y \quad =0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2}$$

$$\xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y \quad = 0 \xrightarrow{y=\frac{1}{2}} x=-\dfrac{1}{2} \\ -y+z=0 \xrightarrow{z=\frac{1}{2}} y=\dfrac{1}{2} \\ 2z=1 \to z=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$$\text{Si}\quad \lambda=-1 \Rightarrow \begin{cases} -x+y+z=1 \\ x-y+z=-1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{F_2}{2}\,;\,\frac{F_3}{2}}$$

$$\xrightarrow{\frac{F_2}{2}\,;\,\frac{F_3}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \xrightarrow[z=0]{y=1} x+1+0=1 \to x=0 \\ y \quad =1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$$\text{Si}\quad \lambda=-2 \Rightarrow \begin{cases} -2x+y+z=1 \\ -y+z=-1 \\ 0=1 \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

$$\text{Si}\quad \lambda=1 \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado} \begin{cases} x=1-\nu-\mu \\ y=\nu \\ z=\mu \end{cases}$$

$$\text{Si}\quad \lambda \in \mathbb{R}-\{-2,1\} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \left\{ x=-\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2}\;;\; y=\dfrac{1}{\lambda+2}\;;\; z=\dfrac{\lambda^2+2\lambda+}{\lambda+2} \right.$$

33. Hallar λ y μ para que sea compatible el sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{2x-\lambda y+\mu z=4} \\ \mathbf{x \qquad + z=2} \\ \mathbf{x+\ y+\ z=2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-\lambda y+\mu z=4 \\ x \qquad + z=2 \\ x+\ y+\ z=2 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & -\lambda & \mu \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda+\mu-2+\lambda=\mu-2 \to \begin{cases} \mu-2=0 \to \mu=2 \to \text{S.C.I. } \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \mu-2 \neq 0 \to \mu \neq 2 \to \text{S.C.D. } \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-\lambda y+\mu z=4 \\ x \qquad + z=2 \\ x+\ y+\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\lambda & \mu & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[2\cdot F_3-F_1]{2\cdot F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\lambda & \mu & 4 \\ 0 & \lambda & 2-\mu & 0 \\ 0 & 2+\lambda & 2-\mu & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\lambda & \mu & 4 \\ 0 & \lambda & 2-\mu & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{F_3}{2}}$$

$$\xrightarrow{\frac{F_3}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\lambda & \mu & 4 \\ 0 & \lambda & 2-\mu & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x-\lambda y+\quad \mu z=4 \xrightarrow[z=0]{y=0} 2x=4 \rightarrow x=\dfrac{4}{2}=2 \\ \lambda y+(2-\mu)\cdot z=0 \xrightarrow{y=0} (2-\mu)\cdot z=0 \xrightarrow{si\,\mu\neq 2} z=\dfrac{0}{2-\mu}=0 \\ y \qquad\qquad =0 \end{cases}$$

$$\text{Si}\quad \mu=2 \Rightarrow \begin{cases} 2x-\lambda y+2z=4 \xrightarrow{y=0\ \forall\lambda\in IR} 2x+2z=4 \rightarrow x+z=2 \xrightarrow{x=\upsilon} z=2-\upsilon \\ \lambda y \qquad =0 \\ y \qquad =0 \end{cases} \Rightarrow \text{S.C.I.} \begin{cases} x=\upsilon \\ y=0 \\ z=2-\upsilon \end{cases}$$

$$\text{Si}\quad \mu\neq 2\ \forall\lambda\in IR \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

34. Encontrar las transformaciones de filas o columnas que hay que hacer con el determinante adjunto para probar la igualdad. Justificar la respuesta.

Puesto que un determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea cualquiera por sus respectivos adjuntos, podemos desarrollar el determinante de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{\substack{a\cdot F_2-F_1 \\ a\cdot F_3-F_1 \\ a\cdot F_4-F_1}}{=} \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 & a-1 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & a-1 \\ 0 & a-1 & a-1 & a^2-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a^3}\cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (a+1)\cdot(a-1) & a-1 & a-1 \\ 0 & a-1 & (a+1)\cdot(a-1) & a-1 \\ 0 & a-1 & a-1 & (a+1)\cdot(a-1) \end{vmatrix} = \frac{(a-1)^3}{a^3}\cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\substack{(a+1)\cdot F_3-F_2 \\ (a+1)\cdot F_4-F_2}}{=} \frac{(a-1)^3}{a^3\cdot(a+1)^2}\cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & (a+1)^2-1 & a \\ 0 & 0 & a & (a+1)^2-1 \end{vmatrix} = \frac{(a-1)^3}{a^3\cdot(a+1)^2}\cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2+2a & a \\ 0 & 0 & a & a^2+2a \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(a-1)^3\cdot a^2}{a^3\cdot(a+1)^2}\cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a+2 \end{vmatrix} \overset{(a+2)\cdot F_4-F_3}{=} \frac{(a-1)^3\cdot a^2}{a^3\cdot(a+1)^2\cdot(a+2)}\cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (a+2)^2-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(a-1)^3}{a\cdot(a+1)^2\cdot(a+2)}\cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+4a+3 \end{vmatrix} = \frac{(a-1)^3\cdot(a^2+4a+3)}{a\cdot(a+1)^2\cdot(a+2)}\cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{vmatrix} = *$$

$$a^2+4a+3=0 \rightarrow a=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2}=-2\pm 1 \rightarrow \begin{cases} a_1=-2+1=-1 \\ a_2=-2-1=-3 \end{cases} \Rightarrow a^2+4a+3=(a+1)\cdot(a+3)$$

$$* = \frac{(a-1)^3\cdot(a+1)\cdot(a+3)}{a\cdot(a+1)^2\cdot(a+2)}\cdot\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{vmatrix} = \frac{(a-1)^3\cdot(a+3)}{a\cdot(a+1)\cdot(a+2)}\cdot(a+2)\cdot(a+1)\cdot a = (a+3)\cdot(a-1)^3$$

35. Averigua el valor de λ para el que admite infinitas soluciones el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x+\ \ y+2z=3} \\ \mathbf{x+2y+\lambda z=5} \\ \mathbf{2x+\ \ y-3z=4} \end{array}\right.$$

Obtener todas las soluciones e interpretar geométricamente el resultado obtenido, recordando que cada ecuación del sistema representa un plano.

$$\left\{\begin{array}{l} x+\ \ y+2z=3 \\ x+2y+\lambda z=5 \\ 2x+\ \ y-3z=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2\cdot F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-9 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+\quad 2z=3 \xrightarrow[z=0]{y=2} x+2+2\cdot 0=3 \rightarrow x=3-2=1 \\ \quad y+(\lambda-2)\cdot z=2 \xrightarrow{z=0} y+(\lambda-2)\cdot 0=2 \rightarrow y=2 \\ \qquad (\lambda-9)\cdot z=0 \xrightarrow{\text{si } \lambda\neq 9} z=0 \end{array}\right.$$

$$\text{Si}\quad \lambda=9 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+2z=3 \xrightarrow[z=\mu]{y=2-7\mu} x+2-7\mu+2\mu=3 \rightarrow x=1+5\mu \\ \quad y+7z=2 \xrightarrow{z=\mu} y+7\mu=2 \rightarrow y=2-7\mu \\ \qquad 0=0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{S.C.I.} \left\{\begin{array}{l} x=1+5\mu \\ y=2-7\mu \\ z=\quad\ \ \mu \end{array}\right.$$

$$\text{Si}\quad \lambda\neq 9 \Rightarrow \text{S.C.D.} \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{Los tres planos se cortan en el punto } P(1,2,0)$$

$$\text{Si}\quad \lambda=9 \Rightarrow \text{S.C.I.} \left\{\begin{array}{l} x=1+5\mu \\ y=2-7\mu \\ z=\quad\ \ \mu \end{array}\right. \Rightarrow \text{Dos planos son paralelos y cortan al tercero en la recta } r\equiv\left\{\begin{array}{l} Q(1,2, \\ \vec{v}(5,-7 \end{array}\right.$$

36. Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x-a-b-c} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{x-a-b-c} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{x+a-a} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{vmatrix} x-a-b-c & a & b \\ 0 & x-a-b-c & b \\ 0 & 0 & x+a-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a-b-c & a & b \\ 0 & x-a-b-c & b \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (x-a-b-c)\cdot\begin{vmatrix} x-a-b-c & b \\ 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$=(x-a-b-c)\cdot(x-a-b-c)\cdot x = x\cdot(x-a-b-c)^2=0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x-a-b-c=0 \rightarrow x=a+b+c \end{array}\right.$$

$$\boxed{x=0\ ;\ x=a+b+c\ \ (\text{solución doble})}$$

37. Calcular el valor de λ, para el que tiene infinitas soluciones el sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{x + y - z = 0} \\ \mathbf{2x + y + z = 0} \\ \mathbf{\lambda x + y \quad = 0} \end{cases}$$

Obtener todas las soluciones correspondientes a ese valor de λ e interpretar geométricamente por qué el sistema tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ \lambda x + y \quad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -z + y + \ x = 0 \\ z + y + 2x = 0 \\ y + \lambda x = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2 \cdot F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda - 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} -z + y + \ x = 0 \xrightarrow[y=0]{x=0} -z + 0 + 0 = 0 \to -z = 0 \to z = 0 \\ 2y + 3x = 0 \xrightarrow{x=0} 2y + 3 \cdot 0 = 0 \to 2y + 0 = 0 \to 2y = 0 \to y = \dfrac{0}{2} = 0 \\ (2\lambda - 3) \cdot x = 0 \xrightarrow{si\ 2\lambda - 3 \neq 0} x = 0 \end{cases}$$

El sistema tiene infinitas soluciones $\leftrightarrow 2\lambda - 3 = 0 \to 2\lambda = 3 \to \lambda = \dfrac{3}{2}$

Si $\lambda = \dfrac{3}{2}$:

$$\begin{cases} -z + y + \ x = 0 \xrightarrow{x = \mu;\ y = -\frac{3}{2}\mu} -z - \dfrac{3}{2}\mu + \mu = 0 \to -z - \dfrac{\mu}{2} = 0 \to -z = \dfrac{\mu}{2} \to z = -\dfrac{\mu}{2} \\ 2y + 3x = 0 \xrightarrow{x = \mu} 2y + 3\mu = 0 \to 2y = -3\mu \to y = -\dfrac{3}{2}\mu \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Si } \lambda = \frac{3}{2} \to \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r \equiv \begin{cases} x = \quad \mu = \ 2\nu \\ y = -\dfrac{3}{2}\mu = -3\nu \\ z = - \quad \dfrac{\mu}{2} = -\nu \end{cases} \Rightarrow r \equiv (x, y, z) = (0, 0, 0) + \nu \cdot (2, -3, -1)$$

Si $\lambda = \dfrac{3}{2} \to \begin{cases} \text{El Sistema es Compatible Indeterminado de infinitas soluciones : } x = 2\nu\ ;\ y = -3\nu\ ;\ z = \\ \text{Los tres planos (ecuaciones) se intersectan en la recta } r \equiv \dfrac{x}{2} = -\dfrac{y}{3} = -z \end{cases}$

Si $\lambda \neq \dfrac{3}{2} \to \begin{cases} \text{El Sistema es Compatible Determinado de solución trivial : } x = 0\ ;\ y = 0\ ;\ z = 0 \\ \text{Los tres planos (ecuaciones) se intersectan en el punto de origen } O(0, 0, 0) \end{cases}$

38. Obtener en función de λ las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x + \ y + z = 3 + \lambda} \\ \mathbf{x - 3y \quad = -2} \\ \mathbf{-x + \quad 3z = \ 2} \end{cases}$$

Explicar la relación entre el conjunto de soluciones obtenidas y la intersección de los planos $\pi_2 : x - 3y = -2$ y $\pi_3 : -x + 3z = 2$

$$\begin{cases} x+y+z=3+\lambda \\ x-3y=-2 \\ -x+3z=2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3+\lambda \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3+\lambda \\ 0 & -4 & -1 & -5-\lambda \\ 0 & 1 & 4 & 5+\lambda \end{array}\right) \xrightarrow{4\cdot F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3+\lambda \\ 0 & -4 & -1 & -5-\lambda \\ 0 & 0 & 15 & 15+3\lambda \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=3+\lambda \xrightarrow{y=1+\frac{\lambda}{5}\ ;\ z=1+\frac{\lambda}{5}} x+1+\frac{\lambda}{5}+1+\frac{\lambda}{5}=3+\lambda \to x+2+\frac{2\lambda}{5}=3+\lambda \to x=1+\lambda-\frac{2\lambda}{5}=1+\frac{3\lambda}{5} \\ 4y+z=5+\lambda \xrightarrow{z=1+\frac{\lambda}{5}} 4y+1+\frac{\lambda}{5}=5+\lambda \to 4y=5+\lambda-1-\frac{\lambda}{5}=4+\frac{4\lambda}{5} \to y=1+\frac{\lambda}{5} \\ 5z=5+\lambda \to z=\frac{5+\lambda}{5}=1+\frac{\lambda}{5} \end{cases}$$

El Sistema es Compatible Determinado $\forall \lambda \in \mathrm{IR}$ de solución: $x=1+\frac{3\lambda}{5}\ ;\ y=1+\frac{\lambda}{5}\ ;\ z=1+\frac{\lambda}{5}$

$$\pi_2 \cap \pi_3 \equiv \begin{cases} x-3y=-2 \\ -x+3z=2 \end{cases} \xrightarrow{x=\mu} \begin{cases} \mu-3y=-2 \to -3y=-2-\mu \to y=\frac{2+\mu}{3} \\ -\mu+3z=2 \to 3z=2+\mu \to z=\frac{2+\mu}{3} \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=\frac{2}{3}+\frac{\mu}{3} \\ z=\frac{2}{3}+\frac{\mu}{3} \end{cases} \xrightarrow{\mu=3\upsilon}$$

$$\xrightarrow{\mu=3\upsilon} r \equiv \begin{cases} x=3\upsilon \\ y=\frac{2}{3}+\upsilon \\ z=\frac{2}{3}+\upsilon \end{cases} \Rightarrow r \equiv \left(0,\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)+\upsilon\cdot(3,1,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P\left(0,\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) \\ \vec{v}=(3,1,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x}{3}=y-\frac{2}{3}=z-\frac{2}{3}$$

La intersección de los planos π_2 y π_3 es la recta $r \equiv \frac{x}{3}=y-\frac{2}{3}=z-\frac{2}{3}$ y la solución del sistema es un punto de dicha recta como queda demostrado al comprobar:

$$P\left(1+\frac{3\lambda}{5},1+\frac{\lambda}{5},1+\frac{\lambda}{5}\right) \in r \equiv \frac{x}{3}=y-\frac{2}{3}=z-\frac{2}{3} \leftrightarrow \frac{1+\frac{3\lambda}{5}}{3}=1+\frac{\lambda}{5}-\frac{2}{3}=1+\frac{\lambda}{5}-\frac{2}{3} \to \frac{1}{3}+\frac{\lambda}{5}=\frac{1}{3}+\frac{\lambda}{5}=\frac{1}{3}+\frac{\lambda}{5}$$

39. Dadas las matrices

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Justificar que la matriz A tiene inversa y obtener razonadamente la matriz inversa A^{-1}.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 = 9 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Obtendremos la matriz inversa de A por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 - 2 \cdot F_3]{F_1 - 2 \cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 + 4 \cdot F_3}$$

$$\xrightarrow{F_1 + 4 \cdot F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3} \cdot F_1 \; ; \; \frac{1}{3} \cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & - \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calcular, razonadamente, el determinante de la matriz $3A^{-1}$.

$$|3A^{-1}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$$

c) Obtener los valores reales x, y, z que verifiquen la ecuación $x\,I + y\,A + z\,A^2 = B$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 36 & 12 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 9 & 36 & 12 \\ 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y & 6y & 0 \\ 0 & 3y & 2y \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9z & 36z & 12z \\ 0 & 9z & 8z \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x + 3y + 9z &= 18 \\ 6y + 3z &= 48 \\ 12z &= 12 \\ x + 3y + 9z &= 18 \\ 2y + 8z &= 12 \\ x + y + z &= 6 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{z=1} \left.\begin{aligned} x + 3y &= 9 \\ 6y &= 12 \\ x + 3y &= 9 \\ 2y &= 4 \\ x + y &= 5 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{y=2} \left.\begin{aligned} x &= 3 \\ x &= 3 \\ 2 &= 2 \\ x &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 3 \quad ; \quad y = 2 \quad ; \quad z = 1}$$

40. Escribir para qué valores de λ tiene una única solución el sistema

$$\left\{\begin{array}{r} \mathbf{x + \ y + \ z = 1} \\ \mathbf{x + 2y + 3z = 3} \\ \mathbf{3x + 4y + 3z = \lambda} \end{array}\right.$$

y obtener razonadamente para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones.

$$\left\{\begin{array}{l} x+\ y+\ z=1 \\ x+2y+3z=3 \\ 3x+4y+3z=\lambda \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3\cdot F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-3 & \lambda-3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-5 & \lambda-5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+\ y+\ z=1 \xrightarrow[z=1]{y=0} x+0+1=1 \longrightarrow x+1=1 \longrightarrow x=1-1=0 \\ \qquad y+2z=2 \xrightarrow{z=1} y+2\cdot 1=2 \longrightarrow y+2=2 \longrightarrow y=2-2=0 \\ (\lambda-5)\cdot z=(\lambda-5) \xrightarrow{\text{si } \lambda-5\neq 0} z=1 \end{array}\right.$$

Si $\lambda=5 \longrightarrow$ S.C.I. $\left\{\begin{array}{l} x+y+\ z=1 \xrightarrow[z=\mu]{y=2-2\mu} x+2-2\mu+\mu=1 \longrightarrow x+2-\mu=1 \longrightarrow x=1-2+\mu=-1+\mu \\ \quad y+2z=2 \xrightarrow{z=\mu} y+2\mu=2 \longrightarrow y=2-2\mu \\ \qquad 0=0 \longrightarrow \text{El Sistema es Compatible Indeterminado y tiene infinitas solucione} \end{array}\right.$

Si $\lambda \neq 5 \longrightarrow$ S.C.D. : El Sistema es Compatible Determinado y tiene un única solución $(\ x=0\ ;\ y=0$

Dar el significado geométrico del hecho de que el sistema tenga infinitas soluciones, y recordar que cada una de las ecuaciones del sistema representan a un plano.

Si $\lambda = 5 \longrightarrow$ Los tres planos se cortan en la recta $r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = -1+\ \mu \\ y = \ \ 2-2\mu \\ z = \qquad \mu \end{array}\right. \Rightarrow r \equiv \left\{\begin{array}{l} P(-1,2,0) \\ \vec{v} = (1,-2,1) \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\Rightarrow r \equiv (x,y,z) = (-1,2,0) + \mu\cdot(1,-2,1) \Rightarrow r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1} \Rightarrow r \equiv x+1 = \frac{-y+2}{2} = z$$

Si $\lambda \neq 5 \longrightarrow$ Los tres planos se cortan en el punto $(0,\ 0,\ 1)$

41. Probar que para un valor real de m el sistema

$$\left\{\begin{array}{r} \mathbf{x + \ y + \ z = 1} \\ \mathbf{x + 2y + 3z = 4} \\ \mathbf{3x + 5y + mz = 9} \end{array}\right.$$

es indeterminado. Para ese valor de m encontrar todas las soluciones del sistema. Interpretar geométricamente el significado del sistema.

$$\left\{\begin{array}{l} x+\ y+\ z=1 \\ x+2y+3z=4 \\ 3x+5y+mz=9 \end{array}\right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & m & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3\cdot F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & m-3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-2\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & m-7 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+\ y+\ z=1 \xrightarrow[z=0]{y=3} x+3+0=1 \rightarrow x+3=1 \rightarrow x=1-3=-2 \\ \quad y+2z=3 \xrightarrow{z=0} y+2\cdot 0=3 \rightarrow y+0=3 \rightarrow y=3 \\ (m-7)\cdot z=0 \xrightarrow{m-7\neq 0} z=0 \end{array}\right.$$

Si $m=7$:

$$\left\{\begin{array}{l} x+\ y+\ z=1 \xrightarrow[z=\lambda]{y=3-2\lambda} x+3-2\lambda+\lambda=1 \rightarrow x+3-\lambda=1 \rightarrow x=1-3+\lambda=-2+\lambda \\ \quad y+2z=3 \xrightarrow{z=\lambda} y+2\lambda=3 \rightarrow y=3-2\lambda \\ \qquad 0=0 \rightarrow S.C.I \end{array}\right.$$

Si $m=7 \Rightarrow$ El Sistema es Compatible Indeterminado cuyas infinitas soluciones son :

$$S.C.I. \left\{\begin{array}{l} x=-2+\lambda \\ y=3-2\lambda \quad \forall \lambda \in IR \\ z=\qquad \lambda \end{array}\right.$$

Si $m\neq 7 \Rightarrow$ El Sistema es Compatible Determinado cuya solución es :

$$S.C.D. \left\{\begin{array}{l} x=-2 \\ y=3 \\ z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{Los tres planos representados por las tres ecuaciones se cortan en el punto } (-2,3,0)$$

Si $m=7 \Rightarrow$ Los tres planos representados por las tres ecuaciones se cortan en la recta :

$$r\equiv \left\{\begin{array}{l} x=-2+\lambda \\ y=3-2\lambda \\ z=\qquad \lambda \end{array}\right. \Rightarrow r\equiv \left\{\begin{array}{l} P(-2,3,0) \\ \vec{v}=(1,-2,1) \end{array}\right. \Rightarrow r\equiv (x,y,z)=(-2,3,0)+\lambda\cdot(1,-2,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r\equiv \frac{x+2}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-0}{1} \rightarrow r\equiv x+2=\frac{y+2}{3}=z \Rightarrow r\equiv \left\{\begin{array}{l} x+2=\dfrac{y+2}{3} \\ x+2=z \end{array}\right. \rightarrow r\equiv \left\{\begin{array}{l} 3x-y\quad =-4 \\ \ x\quad -z=-2 \end{array}\right.$$

42. Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x+\ y+\ z=2} \\ \mathbf{x+2y+\ z=3} \\ \mathbf{3x+5y+mz=8} \end{array}\right.$$

obtener para qué valores reales de m tiene una única solución y calcularla para cada uno de esos valores de m.

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=2 \\ x+2y+\ \ z=3 \\ 3x+5y+mz=8 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & m & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3\cdot F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & m-3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-2\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m-3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=2 \xrightarrow[z=0]{y=1} x+1+0=2 \rightarrow x+1=2 \rightarrow x=2-1=1 \\ \qquad y \qquad =1 \\ (m-3)\cdot z=0 \xrightarrow{m-3\neq 0} z=0 \end{cases}$$

Si $m=3$:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \xrightarrow[z=\lambda]{y=1} x+1+\lambda=2 \rightarrow x=2-1-\lambda=1-\lambda \\ \quad y \quad =1 \\ \quad 0=0 \end{cases} \Rightarrow \text{S.istema Compatible Indeterminado} \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=1 \\ z=\ \ \lambda \end{cases}$$

Si $m\neq 3$:

$$\text{Sistema Compatible Determinado} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

43. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} (\alpha+3)\cdot x - 4y - 2z = 4 \\ x - 2y - (\alpha+2)\cdot z = 2 \\ 2x + (\alpha+3)\cdot y - 2z = 4 \end{cases}$$

se pide, razonando las respuestas:

a) **Justificar que para el valor de $\alpha = 0$ el sistema es incompatible.**

Si $\alpha=0$:

$$\begin{cases} 3x-4y-2z=4 \\ x-2y-2z=2 \\ 2x+3y-2z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y-2z=2 \\ 3x-4y-2z=4 \\ 2x+3y-2z=4 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2\cdot F_1]{F_2-3\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot F_1}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x-2y-2z=\ \ 2 \\ \quad y+2z=-1 \\ \qquad 0\neq\ \ 1 \rightarrow \text{Sistema Incompatible} \end{cases}$$

b) **Determinar los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado.**

$$\begin{cases} x - 2y - (\alpha+2)\cdot z = 2 \\ (\alpha+3)\cdot x - 4y - 2z = 4 \\ 2x + (\alpha-3)\cdot y - 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\alpha-2 & 2 \\ \alpha+3 & -4 & -2 & 4 \\ 2 & \alpha-3 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2\cdot F_1]{F_2-(\alpha+3)\cdot F_1}$$

$$\xrightarrow[F_3-2\cdot F_1]{F_2-(\alpha+3)\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\alpha-2 & 2 \\ 0 & -4+2\cdot(\alpha+3) & -2-(\alpha+3)\cdot(-\alpha-2) & 4-2\cdot(\alpha+3) \\ 0 & \alpha-3+4 & -2-2\cdot(-\alpha-2) & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\alpha-2 & 2 \\ 0 & -4+2\alpha+6 & -2-\left(-\alpha^2-2\alpha-3\alpha-6\right) & 4-2\alpha-6 \\ 0 & \alpha+1 & -2+2\alpha+4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\alpha-2 & 2 \\ 0 & 2\alpha+2 & \alpha^2-5\alpha+4 & -2\alpha-2 \\ 0 & \alpha+1 & 2\alpha+2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2\cdot F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\alpha-2 & 2 \\ 0 & 2\alpha+2 & \alpha^2-5\alpha+4 & -2\alpha-2 \\ 0 & 0 & 4\alpha+4-\alpha^2-5\alpha-4 & 2\alpha+2 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\alpha-2 & 2 \\ 0 & 2\alpha+2 & \alpha^2-5\alpha+4 & -2\alpha-2 \\ 0 & 0 & -\alpha^2-\alpha & 2\alpha+2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x - 2y - (\alpha+2)\cdot z = 2 \\ (2\alpha+2)\cdot y + \left(\alpha^2-5\alpha+4\right)\cdot z = -2\alpha-2 \\ -\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot z = 2\cdot(\alpha+1) \end{cases}$$

Si $\alpha+1 \neq 0$ $(\alpha \neq -1)$:

$$\begin{cases} x - 2y - (\alpha+2)\cdot z = 2 \\ (2\alpha+2)\cdot y + \left(\alpha^2-5\alpha+4\right)\cdot z = -2\alpha-2 \\ -\alpha\cdot z = 2 \xrightarrow{\text{Si } \alpha\neq 0} z = \dfrac{-2}{\alpha} \end{cases} \xrightarrow{z=\frac{-2}{\alpha}}$$

$$\xrightarrow{z=\frac{-2}{\alpha}} \begin{cases} x - 2y - (\alpha+2)\cdot\dfrac{-2}{\alpha} = 2 \\ (2\alpha+2)\cdot y + \left(\alpha^2-5\alpha+4\right)\cdot\dfrac{-2}{\alpha} = -2\alpha-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + 2 + \dfrac{4}{\alpha} = 2 \\ (2\alpha+2)\cdot y - 2\alpha - 10 - \dfrac{8}{\alpha} = -2\alpha-2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 2y = -\dfrac{4}{\alpha} \xrightarrow{y=\frac{6\alpha+4}{\alpha\cdot(\alpha+1)}} x - 2\cdot\dfrac{6\alpha+4}{\alpha\cdot(\alpha+1)} = -\dfrac{4}{\alpha} \rightarrow x - \dfrac{12\alpha+8}{\alpha\cdot(\alpha+1)} = -\dfrac{4}{\alpha} \rightarrow * \\ (2\alpha+2)\cdot y = 12 + \dfrac{8}{\alpha} \rightarrow y = \dfrac{12+\frac{8}{\alpha}}{2\alpha+2} = \dfrac{6+\frac{4}{\alpha}}{\alpha+1} = \dfrac{6\alpha+4}{\alpha\cdot(\alpha+1)} \end{cases}$$

$$* \, x = \frac{12\alpha+8}{\alpha\cdot(\alpha+1)} - \frac{4}{\alpha} = \frac{12\alpha+8}{\alpha\cdot(\alpha+1)} - \frac{4\cdot(\alpha+1)}{\alpha\cdot(\alpha+1)} = \frac{12\alpha+8-4\alpha-4}{\alpha\cdot(\alpha+1)} = \frac{8\alpha+4}{\alpha\cdot(\alpha+1)}$$

Si $\alpha \neq -1, , 0$ el Sistema es Compatible Determinado de solució

$$\text{S.C.D.} \begin{cases} x = \dfrac{8\alpha+4}{\alpha\cdot(\alpha+1)} \\ y = \dfrac{6\alpha+4}{\alpha\cdot(\alpha+1)} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} - \{-1, 0\} \\ z = \dfrac{-2}{\alpha} \end{cases}$$

c) **Resolver el sistema para el valor del parámetro α para el cual es compatible indeterminado.**

Si $\alpha=-1$ el Sistema es Compatible Indeterminado de solución :

$$\text{S.C.I.}\begin{cases} x-2y-z=2 \xrightarrow[z=\mu]{y=\lambda} x-2\lambda-\mu=2 \longrightarrow x=2+2\lambda+\mu \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \text{S.C.I.}\begin{cases} x=2+2\lambda+\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases}$$

44. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \mathbf{x+\ y+\ z=\lambda} \\ \mathbf{2x+3y+5z=2} \\ \mathbf{3x+5y+\lambda^2 z=1} \end{cases}$$

Dependiente del parámetro λ, se pide:

a) **Determinar para qué valores de λ el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.**

$$\begin{cases} x+y+z=\lambda \\ 2x+3y+5z=2 \\ 3x+5y+\lambda^2 z=1 \end{cases} \Rightarrow A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & \lambda^2 & 1 \end{array}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & \lambda^2 \end{vmatrix}=3\lambda^2+15+10-9-25-2\lambda^2=\lambda^2-9=0 \rightarrow \lambda^2=9 \rightarrow \lambda=\sqrt{9}=\pm 3$$

Si $\lambda \neq -3, 3 :\Rightarrow rg(A)=rg(A|B)=3=$ nº de incógnitas $\rightarrow$ Sistema Compatible Determinado

Si $\lambda=-3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix}=5+10-81+75-18-3=90-102=-12\neq 0 \rightarrow rg(A|B)=3\neq rg(A)=2 \rightarrow \text{S.I.}$$

Si $\lambda=3$:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix}=5+10+81-75-18-3=96-96=0. \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix}=5+6+54-45-18-2=65-65=0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}=3+6+30-27-10-2=39-39=0 \end{array}\right\} \rightarrow rg(A|B)=2=rg(A)<\text{nº} \rightarrow \text{S.C.I.}$$

$$\begin{array}{l} \text{Si } \lambda=-3 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible} \\ \text{Si } \lambda=\ \ 3 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado} \\ \text{Si } \lambda\in IR-\{-3,3\} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \end{array}$$

b) Obtener el conjunto S de las soluciones del sistema para el caso compatible indeterminado.

$$\begin{cases} x+\ y+\ z=3 \\ 2x+3y+5z=2 \\ 3x+5y+9z=1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&3 \\ 2&3&5&2 \\ 3&5&9&1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3\cdot F_1]{F_2-2\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&3 \\ 0&1&3&-4 \\ 0&2&6&-8 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-2\cdot F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&3 \\ 0&1&3&-4 \\ 0&0&0&0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+\ z=\ \ 3 \xrightarrow[z=\mu]{y=-4-3\mu} x-4-3\mu+\mu=3 \rightarrow x-4-2\mu=3 \rightarrow x=3+4+2\mu=7+2\mu \\ \quad y+3z=-4 \xrightarrow{z=\mu} y+3\mu=-4 \rightarrow y=-4-3\mu \\ \qquad 0=0 \end{cases}$$

$$\boxed{S=(\ x,y,z\ )\ /\begin{cases} x=\ \ 7+2\mu \\ y=-4-3\mu \quad \forall\mu\in \\ z=\qquad\ \mu \end{cases}}$$

c) Obtener el vector de S ortogonal (perpendicular) al vector (1 , 1 , 2).

$$\vec{s}\in S\ /\ \vec{s}\perp\vec{v}=(\ 1,1,2\ ) \leftrightarrow \vec{s}\cdot\vec{v}=0 \rightarrow (\ 7+2\mu,-4-3\mu,\mu\ )\cdot(\ 1,1,2\ )=0 \rightarrow 7+2\mu-4-3\mu+2\mu=0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \mu+3=0 \rightarrow \mu=-3 \rightarrow \vec{s}=(\ 1,5,-3\ )$$

45. Para cada terna de números reales (x , y , z) se consideran las matrices

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} x&y&z \\ 1&1&-1 \\ 3&5&5 \end{pmatrix} \ ,\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2&x&1 \\ 1&y&-1 \\ 2&z&-1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los determinantes de las matrices A y B.

$$|\ A\ |=\begin{vmatrix} x&y&z \\ 1&1&-1 \\ 3&5&5 \end{vmatrix}=5x-3y+5z-3z-5y+5x=10x-8y+2z$$

$$|\ B\ |=\begin{vmatrix} 2&x&1 \\ 1&y&-1 \\ 2&z&-1 \end{vmatrix}=-2y-2x+z-2y+2z+x=-x-4y+3z$$

b) Para x = y = z = 1 , calcular el determinante de la matriz producto A B.

Hallando la matriz producto y luego calculando su determinante:

$$\text{Si } x=y=z=1: \quad \left.\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\3&5&5\end{pmatrix} \\ \\ B=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}\end{array}\right\} A\cdot B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\3&5&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3&-1\\1&1&1\\21&13&-7\end{pmatrix}\Rightarrow |A\cdot B|=\begin{vmatrix}5&3&-1\\1&1&1\\21&13&-7\end{vmatrix}=$$

$$=-36+63-13+21-65+21=105-113=-8$$

O bien podemos aplicar la propiedad de que el determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de cada una de las matrices:

$$\text{Si } x=y=z=1: \quad \left.\begin{array}{l} |A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\3&5&5\end{vmatrix}=5-3+5-3-5+5=10-8+2=4 \\ \\ |B|=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&1&-1\\2&1&-1\end{vmatrix}=-2-2+1-2+2+1=-1-4+3=-2\end{array}\right\} |A\cdot B|=|A|\cdot|B|=4\cdot(-2)=-8$$

c) Obtener, razonadamente, para qué valores de x , y , z, ninguna de las matrices A y B tiene inversa.

$$\left.\begin{array}{l}\nexists\ A^{-1}\leftrightarrow |A|=0\\ \nexists\ B^{-1}\leftrightarrow |B|=0\end{array}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}10x-8y+2z=0\\ -x-4y+3z=0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}5x-4y+\ \ z=0\\ x+4y-3z=0\end{array}\right.\xrightarrow{z=\lambda}\left\{\begin{array}{l}5x-4y=-\lambda\xrightarrow{x=-4y+3\lambda}*\\ x+4y=3\lambda\rightarrow x=-4y+3\lambda\rightarrow **\end{array}\right.$$

$$*\rightarrow 5\cdot(-4y+3\lambda)-4y=-\lambda\rightarrow -20y+15\lambda-4y=-\lambda\rightarrow -24y=-16\lambda\rightarrow 3y=2\lambda\rightarrow y=\frac{2\lambda}{3}$$

$$**\rightarrow x=-4\cdot\frac{2\lambda}{3}+3\lambda=-\frac{8\lambda}{3}+\frac{9\lambda}{3}=\frac{\lambda}{3}$$

$$\nexists\ A^{-1}\wedge\nexists\ B^{-1}\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{\lambda}{3}\\ \\ y=\dfrac{2\lambda}{3}\quad\forall\lambda\in\mathrm{iR}\\ \\ z=\lambda\end{array}\right.\xrightarrow{z=\lambda=3\mu}\nexists\ A^{-1}\wedge\nexists\ B^{-1}\left\{\begin{array}{l}x=\ \mu\\ y=2\mu\\ z=3\mu\end{array}\right.\ \forall$$

46. Para cada número real λ , $M(\lambda)$ es la matriz

$$\mathbf{M}(\lambda)=\begin{pmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) **Obtener el determinante de la matriz $M(\lambda)$, y justificar que para cualquier número real λ existe la matriz $M(\lambda)^{-1}$ inversa de $M(\lambda)$.**

$$\det M(\lambda)=\begin{vmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{vmatrix}=-4+6\lambda+2\lambda^2-\lambda^2-8\lambda+6=\lambda^2-2\lambda+2$$

$$\exists M(\lambda)^{-1}\leftrightarrow \det M(\lambda)\neq 0\leftrightarrow \lambda^2-2\lambda+2\neq 0$$

$$\lambda^2-2\lambda+2=0\rightarrow\lambda=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{4\cdot(-1)}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{-1}}{2}=1\pm\sqrt{-1}$$

$$\nexists\lambda\in \mathbb{R} \,/\, \lambda^2-2\lambda+2=0\Rightarrow\lambda^2-2\lambda+2\neq0\Rightarrow\det\ M(\lambda)\neq0\Rightarrow\exists M(\lambda)^{-1}$$

b) **Calcular la matriz $M(0)^{-1}$.**

$$M(0)=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{2\cdot F_2-F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{F_1+3\cdot F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 12 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[F_2+4\cdot F]{F_1+12\cdot F}$$

$$\xrightarrow[F_2+4\cdot F_3]{F_1+12\cdot F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -2 & 6 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[\substack{-F_2\\-F_3}]{\frac{1}{4}\cdot F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\Rightarrow M(0)^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix}$$

c) **Si A = M (8) , B = M (4) y C = M (3) , calcúlese, razonadamente, el determinante de la matriz producto A B^{-1} C^{-1}.**

$$A=M(8)=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 8 & 8 & -1 \end{pmatrix}\ ;\quad B=M(4)=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\ ;\quad C=M(3)=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 8 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -4+48+128-64-64+6=50$$

$$B^{-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{2\cdot F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+3\cdot F_2}$$

$$\xrightarrow{F_1+3\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 4 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{5\cdot F_1+4\cdot F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 20 & 0 & 0 & -18 & 38 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\frac{1}{20}\cdot F_1 \\ -F_2 \\ -\frac{1}{5}\cdot F_3}}$$

$$\xrightarrow{\substack{\frac{1}{20}\cdot F_1 \\ -F_2 \\ -\frac{1}{5}\cdot F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{10} & \frac{19}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{10} & \frac{19}{10} & \frac{1}{5} \\ 1 & -2 & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\left|B^{-1}\right| = \begin{vmatrix} -\frac{9}{10} & \frac{19}{10} & \frac{1}{5} \\ 1 & -2 & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} = -\frac{18}{50} - \frac{2}{25} + \frac{4}{25} + \frac{19}{50} = \frac{1}{50} + \frac{2}{25} = \frac{1}{50} + \frac{4}{50} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$$

$$C^{-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[4\cdot F_3-3\cdot F_1]{2\cdot F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -13 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+3\cdot F_2}$$

$$\xrightarrow{F_3+3\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -6 & 6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+3\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 6 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -6 & 6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[10\cdot F_2+F_3]{5\cdot F_1+3\cdot F_3}$$

$$\xrightarrow{5\cdot F_1+4\cdot F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 20 & 0 & 0 & -28 & 48 & 12 \\ 0 & -10 & 0 & -16 & 26 & 4 \\ 0 & 0 & -10 & -6 & 6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\frac{1}{20}\cdot F_1 \\ \frac{-1}{10}\cdot F_2 \\ -\frac{1}{10}\cdot F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{5} & \frac{12}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{13}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right) \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} & \frac{12}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{8}{5} & -\frac{13}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\left|C^{-1}\right| = \begin{vmatrix} -\frac{7}{5} & \frac{12}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{8}{5} & -\frac{13}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{vmatrix} = -\frac{185}{125} - \frac{72}{125} - \frac{72}{125} + \frac{117}{125} + \frac{42}{125} + \frac{192}{125} = \frac{351}{125} - \frac{326}{125} = \frac{25}{125} = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{\left|A \cdot B^{-1} \cdot C^{-1}\right| = |A| \cdot \left|B^{-1}\right| \cdot \left|C^{-1}\right| = 50 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{50}{50} = 1}$$

47. Calcular el vector $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ que verifique AX + B = C . siendo

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&2&0\\6&5&3\end{pmatrix}\ ,\quad B=\begin{pmatrix}3\\7\\2\end{pmatrix}\quad ,\quad C=\begin{pmatrix}4\\8\\9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\4&2&0\\6&5&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\\9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x\\4x+2y\\6x+5y+3z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\\9\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}3z+5y+6x=7\xrightarrow{x=1\ ;\ y=\frac{-3}{2}}*\\2y+4x=1\xrightarrow{x=1}y=\frac{-3}{2}\\x=1\end{array}\right.$$

$$*\xrightarrow{x=1\ ;\ y=\frac{-3}{2}}3z+5\cdot\frac{-3}{2}+6\cdot 1=7\to 3z-\frac{15}{2}+6=7\to 6z-15+12=14\to 6z-3=14\to z=\frac{17}{6}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}1\\\frac{-3}{2}\\\frac{17}{6}\end{pmatrix}}$$

48. Con la inversa de la matriz $\begin{pmatrix}2&3\\4&2\end{pmatrix}$ resuelve

$$\begin{cases}2x+3y=8\\4x+2y=8\end{cases}$$

Obtén razonadamente la matriz inversa de una matriz A, cuadrada y de orden 3 , sabiendo que A^2 + A = I , donde

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\4&2\end{pmatrix}\ ;\ A^{-1}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}2&3&1&0\\4&2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-2\cdot F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}2&3&1&0\\0&-4&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{4\cdot F_1+3\cdot F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}8&0&-2&3\\0&-4&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{8}\cdot F_1\ ;\ -\frac{1}{4}\cdot F_1}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{8}\cdot F_1\ ;\ -\frac{1}{4}\cdot F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{8}\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{3}{8}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$A\cdot X=B\to A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\to I\cdot X=A^{-1}\cdot B\to X=A^{-1}\cdot B\Rightarrow X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{3}{8}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+3\\4-2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}}$$

$$A^2+A=I\rightarrow A\cdot(A+I)=I\rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot(A+I)=A^{-1}\cdot I\rightarrow I\cdot(A+I)=A^{-1}\rightarrow A+I=A^{-1}$$

$$\boxed{A^{-1}=A+I=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+1&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}+1&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}+1\end{pmatrix}}$$

49. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases}\lambda x\qquad +2z=0\\ \qquad\lambda y-\ z=\lambda\\ x+3y+\ z=5\end{cases}$$

Dependiente del parámetro real λ, se pide:

a) **Determinar para qué valores de λ el sistema es: compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.**

$$\begin{cases}\lambda x\qquad +2z=0\\ \qquad\lambda y-\ z=\lambda\\ x+3y+\ z=5\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda&0&2&0\\0&\lambda&-1&\lambda\\1&3&1&5\end{array}\right)\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&2\\0&\lambda&-1\\1&3&1\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+3\lambda=\lambda^2+\lambda=0\rightarrow\lambda\cdot(\lambda+1)=0\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ \lambda+1=0\rightarrow\lambda=-1\end{cases}$$

$$\text{Si } \lambda \neq -1,0 \ \left(\lambda \in \mathbb{R} - \{-1,0\} \right): \ rg(A) = rg(A|B) = \text{nº de incógnitas} = 3 \Rightarrow S.C.D.$$

$$\text{Si } \lambda = -1,0 : \ rg(A) = 2 < \text{nº de incógnitas} = 3 \Rightarrow S.C.I. \text{ o } S.I.$$

Si $\lambda = -1$:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -6 + 10 = 4 \neq 0 \Rightarrow rg(A|B) = 3 \neq rg(A) = 2 \Rightarrow S.I.$$

Si $\lambda = 0$:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow rg(A|B) = 2 = rg(A) \Rightarrow S.C.I.$$

b) Obtener las soluciones en los casos compatible determinado y compatible indeterminado.

Si $\lambda \neq -1,0 \ \left(\lambda \in \mathbb{R} - \{-1,0\} \right)$: Sistema Compatible Determinado

$$\begin{cases} z + 3y + \ x = 5 \\ 2z \qquad + \lambda x = 0 \\ -z + \lambda y - \quad = \lambda \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & \lambda & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & \lambda \end{array} \right) \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2-2\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & \lambda-2 & -10 \\ 0 & \lambda+3 & 1 & \lambda+5 \end{array} \right) \xrightarrow{6\cdot F_3 + (\lambda+3)\cdot F_2}$$

$$\xrightarrow{6\cdot F_3 + (\lambda+3)\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & \lambda-2 & -10 \\ 0 & 0 & 6+\lambda^2-2\lambda+3\lambda-6 & 6\lambda+30-10\lambda-30 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & \lambda-2 & -10 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda & -4\lambda \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} z + 3y + \qquad x = \quad 5 \xrightarrow{x=\frac{-4}{\lambda+1}\ ;\ y=\frac{\lambda+3}{\lambda+1}} z + 3\cdot\dfrac{\lambda+3}{\lambda+1} - \dfrac{4}{\lambda+1} = 5 \rightarrow ** \\ -6y + (\lambda-2)\cdot x = -10 \xrightarrow{x=\frac{-4}{\lambda+1}} -6y + (\lambda-2)\cdot\dfrac{-4}{\lambda+1} = -10 \rightarrow * \\ (\lambda+1)\cdot x = -\ 4 \xrightarrow{\lambda\neq-1} x = \dfrac{-4}{\lambda+1} \end{cases}$$

$$* \rightarrow 6y + \frac{4\cdot(\lambda-2)}{\lambda+1} = 10 \rightarrow 3y + \frac{2\cdot(\lambda-2)}{\lambda+1} = 5 \rightarrow 3y + \frac{2\lambda-4}{\lambda+1} = 5 \rightarrow 3y = 5 - \frac{2\lambda-4}{\lambda+1} = \frac{5\lambda+5-2\lambda+4}{\lambda+1} =$$

$$= \frac{3\lambda+9}{\lambda+1} \rightarrow y = \frac{\lambda+3}{\lambda+1}$$

$$** \rightarrow z + \frac{3\lambda+9-4}{\lambda+1} = 5 \rightarrow z + \frac{3\lambda+5}{\lambda+1} = 5 \rightarrow z = 5 - \frac{3\lambda+5}{\lambda+1} = \frac{5\lambda+5-3\lambda-5}{\lambda+1} = \frac{2\lambda}{\lambda+1}$$

Si $\lambda = 0$ (Sistema Compatible Indeterminado):

$$\begin{cases} x+3y+z=5 \\ \quad 2z=0 \\ \quad -z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y \quad =5 \\ \quad z=0 \end{cases} \xrightarrow{y=\mu} x+3\mu=5 \rightarrow x=5-3\mu \Rightarrow \begin{cases} x=5-3\mu \\ y=\quad \mu \quad \forall \mu \in IR \\ z=0 \end{cases}$$

Si $\lambda \neq -1, 0$ $\left(\lambda \in IR - \{-1, 0\} \right)$ [Sistema Compatible Determinado]:

$$x = \frac{-4}{\lambda+1} \quad ; \quad y = \frac{\lambda+3}{\lambda+1} \quad ; \quad z = \frac{2\lambda}{\lambda+1}$$

50. a) Calcular las matrices reales cuadradas de orden 3, X e Y, que satisfacen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} \mathbf{2X+Y=B} \\ \mathbf{X-2Y=C} \end{cases} \quad \textbf{donde} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{y} \quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2X+Y=B \\ X-2Y=C \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & B \\ 1 & -2 & C \end{array}\right] \xrightarrow{2F_2-F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & B \\ 0 & -5 & 2C-B \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 2X+Y=B \rightarrow 2X=B-Y \rightarrow X=\dfrac{B-Y}{2} \\ -5Y=2C-B \rightarrow Y=\dfrac{2C-B}{-5}=-\dfrac{2}{5}\cdot C+\dfrac{1}{5}\cdot B \end{cases}$$

$$Y=-\frac{2}{5}\cdot C+\frac{1}{5}\cdot B=\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{2}\cdot B-\frac{1}{2}\cdot X=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

GEOMETRÍA

1. Se consideran las rectas:

$$r : \frac{x}{-1} = y - 1 = \frac{z-2}{-2} \qquad s : \frac{x-2}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

a) Determinar la ecuación de la recta t que corta a r y s y que contiene al origen de coordenadas.

En primer lugar vamos a determinar la posición relativa de ambas rectas:

Como la ecuación continua de una recta en el espacio dada por un punto $P\left(x_P, y_P, z_P\right)$ y su vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es $r \equiv \frac{x + x_P}{v_1} = \frac{y + y_P}{v_2} = \frac{z + z_P}{v_3}$ las rectas r y s se definen como:

$$r \equiv \begin{cases} P(\,0, -1, -2\,) \\ \vec{r} = (\,-1,1,-2\,) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -1 + \lambda \quad \text{con } \lambda \in R \\ z = -2 - 2\lambda \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} Q(\,-2, 0, 1\,) \\ \vec{s} = (\,6,2,2\,) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -2 + 6\gamma \\ y = 2\gamma \qquad \text{con } \gamma \in R \\ z = 1 + 2\gamma \end{cases}$$

Puesto que sus vectores no son proporcionales, las rectas r y s no son paralelas ni coincidentes. Para saber si se cortan o se cruzan, necesitamos calcular el determinante formado por los vectores $\overrightarrow{PQ}=(-2,1,3)$, $\vec{r}=(-1,1,2)$ y $\vec{s}=(6,2,2)$:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\cdot1\cdot2+1\cdot(-2)\cdot6+3\cdot(-1)\cdot2-3\cdot1\cdot6-1\cdot(-1)\cdot2-(-2)\cdot(-2)\cdot2=$$

$$=-4-12-6-18+2-8=-36\neq0\rightarrow\overrightarrow{PQ},\vec{r}\text{ y }\vec{s}\text{ no son coplanarios y las rectas se cruzan.}$$

La recta t buscada será la intersección de dos planos, uno que contiene a la recta r y al origen de coordenadas; y el otro que contiene a la recta s y también al origen de coordenadas:

$$\pi\equiv\begin{cases} O(0,0,0) \\ r\equiv(x,y,z)=(0,-1,-2)+\lambda(-1,1,-2)\end{cases}\Rightarrow\pi\equiv\overrightarrow{OX}=\alpha\overrightarrow{OP}+\beta\overrightarrow{OR}\quad\alpha,\beta\in R\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\pi\equiv(x,y,z)=(0,0,0)+\alpha(0,-1,-2)+\beta(-1,1,-2)\Rightarrow\begin{cases} x=-\beta\rightarrow\beta=-x \\ y=-\alpha+\beta\xrightarrow{\downarrow}y=-\alpha-x\rightarrow-\alpha=y+x \\ z=-2\alpha-2\beta\rightarrow z=-2\alpha+2x\xrightarrow{\downarrow}z=2y+4x\Rightarrow\end{cases}$$

$$\Rightarrow\pi\equiv4x+2y-z=0$$

$$\pi'\equiv\begin{cases} O(0,0,0) \\ s\equiv(x,y,z)=(-2,0,1)+\gamma(6,2,2)\end{cases}\Rightarrow\pi'\equiv\overrightarrow{OX}=\delta\overrightarrow{OQ}+\varepsilon\overrightarrow{OS}\quad\delta,\varepsilon\in R\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\pi'\equiv(x,y,z)=(0,0,0)+\delta(-2,0,1)+\varepsilon(6,2,2)\Rightarrow\begin{cases} x=-2\delta+6\varepsilon\xrightarrow{y=2\varepsilon}x=-2\delta+3y\xrightarrow{\delta=z-y}* \\ y=2\varepsilon \\ z=\delta+2\varepsilon\xrightarrow{y=2\varepsilon}z=\delta+y\rightarrow\delta=z-y\end{cases}$$

$$*\rightarrow x=-2z+5y\Rightarrow\pi'\equiv x-5y+2z=0$$

$$\boxed{t\equiv\begin{cases} 4x+2y-z=0 \\ x-5y+2z=0\end{cases}}$$

Si queremos representar la recta de todas las formas posibles resolvemos el sistema anterior:

$$t\equiv\begin{cases} 4x+2y-z=0 \\ x-5y+2z=0\end{cases}\xrightarrow{z=\mu}t\equiv\begin{cases} 4x+2y-\mu=0\xrightarrow{x=5y-2\mu}4\cdot(5y-2\mu)+2y-\mu=0\rightarrow* \\ x-5y+2\mu=0\rightarrow x=5y-2\mu\end{cases}$$

$$*\rightarrow20y-8\mu+2y-\mu=0\rightarrow22y-9\mu=0\rightarrow y=\frac{9\mu}{22}\Rightarrow x=5\cdot\frac{9\mu}{22}-2\mu=\frac{45\mu-44\mu}{22}=\frac{\mu}{22}$$

$$\boxed{t\equiv\begin{cases} x=\frac{\mu}{22} \\ y=\frac{9\mu}{22} \\ z=\mu\end{cases}\Rightarrow t\equiv(x,y,z)=\left(\frac{\mu}{22},\frac{9\mu}{22},\mu\right)\Rightarrow t\equiv\begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{t}=\left(\frac{1}{22},\frac{9}{22},1\right)\end{cases}\Rightarrow t\equiv22x=\frac{22y}{9}=z}$$

b) Determinar la mínima distancia entre las rectas r y s.

Consideraremos el plano π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s, para ello debe contener al punto P y a los vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$, cuyo vector director sería $\vec{n}=\vec{r}\times\vec{s}$:

$$\pi \equiv \begin{cases} P(0,-1,-2) \\ \vec{r} = (-1,1,-2) \\ \vec{s} = (6,2,2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z+2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= x \cdot 1 \cdot 1 + (y+1) \cdot (-2) \cdot 3 + (z+2) \cdot (-1) \cdot 1 - (z+2) \cdot 1 \cdot 3 - (y+1) \cdot (-1) \cdot 1 - x \cdot 1 \cdot (-2) =$$

$$= x + 2x - 6 \cdot (y+1) + (y+1) - (z+2) - 3 \cdot (z+2) = 3x - 5 \cdot (y+1) - 4 \cdot (z+2) = 3x - 5y - 5 - 4z - 8 =$$

$$= 3x - 5y - 4z - 13 = 0$$

A continuación consideraremos una recta v perpendicular a π y que corte a la recta s en el punto Q, por ello estará definida por vector $\vec{v} = (3,-5,-4)$ y el mismo punto Q:

$$v \equiv \begin{cases} Q(-2,0,1) \\ \vec{v} = (3,-5,-4) \end{cases} \Rightarrow v \equiv \begin{cases} x = -2 + 3\sigma \\ y = -5\sigma \\ z = 1 - 4\sigma \end{cases} \quad \text{con } \sigma \in R$$

Ahora consideraremos el punto Q' , proyección de Q sobre el plano π , es decir, intersección de la recta v y el plano π :

$$Q' \equiv \begin{cases} v \equiv (x,y,z) = (-2,0,1) + \sigma \cdot (3,-5,-4) \\ \pi \equiv 3x - 5y - 4z - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3 \cdot (-2 + 3\sigma) - 5 \cdot (-5\sigma) - 4 \cdot (1 - 4\sigma) - 13 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -6 + 9\sigma + 25\sigma - 4 + 16\sigma - 13 = 0 \rightarrow 50\sigma - 23 = 0 \rightarrow 50\sigma = 23 \rightarrow \sigma = \frac{23}{50} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q'\left(-2 + 3 \cdot \frac{23}{50}, 5 \cdot \frac{23}{50}, 1 - 4 \cdot \frac{23}{50}\right) = Q'\left(\frac{-100+69}{50}, \frac{115}{50}, \frac{50-92}{50}\right) = Q'\left(\frac{-31}{50}, \frac{115}{50}, \frac{-42}{50}\right)$$

$$d(r,s) = d(\pi, s) = d(\pi, Q) = d(Q', Q) = \left|\overrightarrow{Q'Q}\right| = |Q - Q'| = \left|(-2,0,1) - \left(\frac{-31}{50}, \frac{115}{50}, \frac{-42}{50}\right)\right| =$$

$$= \left|\left(-2 + \frac{31}{50}, 0 - \frac{115}{50}, 1 + \frac{42}{50}\right)\right| = \left|\left(\frac{-100+31}{50}, -\frac{115}{50}, \frac{50+42}{50}\right)\right| = \left|\left(\frac{-69}{50}, -\frac{115}{50}, \frac{92}{50}\right)\right| =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-69}{50}\right)^2 + \left(-\frac{115}{50}\right)^2 + \left(\frac{92}{50}\right)^2} = \sqrt{\frac{4761}{2500} + \frac{13225}{2500} + \frac{8464}{2500}} = \sqrt{\frac{26450}{2500}} = \sqrt{\frac{2645}{250}} =$$

$$= \sqrt{\frac{529}{50}} = \frac{\sqrt{529}}{\sqrt{50}} = \frac{23}{\sqrt{25 \cdot 2}} = \frac{23}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{2}} = \frac{23}{5\sqrt{2}}$$

$$\boxed{d(r,s) = \frac{23}{5\sqrt{2}}}$$

2. Dados los puntos A (2, 2, 3) y B (0, -2, 1) , hallar el punto, o los puntos, de la recta $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$ que equidistan de A y B.

$P(x,y,z) \in r$

$$r \equiv \begin{cases} Q(2,0,4) \\ \vec{r}(3,-1,2) \end{cases} \Rightarrow r \equiv (x,y,z) = (2,0,4) + \lambda \cdot (3,-1,2) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}$$

$P(\ 2+3\lambda, -\lambda, 4+2\lambda) \in r$

$\text{dist}\left(\overrightarrow{AP}\right) = \left|\overrightarrow{AP}\right| = |\ (3\lambda, -2-\lambda, 1+2\lambda)\ | = \sqrt{(3\lambda)^2 + (-2-\lambda)^2 + (1+2\lambda)^2} =$
$= \sqrt{9\lambda^2 + \lambda^2 + 4\lambda + 4 + 4\lambda^2 + 4\lambda + 1} = \sqrt{14\lambda^2 + 8\lambda + 5}$

$\text{dist}\left(\overrightarrow{BP}\right) = \left|\overrightarrow{BP}\right| = |\ (2+3\lambda, 2-\lambda, 3+2\lambda)\ | = \sqrt{(2+3\lambda)^2 + (2-\lambda)^2 + (3+2\lambda)^2} =$
$= \sqrt{9\lambda^2 + 12\lambda + 4 + \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 4\lambda^2 + 12\lambda + 9} = \sqrt{14\lambda^2 + 20\lambda + 17}$

$\text{dist}\left(\overrightarrow{AP}\right) = \text{dist}\left(\overrightarrow{BP}\right) \Rightarrow \sqrt{14\lambda^2 + 8\lambda + 5} = \sqrt{14\lambda^2 + 20\lambda + 17} \Rightarrow 14\lambda^2 + 8\lambda + 5 = 14\lambda^2 + 20\lambda + 17 \Rightarrow$
$\Rightarrow 14\lambda^2 - 14\lambda^2 + 8\lambda - 20\lambda = 17 - 5 \Rightarrow -12\lambda = 12 \Rightarrow \lambda = \dfrac{12}{-12} = -1$

$$\boxed{P(\ -1\ , 1\ , 2\ )}$$

3. Determine razonadamente si el plano que pasa por los puntos (0 , 0 , 1) , (1 , 1 , -1) y (2 , -1 , 0) tiene o no puntos en común con el plano que pasa por los puntos (3, 2 , -4) , (-3 , -3 , 7) y (2 , 2 , -3).

$$\pi \equiv \begin{cases} P(\ 0,0,1) \\ Q(\ 1,1,-1) \\ R(\ 2,-1,0) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} P(\ 0,0,1) \\ \overrightarrow{PQ} = (\ 1,1,-2\ ) \\ \overrightarrow{PR} = (\ 2,-1,-1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv (x, y, z) = (\ 0,0,1) + \alpha \cdot (\ 1,1,-2\ ) + \beta \cdot (\ 2,-1,-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = \alpha - \beta \\ z = 1 - 2\alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \to \pi \equiv -x - 4y - (z-1) - 2\cdot(z-1) + y - 2x =$$

$$= -3x - 3y - z + 1 - 2z + 2 = -3x - 3y - 3z + 3 = 0 \to x + y + z - 1 = 0 \to \vec{n} = (\ 1,1,1)$$

$$\pi \equiv \begin{cases} S(\ 3,\ 2,-4\ ) \\ T(\ -3,-3,7\ ) \\ U(\ 2,2,-3) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} S(\ 3,2,-4\ ) \\ \overrightarrow{ST} = (-6,-5\ ,11) \\ \overrightarrow{SU} = (-1\ ,0\ ,1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv (x, y, z) = (3,2,-4\ ) + \alpha \cdot (-6,-5,11) + \beta \cdot (-1,0,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} x = 3 - 6\alpha - \beta \\ y = -2 - 5\alpha \\ z = 4 + 11\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+4 \\ -6 & -5 & 11 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to$$

$$\to \pi \equiv -5\cdot(x-3) - 11\cdot(y-2) + 0\cdot(z+4) - 5\cdot(z+4) + 6\cdot(y-2) - 0\cdot(x-3) =$$
$$= -5x + 15 - 11y + 22 - 5z - 20 + 6y - 12 = -5x - 5y - 5z + 5 = 0 \to x + y + z - 1 = 0 \to \vec{n'} = (\ 1\ ,1\ ,1)$$

$$\text{planos} \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \to \begin{cases} \pi \equiv x + y + z - 1 = 0 \\ \pi' \equiv x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Posición relativa de dos planos}\begin{cases}\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}=\dfrac{D}{D'}\rightarrow \text{planos coincidentes}\\ \dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}\neq\dfrac{D}{D'}\rightarrow \text{planos paralelos}\\ \dfrac{A}{A'}\neq\dfrac{B}{B'}\text{ ó }\dfrac{A}{A'}\neq\dfrac{C}{C'}\rightarrow \text{planos que se cortan una recta r}\end{cases}$$

$$\boxed{\text{Posición relativa de }\pi\text{ y }\pi'\rightarrow\frac{1}{1}=\frac{1}{1}=\frac{1}{1}=\frac{-1}{-1}=1\rightarrow\pi\text{ y }\pi'\text{ son coincidentes}}$$

4. Dado el plano $\pi\equiv 5x-4y+z=0$ y la recta $r: x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ contenida en π, obtener la recta s contenida en π que es perpendicular a r y que pasa por el origen de coordenadas.

$$\pi\equiv 5x-4y+z=0\longrightarrow\vec{n}=(5,-4,1)\qquad r\equiv x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}O(0,0,0)\\ \vec{r}=(1,2,3)\end{cases}$$

$$s\equiv\begin{Bmatrix}s\in\pi\longrightarrow\vec{s}\perp\vec{n}\\ s\perp r\longrightarrow\vec{s}\perp\vec{r}\end{Bmatrix}\vec{s}=\vec{r}\times\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&3\\5&-4&1\end{vmatrix}=2\vec{i}+15\vec{j}-4\vec{k}-10\vec{k}-\vec{j}+12\vec{i}=(14,14,-14)\equiv(1,1,-1)$$

$$\boxed{s\equiv\begin{cases}O(0,0,0)\\ \vec{s}=(1,1,-1)\end{cases}\Rightarrow s\equiv x=y=-z}$$

5. Obtener la mínima distancia entre dos partículas A y B cuyas posiciones vienen dadas por $(x_A,y_A,z_A)=t(1,2,0)$ y $(x_B,y_B,z_B)=(2,-4,7)+t(-2,3,0)$ siendo t el tiempo en segundos.

Calcular la mínima distancia entre las rectas $r\equiv(x,y,z)=t(1,2,0)$ y $s\equiv(x,y,z)=(2,-4,7)+t(-2,3,0)$.

Justificar la no coincidencia de los dos resultados anteriores.

$$d(t)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=|[(2,-4,7)+t\cdot(-2,3,0)]-t\cdot(1,2,0)|=|(2,-4,7)+t\cdot(-2,3,0)-t\cdot(1,2,0)|=$$

$$=|(2,-4,7)+t\cdot(-2,3,0)+t\cdot(-1,-2,0)|=|(2,-4,7)+t\cdot(-3,1,0)|=|(2-3t,-4+t,7)|=$$

$$=\sqrt{(2-3t)^2+(-4+t)^2+7^2}=\sqrt{9t^2-12t+4+t^2-8t+16+49}=\sqrt{10t^2-20t+69}=\left(10t^2-20t+69\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d'(t)=\frac{1}{2}\cdot\left(10t^2-20t+69\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(20t-20)=\frac{20t-20}{2\cdot\sqrt{10t^2-20t+69}}=0\rightarrow 20t-20=0\rightarrow 20t=20\rightarrow t=1$$

$$\boxed{d_{min}\left(\overline{AB}\right)=d(1)=\sqrt{10\cdot 1^2-20\cdot 1+69}=\sqrt{10-20+69}=\sqrt{59}\approx 7'681}$$

$$r\equiv\begin{cases}P(0,0,0)\\ \vec{r}=(1,2,0)\end{cases}\quad,\quad s\equiv\begin{cases}Q(2,-4,7)\\ \vec{s}=(-2,3,0)\end{cases}\ \text{y}\ \overrightarrow{PQ}=(2,-4,7)$$

$$\text{dist}(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ},\vec{r},\vec{s}\right]\right|}{\left|\vec{r}\times\vec{s}\right|}=\frac{\left|\begin{vmatrix}2&-4&7\\1&2&0\\-2&3&0\end{vmatrix}\right|}{\left|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&0\\-2&3&0\end{vmatrix}\right|}=\frac{|0+0+21+28-0-0|}{\left|0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}+4\cdot\vec{k}-0\cdot\vec{j}-0\cdot\vec{i}\right|}=\frac{49}{|(0,0,7)|}=\frac{49}{\sqrt{49}}=7$$

Ambos resultados no coinciden porque la distancia mínima entre dos puntos que se mueven sobre dos rectas que se cruzan no tiene por qué coincidir con la distancia mínima entre las rectas.

6. Dados el plano $\pi\equiv x+2y-z=2$, la recta $r\equiv\frac{x-3}{2}=y-2=\frac{z-5}{4}$ y el punto $P(-2,3,2)$, perteneciente al plano π, se pide:

c) Determinar la posición relativa de π y r.

$$\pi\equiv x+2y-z=2\rightarrow\pi\equiv x+2y-z-2=0\rightarrow\vec{n}=(1,2,-1)$$

$$r\equiv\frac{x-3}{2}=y-2=\frac{z-5}{4}\rightarrow r\equiv\begin{cases}A(3,2,5)\\\vec{r}=(2,1,4)\end{cases}\Rightarrow r\equiv(3,2,5)+\lambda\cdot(2,1,4)\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=3+2\lambda\\y=2+\lambda\\z=5+4\lambda\end{cases}$$

$$(3+2\lambda)+2\cdot(2+\lambda)-(5+4\lambda)-2=0\rightarrow 3+2\lambda+4+2\lambda-5-4\lambda-2=0+0\lambda=0\rightarrow r\subset\pi$$

La recta r está contenida en el plano π.

d) Calcular la ecuación de la recta t contenida en π, que pasa por el punto P y que corta perpendicularmente a r.

$$\vec{t}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&-1\\2&1&4\end{vmatrix}=8\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}-4\vec{k}-4\vec{j}+\vec{i}=9\vec{i}-6\vec{j}-3\vec{k}\equiv(-3,2,1)$$

$$t\equiv\begin{cases}P(-2,3,2)\\\vec{t}=(-3,2,1)\end{cases}\Rightarrow t\equiv(-2,3,2)+\gamma\cdot(-3,2,1)\Rightarrow t\equiv\begin{cases}x=-2-3\gamma\\y=3+2\gamma\\z=2+\gamma\end{cases}$$

$$\boxed{t\equiv\frac{x+2}{-3}=\frac{y-3}{2}=z-2}$$

e) Sea Q el punto de intersección de r y t. Si s es la recta perpendicular al plano π y que contiene a P, y R es un punto cualquiera de s, probar que la recta determinada por R y Q es perpendicular a r.

$$Q\begin{cases}3+2\lambda=-2-3\gamma\\2+\lambda=3+2\gamma\xrightarrow{\gamma=4\lambda+3}2+\lambda=3+2\cdot(4\lambda+3)\rightarrow 2+\lambda=3+8\lambda+6=8\lambda+9\rightarrow-7\lambda=7\rightarrow\lambda=-1\\5+4\lambda=2+\gamma\rightarrow\gamma=4\lambda+3\end{cases}$$

$$Q\begin{cases}x=3+2\cdot(-1)=3-2=1\\y=2+(-1)=2-1=1\\z=5+4\cdot(-1)=5-4=1\end{cases}\Rightarrow Q(1,1,1)$$

$$s \equiv \begin{cases} P(-2,3,2) \\ \vec{s}=\vec{n}=(1,2,-1) \end{cases} \Rightarrow s \equiv (-2,3,2)+\delta\cdot(1,2,-1) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=-2+\delta \\ y=3+2\delta \\ z=2-\delta \end{cases}$$

$$R \in s \rightarrow R(-2+\delta, 3+2\delta, 2-\delta)$$

$$\overrightarrow{RQ} \equiv \begin{cases} Q(1,1,1) \\ R(-2+\delta, 3+2\delta, 2-\delta) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{RQ} = (3-\delta, -2-2\delta, -1+\delta)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \overrightarrow{RQ} \perp r \leftrightarrow \overrightarrow{RQ} \perp \vec{r} \leftrightarrow \overrightarrow{RQ}\cdot\vec{r}=0 \rightarrow (3-\delta, -2-2\delta, -1+\delta)\cdot(2,1,4)= \\ =2\cdot(3-\delta)+(-2-2\delta)+4\cdot(-1+\delta)=6-2\delta-2-2\delta-4+4\delta=0-0\delta=0 \Rightarrow \overrightarrow{RQ} \perp r \end{array}}$$

7. Dados el punto $P(1,-1,2)$ y el plano $\pi \equiv 2x-y+z-11=0$, se pide:

a) Determinar el punto Q de intersección del plano π con la recta perpendicular a π que pasa por P. Hallar el punto R simétrico del punto P respecto del plano π.

$$r \equiv \begin{cases} P(1,-1,2) \\ \vec{r} \equiv \vec{n}=(2,-1,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv (1,-1,2)+\lambda\cdot(2,-1,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x= 1+2\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z= 2+\lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=z-2$$

$$Q \in r \leftrightarrow 2\cdot(1+2\lambda)-(-1-\lambda)+(2+\lambda)-11=0 \rightarrow 2+4\lambda+1+\lambda+2+\lambda-11=0 \rightarrow 6\lambda-6=0 \rightarrow \lambda=1$$

$$Q\begin{cases} x= 1+2\cdot 1=1+2=3 \\ y=-1-1=-2 \\ z=2+1=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q(3,-2,3)}$$

$$\overrightarrow{PQ}=(2,-1,1) \longrightarrow dist\left(\overrightarrow{PQ}\right)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}\approx 2'45$$

$$\overrightarrow{RQ}=(2-2\lambda, -1+\lambda, 1-\lambda) \rightarrow dist\left(\overrightarrow{RQ}\right)=\left|\overrightarrow{RQ}\right|=\sqrt{(2-2\lambda)^2+(-1+\lambda)^2+(1-\lambda)^2}=\sqrt{6} \rightarrow$$

$$\rightarrow (2-2\lambda)^2+(-1+\lambda)^2+(1-\lambda)^2=6 \rightarrow 4\lambda^2-8\lambda+4+\lambda^2-2\lambda+1+\lambda^2-2\lambda+1-6=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 6\lambda^2-12\lambda=0 \rightarrow \lambda^2-2\lambda=0 \rightarrow \lambda\cdot(\lambda-2)=0 \rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ \lambda-2=0 \rightarrow \lambda=2 \end{cases}$$

$$R\begin{cases} x= 1+2\cdot 2=1+4=5 \\ y=-1-2=-3 \\ z=2+2=4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{R(5,-3,4)}$$

b) Obtener la ecuación del plano paralelo al plano π que contiene al punto H que se encuentra a $5\sqrt{6}$ unidades del punto P en el sentido del vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{HQ}=(2-2\lambda, -1+\lambda, 1-\lambda) \rightarrow dist\left(\overrightarrow{HQ}\right)=\left|\overrightarrow{HQ}\right|=\sqrt{(2-2\lambda)^2+(-1+\lambda)^2+(1-\lambda)^2}=4\sqrt{6}=\sqrt{96} \rightarrow$$

$$\rightarrow (2-2\lambda)^2+(-1+\lambda)^2+(1-\lambda)^2=96 \rightarrow 4\lambda^2-8\lambda+4+\lambda^2-2\lambda+1+\lambda^2-2\lambda+1-96=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 6\lambda^2-12\lambda-90=0 \rightarrow \lambda^2-2\lambda-15=0 \rightarrow \lambda=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-15)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{2\pm 8}{2}=1\pm 4 \begin{cases} \lambda_1=5 \\ \lambda_2=-3 \end{cases}$$

$$H\begin{cases} x= 1+2\cdot 5=1+10=11 \\ y=-1-5=-6 \\ z=2+5=7 \end{cases} \Rightarrow H(11,-6,7)$$

$$H\begin{cases} x= 1+2\cdot(-3)=1-6=-5 \\ y=-1-(-3)=-1+3=2 \\ z=2+(-3)=2-3=-1 \end{cases} \Rightarrow H(-5,2,-1)$$

Si tenemos dos puntos H, ¿cuál es el verdadero? Pues será aquél cuya distancia al punto P sea de $5\sqrt{6}$:

a. Si H (11, -6 , 7) :

$$dist\left(\overline{HP}\right)=\left|\overrightarrow{HP}\right|=\sqrt{(-10)^2+5^2+(-5)^2}=\sqrt{100+25+25}=\sqrt{150}=\sqrt{25\cdot 6}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{6}=5\sqrt{6}$$

b. Si H (-5 , 2 , -1) :

$$dist\left(\overline{HP}\right)=\left|\overrightarrow{HP}\right|=\sqrt{6^2+(-3)^2+3^2}=\sqrt{36+9+9}=\sqrt{54}=\sqrt{9\cdot 6}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{6}=3\sqrt{6}$$

$$\boxed{H(11,-6,7}$$

$$H\in\pi'\leftrightarrow 2\cdot 11-(-6)+7+D=0\rightarrow 22+6+7+D=0\rightarrow 35+D=0\rightarrow D=-35$$

$$\boxed{\pi'\equiv 2x-y+z-35=0}$$

8. Dadas las rectas:

$$r:\begin{cases} x-ay=2 \\ ay+z=1 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x-z=1 \\ y+z=3 \end{cases}$$

Se pide:

a) Discutir su posición relativa según los valores del parámetro a.

$$r\equiv\begin{cases} x-ay=2\xrightarrow{y=\frac{1-\lambda}{a}}x-a\cdot\dfrac{1-\lambda}{a}=2\rightarrow x-(1-\lambda)=2\rightarrow x-1+\lambda=2\rightarrow x=3-\lambda \\ ay+z=1\xrightarrow{z=\lambda}ay+\lambda=1\rightarrow ay=1-\lambda\rightarrow y=\dfrac{1-\lambda}{a} \end{cases}$$

$$r\equiv\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a}\cdot\lambda \\ z=\lambda \end{cases}\Rightarrow r\equiv\left(3,\frac{1}{a},0\right)+\lambda\cdot\left(-1,-\frac{1}{a},1\right)\Rightarrow r\equiv\begin{cases} P\left(3,\dfrac{1}{a},0\right) \\ \vec{r}=\left(-1,-\dfrac{1}{a},1\right) \end{cases}\Rightarrow r\equiv\frac{x-3}{-1}=\frac{y-\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a}}=z$$

$$s\equiv\begin{cases} x-z=1\xrightarrow{z=\lambda}x=1+\lambda \\ y+z=3\xrightarrow{z=\lambda}y=3-\lambda \end{cases}$$

$$s\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}\Rightarrow s\equiv(1,3,0)+\lambda\cdot(1,-1,1)\Rightarrow s\equiv\begin{cases} Q(1,3,0) \\ \vec{s}=(1,-1,1) \end{cases}\Rightarrow s\equiv x-1=\frac{y-3}{-1}=z$$

- Si $a=0\rightarrow\vec{r}\equiv\begin{cases} x=2 \\ z=1 \end{cases}$:

$$2-1=\frac{y-3}{-1}=1\rightarrow y-3=-1\rightarrow y=3-1=2\rightarrow r\cap s=R(2,2,1)$$

- Si $a\neq 0\rightarrow \overrightarrow{PQ}=\left(-2,3-\frac{1}{a},0\right)$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3-\frac{1}{a} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{a} & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{2}{a}+\left(3-\frac{1}{a}\right)+0-0-2+\left(3-\frac{1}{a}\right)=\frac{2}{a}+3-\frac{1}{a}-2+3-\frac{1}{a}=4\neq 0\rightarrow \nexists r\cap s$$

<u>Si a = 0 ambas rectas se cortan en el punto R (2 , 2 , 1) y si a tiene otro valor distinto se cruzan sin cortarse.</u>

b) Si a = 1, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r y s.

$$r\equiv\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}\Rightarrow r\equiv(3,1,0)+\lambda\cdot(-1,-1,1)\Rightarrow r\equiv\begin{cases} P(3,1,0) \\ \vec{r}=(-1,-1,1) \end{cases}\Rightarrow r\equiv\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{-1}=z$$

Hay dos métodos para hallar la distancia mínima entre ambas rectas:

1º) (CON FÓRMULA):

$$\overrightarrow{QP}=(2,-2,0)$$

$$\text{dist}(r,s)=\text{dist}(P,s)=\frac{\left|\overrightarrow{QP}\times\vec{r}\right|}{\left|\vec{r}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1\end{matrix}\right\|}{|(-1,-1,1)|}=\frac{\left|-2\cdot\vec{i}+0-2\cdot\vec{k}-2\cdot\vec{k}-2\cdot\vec{j}-0\right|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{\left|-2\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}-4\cdot\vec{k}\right|}{\sqrt{1+1+1}}=$$

$$=\frac{|(-2,-2,-4)|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-4)^2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4+4+16}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3\cdot 8}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt{3}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

2º) (SIN FÓRMULA):

$$\left.\begin{matrix}\pi\perp r \\ P\in\pi\end{matrix}\right\}\pi\equiv\begin{cases} P(3,1,0) \\ \vec{n}=\vec{r}=(-1,-1,1)\end{cases}\Rightarrow \pi\equiv -x-y+z+D=0\rightarrow -3-1+0+D=0\rightarrow D=4\rightarrow \pi\equiv -x-y+z+4=0$$

$$P'=\pi\cap s\rightarrow -(1+\lambda)-(3-\lambda)+\lambda+4=0\rightarrow -1-\lambda-3+\lambda+\lambda+4=0\rightarrow\lambda=0\rightarrow P'(1,3,0)\equiv Q$$

$$\text{dist}(r,s)=\text{dist}(P,P')=\left|\overrightarrow{PP'}\right|=|(-2,2,0)|=\sqrt{(-2)^2+2^2+0^2}=\sqrt{4+4+0}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

<u>La distancia entre la recta r y la recta s es de $2\sqrt{2}$.</u>

9. Los planos $\pi\equiv x+y+z=4$, $\pi'\equiv x-z=0$, $\pi''\equiv x+y=3$ tienen un único punto en común. Se pide:

a) Determinarlo.

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x \quad -z=0 \\ x+y \quad =3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_3]{-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+y+\ z=4 \\ \quad y+2z=4 \\ \quad\quad z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+\ z=4 \xrightarrow[z=1]{y=2} x+2+1=4 \longrightarrow x+3=4 \longrightarrow x=4-3=1 \\ \quad y+2z=4 \xrightarrow{z=1} y+2=4 \longrightarrow y=4-2=2 \\ \quad\quad z=1 \end{cases}$$

$$\boxed{P(1,2,1)}$$

b) Hallar las ecuaciones de las rectas en que cada uno de esos planos corta a x = 0.

Sea $\pi''' \equiv x=0$:

$$r=\pi\cap\pi'''\to r\equiv\begin{cases}\pi\equiv x+y+z=4\\ \pi'''\equiv x=0\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}y+z=4\xrightarrow{z=\lambda} y=4-\lambda\\ x=0\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=0\\ y=4-\lambda\Rightarrow\\ z=\quad\lambda\end{cases}$$

$$\Rightarrow r\equiv(0,4,0)+\lambda\cdot(0,-1,1)$$

$$r'=\pi'\cap\pi'''\to r'\equiv\begin{cases}x-z=0\\ x=0\end{cases}\Rightarrow r'\equiv\begin{cases}z=0\\ x=0\end{cases}\Rightarrow r'\equiv\begin{cases}x=0\\ y=\gamma\Rightarrow r'\equiv(0,0,0)+\gamma\cdot(0,1,0)\\ z=0\end{cases}$$

$$r''=\pi''\cap\pi'''\to r''\equiv\begin{cases}x+y=3\\ x=0\end{cases}\Rightarrow r''\equiv\begin{cases}y=3\\ x=0\end{cases}\Rightarrow r''\equiv\begin{cases}x=0\\ y=3\Rightarrow r''\equiv(0,3,0)+\delta\cdot(0,0,1)\\ z=\delta\end{cases}$$

c) Volumen del tetraedro limitado por esos tres planos y el plano x = 0.

Los cuatro vértices del tetraedro serán las intersecciones de los planos. Puesto que uno de los planos es x = 0, tres de los vértices del tetraedro estarán incluidos en dicho plano y serán las intersecciones de las rectas halladas en el apartado anterior:

$$A\begin{cases} r\equiv\begin{cases}y+z=4\\ x=0\end{cases}\\ r'\equiv\begin{cases}z=0\\ x=0\end{cases}\end{cases}\Rightarrow A\begin{cases}x=0\\ y=4\\ z=0\end{cases}\Rightarrow A(0,4,0)$$

$$B\begin{cases} r'\equiv\begin{cases} z=0\\ x=0\end{cases}\\ r''\equiv\begin{cases} y=3\\ x=0\end{cases}\end{cases}\Rightarrow B\begin{cases} x=0\\ y=3\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\ B(0,3,0)$$

$$C\begin{cases} r''\equiv\begin{cases} y=3\\ x=0\end{cases}\\ r\equiv\begin{cases} y+z=4\\ x=0\end{cases}\end{cases}\Rightarrow C\begin{cases} x=0\\ y=3\\ z=1\end{cases}\Rightarrow\ C(0,3,1)$$

El cuarto vértice será la intersección de los tres planos del apartado a), es decir P (1 , 2, 1).

El volumen del tetraedro viene determinado por los vectores entre vértices:

$$V=\left|\frac{1}{6}\cdot\left[\overrightarrow{PC}\cdot\left(\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}\right)\right]\right|=\left|\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{6}\cdot(1+1+0-0-2-1)\right|=\left|\frac{1}{6}\cdot(-1)\right|=\left|-\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}u^3$$

10. Dados los puntos A (0 , 0 , 1) , B (1 , 0 , -1) , C (0 , 1 , 2) y D (1 , 2 , 0) , se pide:

a) Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.

Quedará demostrado si demostramos que los cuatro puntos son los vértices de un tetraedro de volumen distinto de 0.

$$V=\left|\frac{1}{6}\cdot\left[\overrightarrow{DC}\cdot\left(\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB}\right)\right]\right|=\left|\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2\\ -1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -1\end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{6}\cdot(-2+0+4-0-2+1)\right|=\left|\frac{1}{6}\cdot 1\right|=\left|\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}u^3\neq 0$$

<u>Queda demostrado que los cuatro puntos no son coplanarios porque son los vértices de un tetraedro de volumen distinto a 0.</u>

b) Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A , B y C.

$$\pi\equiv\begin{cases} A(0,0,1)\\ B(1,0,-1)\\ C(0,1,2)\end{cases}\Rightarrow\pi\equiv\overrightarrow{AX}=\alpha\cdot\overrightarrow{AB}+\beta\cdot\overrightarrow{AC}\Rightarrow\pi\equiv(x-0,y-0,z-1)=\alpha\cdot(1,0,-2)+\beta\cdot(0,1,1)\rightarrow$$

$$\rightarrow\pi\equiv(x,y,z)=(0,0,1)+\alpha\cdot(1,0,-2)+\beta\cdot(0,1,1)\Rightarrow\pi\equiv\begin{cases} x=\alpha\\ y=\beta\\ z=1-2\alpha+\beta\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\pi\equiv\begin{vmatrix} x & y & z-1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\rightarrow\pi\equiv 0+0+(z-1)-0-y+2x=0\rightarrow\pi\equiv 2x-y+z-1=0$$

c) Hallar la distancia del punto D al plano π.

$$\pi \equiv 2x - y + z - 1 = 0 \rightarrow \pi \equiv \begin{cases} A(0,0,1) \\ \vec{n} = (2,-1,1) \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} D(1,2,0) \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (2,-1,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv (1,2,0) + \lambda \cdot (2,-1,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} -x+1 = 2y-4 \\ y-2 = -z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x+2y-5 = 0 \\ y+z-2 = 0 \end{cases}$$

$$D'\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y = 5 \\ y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{2 \cdot F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{5 \cdot F_3 - F_2}$$

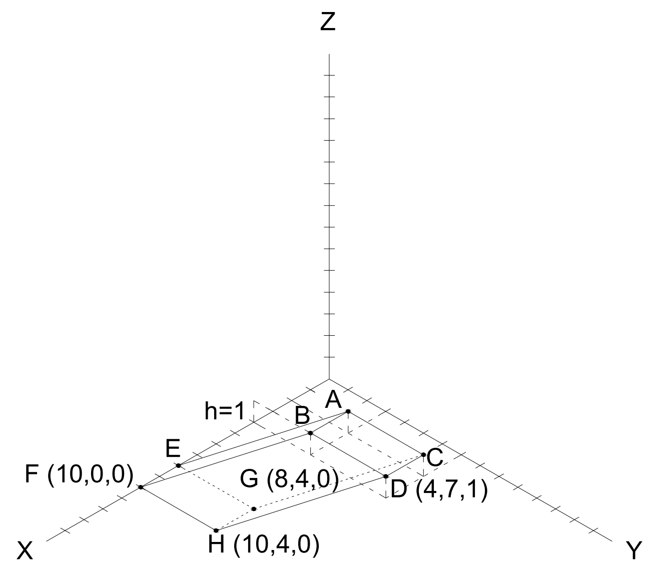
$$\xrightarrow{5 \cdot F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow D'\begin{cases} 2x - y + z = 1 \xrightarrow{y = \frac{11}{6}\ ,\ z = \frac{1}{6}} 2x - \frac{11}{6} + \frac{1}{6} = 1 \rightarrow x = \frac{4}{3} \\ 5y - z = 9 \xrightarrow{z = \frac{1}{6}} 5y - \frac{1}{6} = 9 \rightarrow 5y = \frac{55}{6} \rightarrow y = \frac{11}{6} \\ 6z = 1 \rightarrow z = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$D' = \left(\frac{4}{3}, \frac{11}{6}, \frac{1}{6}\right) \rightarrow \overrightarrow{DD'} = \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

$$\boxed{\text{dist}(D, \pi) = \text{dist}(D, D') = \left|\overrightarrow{DD'}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{1}{6}}\ u \approx 0'408\ u}$$

11. Las bases de un paralelelípido son ABCD y EFGH, donde A = (2 , 3 , 1) , B = (4 , 3 , 1) , C (2 , 7 , 1) y E = (8 , 0 , 0). Se pide:

a) Coordenadas de D, F, G y H.



b) Volumen del paralelelípido.

$$V = \left| \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE} \right) \right| = \left\| \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & -3 & -1 \end{matrix} \right\| = \left| -8+0+0-0-0-0 \right| = 8\,u^3$$

c) Altura del paralelelípido.

$$V = S \cdot h \rightarrow h = \frac{V}{S}$$

Como las bases son rectangulares:

$$S = \left| \overrightarrow{AB} \right| \cdot \left| \overrightarrow{AC} \right| = \left| (2,0,0) \right| \cdot \left| (0,4,0) \right| = \sqrt{2^2+0^2+0^2} \cdot \sqrt{0^2+4^2+0^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8\,u$$

$$V = S \cdot h \rightarrow h = \frac{V}{S} = \frac{8}{8} = 1u$$

12. Dados el plano $\pi \equiv 3x+2y-z+10=0$ y el punto $P(1,2,3)$, se pide:

a) Ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

$$r \equiv \begin{cases} P(1,2,3) \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (3,2,-1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv (1,2,3) + \lambda (3,2,-1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 2+2\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x-2 = 3y-6 \Rightarrow 2x-3y+4=0 \\ -y+2 = 2z-6 \Rightarrow -y-2z+8=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x-3y+4=0 \\ -y-2z+8=0 \end{cases}$$

b) Hallar el punto Q intersección de π y r.

$$Q=\pi\cap r\Rightarrow Q\begin{cases}3x+2y-z=-10\\2x-3y\qquad=-4\\-y-2z=-8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+2y-z=-10\\2x-3y\qquad=-4\\y+2z=8\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-1&-10\\2&-3&0&-4\\0&1&2&8\end{array}\right)\xrightarrow{3F_2-2F_1}$$

$$\xrightarrow{3F_2-2F_1}\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-1&-10\\0&-13&2&8\\0&1&2&8\end{array}\right)\xrightarrow{13F_3+F_2}\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-1&-10\\0&-13&2&8\\0&0&28&112\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{28}\cdot F_3}\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-1&-10\\0&-13&2&8\\0&0&1&4\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x+2y-z=-10\xrightarrow[z=4]{y=0}3x+2\cdot0-4=-10\rightarrow3x=-10+4=-6\rightarrow x=\dfrac{6}{-3}=-2\\-13y+2z=8\xrightarrow{z=4}-13y+2\cdot4=8\rightarrow-13y+8=8\rightarrow-13y=8-8=0\rightarrow y=0\\z=4\end{cases}$$

$$\boxed{Q(-2,0,4)}$$

c) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY.

$$R=\pi\cap OY\Rightarrow R\begin{cases}3x+2y-z=-10\xrightarrow[z=0]{y=0}3\cdot0+2y-0=-10\rightarrow2y=-10\rightarrow y=\dfrac{-10}{2}=-5\\x=0\\z=0\end{cases}$$

$$\boxed{R(0,-5,0)}$$

d) Hallar el área del triángulo PQR.

$\overrightarrow{PQ}=(1,2,3)-(-2,0,4)=(3,2,-1)$

$\overrightarrow{PR}=(1,2,3)-(0,-5,0)=(1,7,3)$

$$A(PQR)=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{array}{ccc}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&2&-1\\1&7&3\end{array}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\left|6\cdot\vec{i}-\vec{j}+21\cdot\vec{k}-2\cdot\vec{k}-9\cdot\vec{j}+7\cdot\vec{i}\right|=\frac{1}{2}\cdot|(13,-10,19)|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13^3+(-10)^2+19^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{169+100+361}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{630}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{9\cdot70}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{70}=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{70}\approx12'55$$

13. Encontrar la distancia del origen a la recta determinada por la intersección de los planos π_1 y π_2, sabiendo que la ecuación de π_1 es $x+2y+z+4=0$ y que π_2 es el plano que pasa por los puntos $(1,1,1)$, $(1,2,3)$ y $(2,0,0)$.

$$\pi_2 \begin{cases} A(1,1,1) \\ B(1,2,3) \\ C(2,0,0) \end{cases} \Rightarrow \pi_2 \begin{cases} A(1,1,1) \\ \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0,1,2) \times (1,-1,-1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\cdot\vec{j} + 0 - \vec{k} - 0 + 2\cdot\vec{i} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi_2 \begin{cases} A(1,1,1) \\ \vec{n} = (1,2,-1) \end{cases} \Rightarrow \pi_2 \equiv x + 2y - z + D = 0 \rightarrow 1 + 2\cdot 1 - 1 + D = 0 \rightarrow 1 + 2 - 1 + D = 0 \rightarrow D = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_2 \equiv x + 2y - z - 2 = 0$$

$$r \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv x + 2y + z + 4 = 0 \\ \pi_2 \equiv x + 2y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow r \begin{cases} x + 2y + z = -4 \xrightarrow[z=\lambda]{x=-2y+\lambda-2} -2y + \lambda + 2 + 2y + \lambda = -4 \rightarrow 2\lambda = -6 \rightarrow \lambda = -3 \\ x + 2y - z = \ \ 2 \xrightarrow{z=\lambda} x + 2y - \lambda = \ \ 2 \rightarrow x = -2y + \lambda + 2 \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = -2\cdot\gamma - 3 + 2 = -1 - 2\cdot\gamma \\ y = \gamma \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow r \equiv (-1,0,-3) + \gamma\cdot(-2,1,0) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P(-1,0,-3) \\ \vec{r} = (-2,1,0) \end{cases}$$

1º) (SIN FÓRMULA) :

$$\text{dist}(O,r) = \text{dist}(O,Q) \ / \begin{cases} Q \in r \\ \overrightarrow{OQ} \perp \vec{r} \rightarrow (x,y,z)\cdot(-2,1,0) = 0 \rightarrow -2x + y = 0 \xrightarrow[y=\gamma]{x=-1-2\gamma} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2\cdot(-1-2\cdot\gamma) + \gamma = 0 \rightarrow 2 + 4\cdot\gamma + \gamma = 0 \rightarrow 5\cdot\gamma = -2 \rightarrow \gamma = -\frac{2}{5} \Rightarrow Q\left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -3\right)$$

$$\text{dist}(O,r) = \text{dist}(O,Q) = \left|\overrightarrow{OQ}\right| \equiv \left|\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5},3\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25} + 9} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+4+9\cdot 25}{25}} = \sqrt{\frac{5+225}{25}} = \sqrt{\frac{230}{25}} = \sqrt{\frac{46}{5}} \approx 3'033 \text{ u}$$

2º) (CON FÓRMULA) :

$$\text{dist}(O,r) = \frac{\left|\overrightarrow{OP} \times \vec{r}\right|}{\left|\vec{r}\right|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right\|}{\left|(-2,1,0)\right|} = \frac{\left|0 + 6\cdot\vec{j} - \vec{k} - 0 - 0 + 3\cdot\vec{i}\right|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{\left|(3,6,-1)\right|}{\sqrt{4+1+0}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-1)^2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-1)^2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{9+36+1}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{46}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{46}{5}} \approx 3'033 \text{ u}$$

14. Sea r_1 la recta que pasa por los puntos $A(1,0,2)$ y $B(0,1,3)$. Sea r_2 la recta que pasa por los puntos $C(0,3,0)$ y $D(1,2,1)$. Justificar si r_1 y r_2 se cruzan o no se cruzan. Hallar la distancia entre r_1 y r_2 .

$$r_1 \equiv \begin{cases} A(1,0,2) \\ B(0,1,3) \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} A(1,0,2) \\ \vec{r_1} \equiv \overrightarrow{AB} = (-1,1,1) \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv (1,0,2) + \lambda \cdot (-1,1,1) \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2+\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 \equiv \frac{x-1}{-1} = y = z-2 \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ y-z+2=0 \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} C(0,3,0) \\ D(1,2,1) \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} C(0,3,0) \\ \vec{r}_2 \equiv \overrightarrow{CD} = (1,-1,1) \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv (0,3,0) + \gamma \cdot (1,-1,1) \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = \gamma \\ y = 3-\gamma \\ z = \gamma \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 \equiv x = \frac{y-3}{-1} = z \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x+y-3=0 \\ y+z-3=0 \end{cases}$$

$$P \begin{cases} x+y \quad = 1 \\ y-z = -2 \\ x+y \quad = 3 \\ y+z = 3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x+y \quad = 1 \\ y-z = -2 \\ 0 = 2 \\ y+z = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

<u>Puesto que ambas rectas no tienen ningún punto en común por ser el Sistema Incompatible y que no son paralelas por ser sus vectores distintos y no proporcionales, ambas rectas se cruzan.</u>

El haz de planos de arista r_2 es: $H \equiv x+y-3+\mu \cdot (y+z-3) = 0 \rightarrow H \equiv x + (1+\mu) \cdot y + \mu \cdot z - 3\mu - 3 = 0$

El plano de dicho haz paralelo a r_1 debe ser tal que el producto escalar de sus vectores directores es 0:

$$(-1,1,1) \cdot (1, 1+\mu, \mu) = 0 \rightarrow -1+1+\mu+\mu = 0 \rightarrow 2\mu = 0 \rightarrow \mu = 0$$

$$\pi \equiv x + (1+0) \cdot y + 0 \cdot z - 3 \cdot 0 - 3 = 0 \rightarrow \pi \equiv x + y + 0 - 0 - 3 = 0 \rightarrow \pi \equiv x + y - 3 = 0$$

$$\boxed{\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(A, \pi) = \frac{|1\cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|1+0+0-3|}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \approx 1'414 \text{ u}}$$

15. Dados los puntos P (1, 1 , 3) , Q (0 , 1 , 0) , se pide:

a) Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describir dicho conjunto de puntos.

$$d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = |(-1,0,-3)| = \sqrt{(-1)^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}$$

$$d(P,R) = \left|\overrightarrow{PR}\right| = |(x-1, y-1, z-3)| = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-6z+9} = \sqrt{x^2-2x+y^2-2y+z^2-6z+11}$$

$$d(Q,R) = \left|\overrightarrow{QR}\right| = |(x, y-1, z)| = \sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2-2y+1+z^2} = \sqrt{x^2+y^2-2y+z^2+1}$$

$$d(P,R) = d(Q,R) \rightarrow \sqrt{x^2-2x+y^2-2y+z^2-6z+11} = \sqrt{x^2+y^2-2y+z^2+1} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2-2x+y^2-2y+z^2-6z+11 = x^2+y^2-2y+z^2+1 \rightarrow -2x-2y-6z+11+2y-1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -2x-6z+10 = 0 \rightarrow x+3x-5 = 0$$

<u>El conjunto de puntos R cuya distancia entre P y R es la misma que entre Q y R es el plano perpendicular al segmento PQ por su punto medio (plano mediatriz) de ecuación x + 3z -5 = 0.</u>

b) Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican $\mathbf{d(P,S) = 2\,d(Q,S)}$.

$$r \equiv \begin{cases} P(1,1,3) \\ Q(0,1,0) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P(1,1,3) \\ \vec{r} \equiv \overrightarrow{PQ} = (-1,0,-3) \end{cases} \Rightarrow r \equiv (1,1,3) + \lambda \cdot (-1,0,-3) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 1 \\ z = 3-3\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{z-3}{-3} \rightarrow -3x+3 = -z+3 \rightarrow 3x-z = 0 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 3x-z=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Rightarrow S(1-\lambda, 1, 3-3\lambda) \,/\, \lambda \in IR$$

$$d(P,S) = 2\,d(Q,S) \rightarrow \left|\overrightarrow{PS}\right| = 2\cdot\left|\overrightarrow{QS}\right| \rightarrow \left|(-\lambda, 0, -3\lambda)\right| = 2\cdot\left|(1-\lambda, 0, 3-3\lambda)\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{(-\lambda)^2 + 0^2 + (-3\lambda)^2} = 2\cdot\sqrt{(1-\lambda)^2 + 0^2 + (3-3\lambda)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{\lambda^2 + 0 + 9\lambda^2} = 2\cdot\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 0 + 9\lambda^2 - 18\lambda + 9} \rightarrow \sqrt{10\lambda^2} = 2\cdot\sqrt{10\lambda^2 - 20\lambda + 10} \rightarrow$$

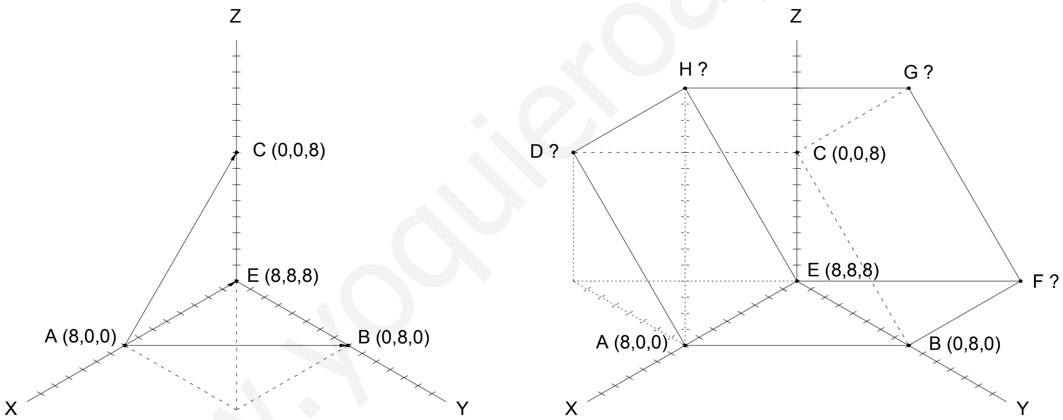
$$\rightarrow 10\lambda^2 = 4\cdot\left(10\lambda^2 - 20\lambda + 10\right) \rightarrow 5\lambda^2 = 2\cdot\left(10\lambda^2 - 20\lambda + 10\right) = 20\lambda^2 - 40\lambda + 20 \rightarrow$$

$$\rightarrow -15\lambda^2 + 40\lambda - 20 = 0 \rightarrow 3\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4\cdot 3\cdot 4}}{2\cdot 3} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{6} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6} = \frac{4 \pm 2}{3} = \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{4+2}{3} = \dfrac{6}{3} = 2 \\[2ex] \lambda_2 = \dfrac{4-2}{3} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{gathered} S_1(1-2, 1, 3-3\cdot 2) = S_1(-1, 1, 3-6) = S_1(-1, 1, -3) \\[1ex] S_2\left(1-\frac{2}{3}, 1, 3-3\cdot\frac{2}{3}\right) = S_2\left(\frac{1}{3}, 1, 3-\frac{6}{3}\right) = S_2\left(\frac{1}{3}, 1, 3-2\right) = S_2\left(\frac{1}{3}, 1, 1\right) \end{gathered}}$$

16. Halla el volumen de un paralelelípedo de bases ABCD y EFGH sabiendo que A = (8 , 0 , 0) , B = (0 , 8 , 0), C = (0 , 0, 8) y E = (8 , 8 , 8). Obtén también las coordenadas de los restantes vértices.



$$V = \left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right)\right| = \left\|\begin{matrix} -8 & 8 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 \end{matrix}\right\| = \left|(-8)\cdot 8\cdot 8\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|-8^3\cdot(0+0+0-0-1-1)\right| =$$

$$= \left|-512\cdot(-2)\right| = \left|1024\right| = 1024\ u^3$$

$$r\equiv\begin{cases}A(8,0,0)\\ \vec{r}\equiv\overrightarrow{BC}=(0,-8,8)\end{cases}\Rightarrow r\equiv(8,0,0)+\lambda\cdot(0,-8,8)\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=8\\ y=-8\lambda\\ z=8\lambda\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=8\\ \dfrac{y}{-8}=\dfrac{z}{8}\end{cases}\to r\equiv\begin{cases}x=8\\ y=-z\end{cases}$$

$$s\equiv\begin{cases}C(8,0,0)\\ \vec{r}\equiv\overrightarrow{BA}=(-8,8,0)\end{cases}\Rightarrow s\equiv(0,0,8)+\gamma\cdot(-8,8,0)\Rightarrow s\equiv\begin{cases}x=-8\gamma\\ y=8\gamma\\ z=8\end{cases}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}\dfrac{x}{-8}=\dfrac{y}{8}\\ z=8\end{cases}\to s\equiv\begin{cases}-y=x\\ z=8\end{cases}$$

$$D=r\cap s\Rightarrow D\begin{cases}x=8\\ y=-z\xrightarrow{z=8}y=-8\\ y=-x\xrightarrow{x=8}y=-8\\ z=8\end{cases}\Rightarrow D(8,-8,8)$$

$$t\equiv\begin{cases}D(8,-8,8)\\ \vec{t}\equiv\overrightarrow{AE}=(0,8,8)\end{cases}\Rightarrow t\equiv(8,-8,8)+\delta\cdot(0,8,8)\Rightarrow t\equiv\begin{cases}x=8\\ y=-8+8\delta\\ z=8+8\delta\end{cases}\Rightarrow t\equiv\begin{cases}x=8\\ \dfrac{y+8}{8}=\dfrac{z-8}{8}\end{cases}$$

$$u\equiv\begin{cases}E(8,8,8)\\ \vec{u}\equiv\overrightarrow{AD}=(0,-8,8)\end{cases}\Rightarrow u\equiv(8,8,8)+\phi\cdot(-8,8,0)\Rightarrow u\equiv\begin{cases}x=8-8\phi\\ y=8+8\phi\\ z=8\end{cases}\Rightarrow u\equiv\begin{cases}x=8\\ \dfrac{y-8}{-8}=\dfrac{z-8}{8}\end{cases}$$

$$H=t\cap u\Rightarrow H\begin{cases}x=8\\ y+8=z-8\to y=z-16\xrightarrow{z=16}y=16-16=0\Rightarrow H(8,0,16)\\ y-8=-z+8\xrightarrow{y=z-16}z-16-8=-z+8\to z-24=-z+8\to 2z=32\to z=16\end{cases}$$

$$v\equiv\begin{cases}E(8,8,8)\\ \vec{v}\equiv\overrightarrow{AB}=(-8,8,0)\end{cases}\Rightarrow v\equiv(8,8,8)+\alpha\cdot(-8,8,0)\Rightarrow v\equiv\begin{cases}x=8-8\alpha\\ y=8+8\alpha\\ z=8\end{cases}\Rightarrow v\equiv\begin{cases}\dfrac{x-8}{-8}=\dfrac{y-8}{8}\\ z=8\end{cases}$$

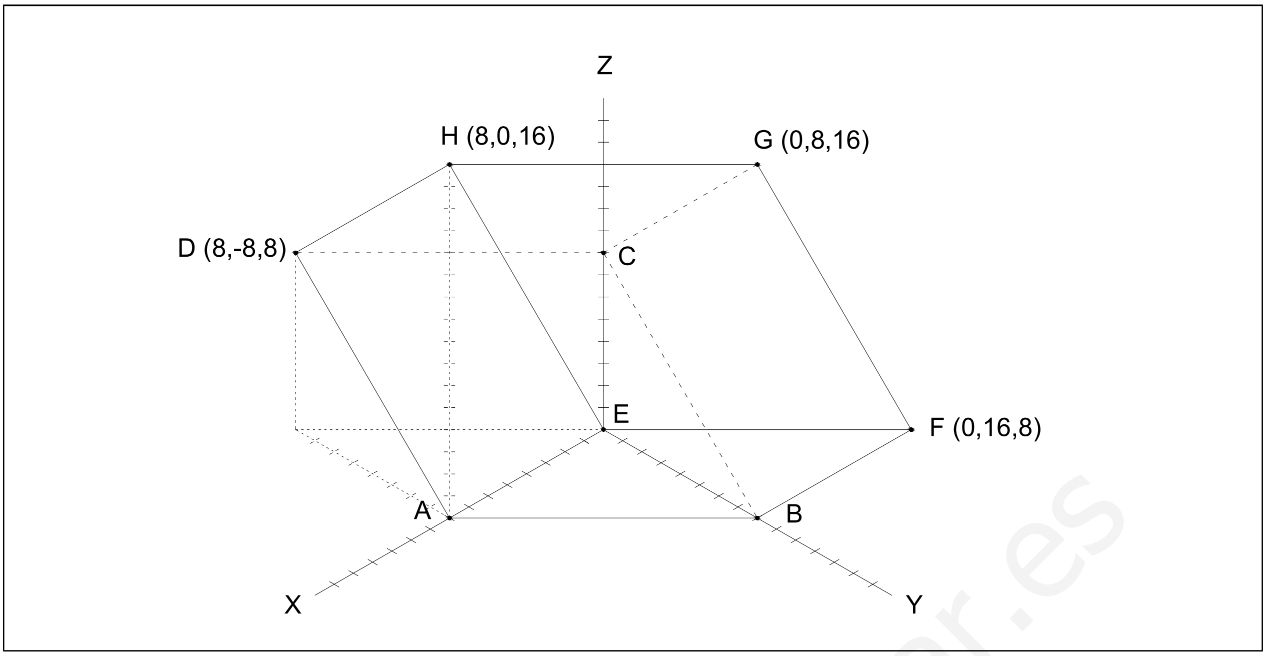
$$w\equiv\begin{cases}B(0,8,0)\\ \vec{w}\equiv\overrightarrow{AE}=(0,8,8)\end{cases}\Rightarrow w\equiv(0,8,0)+\beta\cdot(0,8,8)\Rightarrow w\equiv\begin{cases}x=0\\ y=8+8\beta\\ z=8\beta\end{cases}\Rightarrow w\equiv\begin{cases}x=0\\ \dfrac{y-8}{8}=\dfrac{z}{8}\end{cases}$$

$$F=v\cap w\Rightarrow F\begin{cases}x=0\\ y-8=z\xrightarrow{z=8}y-8=8\to y=8+8=16\\ x-8=-y+8\xrightarrow{x=0}0-8=-y+8\to y=8+8=16\\ z=8\end{cases}\Rightarrow F(0,16,8)$$

$$m\equiv\begin{cases}H(8,0,16)\\ \vec{m}\equiv\overrightarrow{AB}=(-8,8,0)\end{cases}\Rightarrow m\equiv(8,0,16)+\rho\cdot(-8,8,0)\Rightarrow m\equiv\begin{cases}x=8-8\rho\\ y=-8\rho\\ z=16\end{cases}\Rightarrow m\equiv\begin{cases}\dfrac{x-8}{-8}=\dfrac{y}{8}\\ z=16\end{cases}$$

$$n\equiv\begin{cases}F(0,16,8)\\ \vec{n}\equiv\overrightarrow{AD}=(0,-8,8)\end{cases}\Rightarrow n\equiv(0,16,8)+\sigma\cdot(0,-8,8)\Rightarrow n\equiv\begin{cases}x=0\\ y=16-8\sigma\\ z=8+8\sigma\end{cases}\Rightarrow n\equiv\begin{cases}x=0\\ \dfrac{y-16}{-8}=\dfrac{z-8}{8}\end{cases}$$

$$G=m\cap n\Rightarrow G\begin{cases}x=0\\ y-16=-z+8\xrightarrow{z=16}y-16=-16+8=-8\to y=-8+16=8\\ x-8=-y\xrightarrow{x=0}0-8=-y\to y=8\\ z=16\end{cases}\Rightarrow G(0,16,8)$$



17. Dadas las rectas:

$$\mathbf{r : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3} \qquad ; \qquad s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}}$$

halla la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.

$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P(-1,2,0) \\ \vec{r} = (1,2,3) \end{cases} \Rightarrow r \equiv (-1,2,0) + \lambda \cdot (1,2,3) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = 2+2\lambda \Rightarrow \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x+2 = y-2 \rightarrow 2x-y+4=0 \\ 3y-6 = 2z \rightarrow 3y-2z-6=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x-y+4=0 \\ 3y-2z-6=0 \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} Q(0,1,0) \\ \vec{s} = (2,3,4) \end{cases} \Rightarrow s \equiv (0,1,0) + \gamma \cdot (2,3,4) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2\gamma \\ y = 1+3\gamma \Rightarrow \\ z = 4\gamma \end{cases}$$

$$\Rightarrow s \equiv \begin{cases} 3x = 2y-2 \rightarrow 3x-2y+2=0 \\ 4y-4 = 3z \rightarrow 4y-3z-4=0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} 3x-2y+2=0 \\ 4y-3z-4=0 \end{cases}$$

$$A \in r,s \rightarrow A \begin{cases} 2x - y = -4 \\ 3y - 2z = 6 \\ 3x - 2y = -2 \\ 4y - 3z = 4 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \\ 3 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{2 \cdot F_3 - 3 \cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1 \ ; \ F_4 + F_1}$$

$$\xrightarrow{F_3 - F_1 \ ; \ F_4 + 4 \cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -4 \\ 3y - 2z = 6 \\ -3z = 4 \\ 0 = 12 \end{cases} \Rightarrow S.I. \Rightarrow \nexists A$$

$$\text{Sean } R\in r \text{ y } S\in s:\overrightarrow{RS}\perp r,s \leftrightarrow \overrightarrow{RS}=k\cdot\left(\vec r\times\vec s\right)\rightarrow(2\gamma+1-\lambda,1+3\gamma-2-2\lambda,4\gamma-3\lambda)=k\cdot\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\1&2&3\\2&3&4\end{vmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow(1+2\gamma-\lambda,-1+3\gamma-2\lambda,4\gamma-3\lambda)=k\cdot\left(8\cdot\vec i+6\cdot\vec j+3\cdot\vec k-4\cdot\vec k-4\cdot\vec j-9\cdot\vec i\right)=k\cdot(-1,2,-1)=(-k,2k,-k)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\gamma-\lambda+k=-1\\3\gamma-2\lambda-2k=1\\4\gamma-3\lambda+k=0\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-1\\3&-2&-2&1\\4&-3&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[F_3-2\cdot F_1]{2\cdot F_2-3\cdot F_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-1\\0&-1&-7&5\\0&-1&-1&2\end{array}\right)\xrightarrow{F_3-F_2}$$

$$\xrightarrow{F_3-F_2}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-1\\0&-1&-7&5\\0&0&6&-3\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{3}\cdot F_3}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-1\\0&-1&-7&5\\0&0&2&-1\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}2\gamma-\lambda+k=-1\xrightarrow{k=-\frac{1}{2}}**\\-\lambda-7k=5\xrightarrow{k=-\frac{1}{2}}*\\2k=-1\rightarrow k=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$*\xrightarrow{k=-\frac{1}{2}}-\lambda-7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=5\rightarrow-\lambda+\frac{7}{2}=5\rightarrow-\lambda=5-\frac{7}{2}=\frac{10-7}{2}=\frac{3}{2}\rightarrow\lambda=-\frac{3}{2}$$

$$**\xrightarrow{k=-\frac{1}{2}\ ;\ \lambda=-\frac{3}{2}}2\gamma-\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)=-1\rightarrow2\gamma+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-1\rightarrow2\gamma+1=-1\rightarrow2\gamma=-1-1=-2\rightarrow\gamma=-1$$

$$R\begin{cases}x=-1+\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-1-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{2}{2}-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{5}{2}\\y=2+2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=2-3=-1\\z=3\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{9}{2}\end{cases}\Rightarrow R\left(-\frac{5}{2},-1,-\frac{9}{2}\right)$$

$$S\begin{cases}x=2\cdot(-1)=-2\\y=1+3\cdot(-1)=1-3=-2\\z=4\cdot(-1)=-4\end{cases}\Rightarrow S(-2,-2,-4)$$

$$t\equiv\begin{cases}R\left(-\dfrac{5}{2},-1,-\dfrac{9}{2}\right)\\S(-2,-2,-4)\end{cases}\Rightarrow t\equiv\begin{cases}R\left(-\dfrac{5}{2},-1,-\dfrac{9}{2}\right)\\\vec t\equiv\overrightarrow{RS}=\left(\dfrac{1}{2},-1,\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow t\equiv\left(-\frac{5}{2},-1,-\frac{9}{2}\right)+\delta\cdot\left(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t\equiv\begin{cases}x=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\delta\\y=-1-\delta\\z=-\dfrac{9}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\delta\end{cases}\Rightarrow t\equiv\frac{x+\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+\frac{9}{2}}{\frac{1}{2}}\rightarrow t\equiv2x+5=-y-1=2z+9\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t\equiv\begin{cases}2x+5=-y-1\\-y-1=2z+9\end{cases}\rightarrow t\equiv\begin{cases}2x+y+6=0\\-y-2z-10=0\end{cases}\rightarrow t\equiv\begin{cases}2x+y+6=0\\y+2z+10=0\end{cases}$$

18. Dado el plano: $\pi_1\equiv x+y+z=1$

y la recta: $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$

se pide:

a) Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 3x-3 = 2y+2 \\ -4y-4 = 3z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 3x-2y = 5 \\ 4y+3z = -4 \end{cases}$$

$$P\begin{cases} x+y+\ \ z = 1 \\ \quad 4y+3z = -4 \\ 3x-2y \quad = 5 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-3\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{4\cdot F_3+5\cdot F_2}$$

$$\xrightarrow{4\cdot F_3+5\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -12 \end{array}\right) \Rightarrow P\begin{cases} x+y+z = 1 \xrightarrow[z=-4]{y=2} x+2-4 = 1 \to x = 1+2 = 3 \\ 4y+3z = -4 \xrightarrow{z=-4} 4y-12 = -4 \to y = 2 \\ 3z = -12 \to z = \frac{-12}{3} = -4 \end{cases}$$

$$\boxed{P(\ 3, 2, -4\ )}$$

b) Hallar el plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1 y π_2 tenga longitud $\sqrt{29}$ unidades.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} Q(\ 1, -1, 0\ ) \\ \vec{r} \equiv (\ 2, 3, -4\ ) \end{cases} \Rightarrow r \equiv (\ 1, -1, 0\ ) + \lambda \cdot (\ 2, 3, -4\ ) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = -1+3\lambda \\ z = -4\lambda \end{cases}$$

$$P' = \pi_2 \cap r \to \left|\overrightarrow{PP'}\right| = \left|(\ x-3, y-2, z+4\ )\right| = \sqrt{(\ x-3\ )^2 + (\ y-2\ )^2 + (z+4)^2} = \sqrt{29} \to$$

$$\to (\ x-3\ )^2 + (\ y-2\ )^2 + (z+4)^2 = 29 \to x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 8z + 16 = 29 \to$$

$$\to x^2 - 6x + y^2 - 4y + z^2 + 8z + 29 = 29 \to x^2 - 6x + y^2 - 4y + z^2 + 8z = 29 - 29 = 0 \xrightarrow{P\in r}$$

$$\xrightarrow{P\in r} (\ 1+2\lambda)^2 - 6\cdot(1+2\lambda) + (-1+3\lambda)^2 - 4\cdot(-1+3\lambda) + (-4\lambda)^2 + 8\cdot(-4\lambda) = 0 \to$$

$$\to 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 - 6 - 12\lambda + 9\lambda^2 - 6\lambda + 1 + 4 - 12\lambda + 16\lambda^2 - 32\lambda = 0 \to 29\lambda^2 - 58\lambda = 0 \to$$

$$\to \lambda \cdot (29\lambda - 58\ ) = 0 \to \begin{cases} \lambda = 0 \to P_1'(\ 1, -1, 0\ ) \\ 29\lambda - 58 = 0 \to 29\lambda = 58 \to \lambda = \frac{58}{29} = 2 \to P_2'(\ 5, 5, -8\ ) \end{cases}$$

$$\boxed{\pi_2 \equiv x+y+z = D \to \begin{cases} P_1'(\ 1, -1, 0\ ) \in \pi_2 \to 1-1+0 = D \to D = 0 \to \pi'_2 \equiv x+y+z = 0 \\ P_2'(\ 5, 5, -8\ ) \in \pi_2 \to 5+5-8 = D \to D = 2 \to \pi''_2 \equiv x+y+z = 2 \end{cases}}$$

19. Sea r_1 la recta que pasa por $A(2,4,0)$ y $B(6,2,0)$ y sea r_2 la recta que pasa por $C(0,0,7)$ y $D(3,2,0)$. Obtener razonadamente la distancia entre r_1 y r_2.

$$r_1 \equiv \begin{cases} A(2,4,0) \\ B(6,2,0) \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} A(2,4,0) \\ \vec{r} \equiv \overrightarrow{AB} = (4,-2,0) \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv (2,4,0) + \lambda \cdot (4,-2,0) \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x = 2+4\lambda \\ y = 4-2\lambda \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{0} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} -2x+4 = 4y-16 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} -2x-4y+20=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x+2y-10=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} C(0,0,7) \\ D(3,2,0) \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} C(0,0,7) \\ \vec{s} \equiv \overrightarrow{CD} = (3,2,-7) \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv (0,0,7) + \mu \cdot (3,2,-7) \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = 3\mu \\ y = 2\mu \\ z = 7-7\mu \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 \equiv \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-7}{-7} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} 2x = 3y \\ -7y = 2z-14 \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} 2x-3y=0 \\ 7y+2z-14=0 \end{cases}$$

El haz de planos de arista r_2 es: $2x-3y+\gamma\cdot(7y+2z-14)=0 \rightarrow 2x+(-3+7\gamma)\cdot y+2\gamma\cdot z-14\gamma=0$

El plano de dicho haz paralelo a r_1 debe ser tal que el producto escalar de sus vectores directores es 0:

$$(4,-2,0)\cdot(2,-3+7\gamma,2\gamma)=0 \rightarrow 8+6-14\gamma+0=0 \rightarrow -14\gamma=-14 \rightarrow \gamma=\frac{-14}{-14}=1$$

$$\pi \equiv 2x+(-3+7\cdot 1)\cdot y+2\cdot 1\cdot z-14\cdot 1=0 \rightarrow \pi \equiv 2x+(-3+7)\cdot y+2z-14=0 \rightarrow \pi \equiv 2x+4y+2z-14=0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \pi \equiv x+2y+z-7=0$$

$$\boxed{\text{dist}(r_1,r_2)=\text{dist}(A,\pi)=\frac{|1\cdot 2+2\cdot 4+1\cdot 0-7|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{|2+8+0-7|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{|3|}{\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}\approx 1'225\ u}$$

20. Se consideran las rectas $r \equiv x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ y $s \equiv x-1 = y-2 = z-1$.

a) Determinar su posición relativa.

$$r \equiv x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{r} = (1,2,3) \end{cases} \Rightarrow r \equiv (0,0,0) + \lambda \cdot (1,2,3) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x-y=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$$

$$s \equiv x-1 = y-2 = z-1 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} P(1,2,1) \\ \vec{s} = (1,1,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv (1,2,1) + \mu \cdot (1,1,1) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1+\mu \\ y = 2+\mu \\ z = 1+\mu \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x-y+1=0 \\ y-z-1=0 \end{cases}$$

Como sus vectores directores no son iguales ni proporcionales, ambas rectas no son paralelas.

$$Q = r \cap s \begin{cases} Q \in r \\ Q \in s \end{cases} \Rightarrow Q \begin{cases} 2x-y = 0 \\ 3y-2z = 0 \\ x-y = -1 \\ y-z = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\cdot F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3\cdot F_4 - F_2]{3\cdot F_3 + F_2}$$

$$\xrightarrow[3\cdot F_4 - F_2]{3\cdot F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{F_3}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow Q \begin{cases} 2x-y = 0 \\ 3y-2z = 0 \\ -z = -3 \\ -z = 3 \end{cases} \Rightarrow \nexists Q / Q = r \cap s \left(Q \begin{cases} Q \in r \\ Q \in s \end{cases} \right)$$

<u>Las rectas r y s se cruzan.</u>

b) Calcular la distancia entre ambas rectas.

El haz de planos de arista s es:

$$H \equiv x-y+1+\gamma\cdot(y-z-1)=0 \rightarrow H \equiv x+(-1+\gamma)\cdot y-\gamma\cdot z-\gamma+1=0$$

El plano de dicho haz paralelo a r debe ser tal que el producto escalar de sus vectores directores es 0:

$$(1,2,3)\cdot(1,-1+\gamma,-\gamma)=0 \rightarrow 1-2+2\gamma-3\gamma=0 \rightarrow -1-\gamma=0 \rightarrow -\gamma=1 \rightarrow \gamma=-1$$

$$\pi \equiv x+(-1-1)\cdot y-(-1)\cdot z-(-1)+1=0 \rightarrow \pi \equiv x+(-2)\cdot y+z+1+1=0 \rightarrow \pi \equiv x-2y+z+2=0$$

$$\text{dist}(r_1,r_2)=\text{dist}(O,\pi)=\frac{|1\cdot 0-2\cdot 0+1\cdot 0+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{|0+0+0+2|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{|2|}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}\approx 0'816\ u$$

21. Calcular la distancia entre los planos paralelos

$$\begin{cases} x-y-2z=1 \\ 2x-2y-4z=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi \equiv x-y-2z-1=0 \\ \pi' \equiv 2x-2y-4z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi \equiv x-y-2z-1=0 \\ \pi' \equiv x-y-2z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \pi=\pi' \Rightarrow d(\pi,\pi')=0$$

22. Calcular el área del triángulo de vértices (1, 0 , -1) , (3 , 2 , 1) y (3 , 0 , 1).

$$\begin{cases} A(1,0,-1) \\ B(3,2,1) \\ C(3,0,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}(2,2,2) \\ \overrightarrow{AC}(2,0,2) \end{cases}$$

$$\widehat{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\left\|\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right\|=2\cdot\left|\vec i+\vec j-\vec j-\vec k\right|=2\cdot\left|\vec i-\vec k\right|=$$

$$=2\cdot|(1,0,-1)|=2\cdot\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}=2\cdot\sqrt{1+0+1}=2\cdot\sqrt{2}\approx 2'828\ u^2$$

23. a) Ángulo que forman recta y plano. Definición y expresión para su cálculo.

El ángulo formado por una recta r y un plano π se define como el formado por la recta r con su proyección t sobre el plano π :

$$\widehat{r\pi}=\varphi=\text{arc sen}\,\frac{|\vec v\cdot\vec n|}{|\vec v|\cdot|\vec n|}$$

b) Calcular el valor de α para que sean paralelos la recta r y el plano π de ecuaciones:

$$r:\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+y-z=2 \end{cases} \qquad \pi:\alpha x-y+z=5$$

$$r\equiv\begin{cases}2x-3y=-1\xrightarrow{x=\lambda}-3y=-1-2\lambda\rightarrow y=\dfrac{1+2\lambda}{3}\\ x+y-z=2\xrightarrow{y=\frac{1+2\lambda}{3}}\lambda+\dfrac{1+2\lambda}{3}-z=2\rightarrow z=\dfrac{5+5\lambda}{3}\end{cases}\Rightarrow r\equiv\left(0,\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)+\lambda\cdot\left(1,\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$$

$$r\equiv\begin{cases}P\left(0,\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3}\right)\\ \vec{v}=(3,2,5)\end{cases}$$

$$\pi\equiv\alpha x-y+z-5=0\rightarrow\pi\equiv\begin{cases}Q\ (0,0,5)\\ \vec{n}=(\alpha,-1,1)\end{cases}$$

$$\widehat{r\pi}=\varphi=\text{arc sen}\,\frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}=\text{arc sen}\,\frac{|(3,2,5)\cdot(\alpha,-1,1)|}{|(3,2,5)|\cdot|(\alpha,-1,1)|}=\text{arc sen}\,\frac{|3\alpha-2+5|}{\sqrt{3^2+2^2+5^2}\cdot\sqrt{\alpha^2+1^2+1^2}}=$$

$$=\text{arc sen}\,\frac{|3\alpha+3|}{\sqrt{9+4+25}\cdot\sqrt{\alpha^2+1+1}}=\text{arc sen}\,\frac{3\cdot|\alpha+1|}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{\alpha^2+2}}=\text{arc sen}\,\frac{3\cdot|\alpha+1|}{\sqrt{38\alpha^2+76}}=0$$

$$\boxed{\text{arc sen}\,\frac{3\cdot|\alpha+1|}{\sqrt{38\alpha^2+76}}=0\rightarrow\text{sen}\,0=\frac{3\cdot|\alpha+1|}{\sqrt{38\alpha^2+76}}=0\rightarrow 3\cdot|\alpha+1|=0\rightarrow|\alpha+1|=0\rightarrow\alpha=-1}$$

$r\perp\pi\longleftrightarrow\vec{v}\,//\,\vec{n}$:

La recta r y el plano π no pueden ser perpendiculares puesto que sus respectivos vectores no pueden ser paralelos ya que sus coordenadas no son proporcionales: $\dfrac{2}{-1}\neq\dfrac{5}{1}$

24. Obtener el volumen de la pirámide determinada por los puntos (1, 0, 0), (1, 1 ,0), (1, 1, 1) y (2, 1, 3).

$$\boxed{V=\left|\frac{1}{6}\cdot\left[\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)\right]\right|=\left|\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&1&3\end{vmatrix}\right|=\left|\frac{1}{6}\cdot 1\right|=\left|\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}\approx 0'167\ u^3}$$

$$\left.\begin{array}{l}A(1,0,0)\\B(1,1,0)\\C(1,1,1)\\D(2,1,3)\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(0,1,0)\\\overrightarrow{AC}(0,1,1)\\\overrightarrow{AD}(1,1,3)\end{array}\right\}$$

25. Probar que si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen el mismo módulo, $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ entonces $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$

$$\boxed{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-|\vec{a}|^2=0}$$

26. Dados el punto P = (7 , 5 , 1), el plano π: x – 2y – 3z = 10 y la recta $r:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{0}=z+3$

a) Hallar la distancia del punto P al plano π.

$$d(P,\pi)=\frac{|A\cdot x_P+B\cdot y_P+C\cdot z_P+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1\cdot 7-2\cdot 5-3\cdot 1-10|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-3)^2}}=\frac{|-16|}{\sqrt{14}}=\frac{16}{\sqrt{14}}=\frac{8\cdot\sqrt{14}}{7}\approx 4'276\ u$$

b) Hallar la distancia del punto P a la recta r.

$$r\equiv\frac{x-1}{3}=\frac{y}{0}=z+3\rightarrow r\equiv\begin{cases}Q(1,0,-3)\\ \vec{v}=(3,0,1)\end{cases}$$

$$d(P,r)=\frac{|\overrightarrow{QP}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}=\frac{|(6,5,4)\times(3,0,1)|}{\sqrt{3^2+0^2+1^2}}=\frac{\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 5 & 4\\ 3 & 0 & 1\end{matrix}\right\|}{\sqrt{9+0+1}}=\frac{|5\cdot\vec{i}+12\cdot\vec{j}-15\cdot\vec{k}-6\cdot\vec{j}|}{\sqrt{10}}=$$

$$=\frac{|5\cdot\vec{i}+6\cdot\vec{j}-15\cdot\vec{k}|}{\sqrt{10}}=\frac{|(5,6,-15)|}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{5^2+6^2+(-15)^2}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{25+36+225}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{286}}{\sqrt{10}}=$$

$$=\frac{\sqrt{286}\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{286\cdot 10}}{10}=\frac{\sqrt{2860}}{10}=\frac{\sqrt{4\cdot 715}}{10}=\frac{2\cdot\sqrt{715}}{10}=\frac{\sqrt{715}}{5}\approx 5'348\ u$$

c) Hallar la distancia de la recta r al plano π.

$$d(r,\pi)=d(Q,\pi)=\frac{|A\cdot x_Q+B\cdot y_Q+C\cdot z_Q+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1\cdot 1-2\cdot 0-3\cdot(-3)-10|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-3)^2}}=\frac{|0|}{\sqrt{14}}=0\rightarrow Q\in\pi$$

27. a) Definición y cálculo del ángulo que forman dos rectas. Condición de perpendicularidad.

El ángulo φ de dos rectas r y s es el formado por sus respectivos vectores directores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ y se obtiene con la expresión $\varphi=\arccos\dfrac{|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}|}{|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{v_s}|}$.

Dos rectas son perpendiculares si sus respectivos vectores directores también lo son, es decir, cuando el producto escalar de ambos vectores directores es nulo:

$$r\perp s\leftrightarrow\overrightarrow{v_r}\perp\overrightarrow{v_s}\leftrightarrow\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}=|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{v_s}|\cdot\cos\varphi\xrightarrow{\varphi=90^\circ}\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}=|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{v_s}|\cdot\cos 90^\circ=|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{v_s}|\cdot 0=0$$

b) Determínese el ángulo que forman la recta r y el plano π de ecuaciones:

π: 6x + 2y – 2z = 16 $\qquad$ $\mathbf{r:\dfrac{x-2}{3}=y-3=1-z}$

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = y-3 = 1-z \to r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P(2,3,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (3,1,-1) \end{cases}$$

$$\pi \equiv 6x+2y-2z-16=0 \to \pi \equiv 3x+y-z-8=0 \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} Q(0,8,0) \\ \overrightarrow{n_\pi} = (3,1,-1) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi &= \text{arc sen}\frac{|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi}|}{|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{n_\pi}|} = \text{arc sen}\frac{|(3,1,-1)\cdot(3,1,-1)|}{|(3,1,-1)|\cdot|(3,1,-1)|} = \text{arc sen}\frac{|9+1+1|}{\sqrt{3^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2+1^2}} = \\ &= \text{arc sen}\frac{|11|}{\sqrt{9+1+1}\cdot\sqrt{9+1+1}} = \text{arc sen}\frac{11}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}} = \text{arc sen}\frac{11}{\sqrt{11\cdot 11}} = \text{arc sen}\frac{11}{11} = \text{arc sen}\,1 = 90^\circ\end{aligned}}$$

28. Dado el punto P (1 , 2 , -1) y la recta r de ecuaciones paramétricas:

$$\mathbf{r \equiv \begin{cases} x = 2-2\lambda \\ y = -1+3\lambda \quad \text{con} \ \lambda \in IR \\ z = -1+\lambda \end{cases}}$$

se pide determinar la ecuación del plano que contiene a ambos.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2-2\lambda \\ y = -1+3\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv (2,-1,-1) + \lambda\cdot(-2,3,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} Q(2,-1,-1) \\ \vec{v} = (-2,3,1) \end{cases} \quad ; \quad \pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$$

$$\pi \equiv \begin{cases} P(1,2,-1) \\ r \equiv \begin{cases} Q(2,-1,-1) \\ \vec{v} = (-2,3,1) \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} P(1,2,-1) \\ r \equiv \begin{cases} Q(2,-1,-1) \\ \vec{v} = (-2,3,1) \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} \vec{w} = \overrightarrow{PQ} = (1,-3,0) \\ r \equiv \begin{cases} Q(2,-1,-1) \\ \vec{v} = (-2,3,1) \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} \vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = (1,-3,0) \times (-2,3,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3\cdot\vec{i} + 3\cdot\vec{k} - 6\cdot\vec{k} - \vec{j} = (-3,-1,-3) \equiv (3,1,3) \\ P(1,2,-1) \end{cases}$$

$$\pi \equiv 3x+y+3z+D=0 \xrightarrow{P(1,2,-1)\in\pi} 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + 3\cdot(-1) + D = 0 \to 3+2-3+D=0 \to D=-2$$

$$\boxed{\pi \equiv 3x+y+3z-2=0}$$

29. Determinar la ecuación del plano que pasa por el punto (1 , 0 , 0) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos (0 , 1 , 0) y (0 , 0 , 1).

$$\pi \equiv \begin{cases} P(1,0,0) \\ \vec{n} = (0,-1,1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv -y+z+D=0 \xrightarrow{P\in\pi} 0+0+D=0 \rightarrow D=0 \Rightarrow \quad \boxed{\pi \equiv -y+z=0}$$

30. Las rectas:

$$\mathbf{r_1 : \frac{x-a}{2} = y = \frac{z+1}{4} \qquad y \qquad r_2 : x+2 = \frac{y-b}{2} = \frac{z-4}{-1}}$$

Son coplanarias (es decir, están contenidas en un mismo plano).

a) Explicar, razonadamente, cuál es la posición relativa de estas rectas.

$$r_1 \equiv \frac{x-a}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} P_1(a,0,-1) \\ \vec{v_1} = (2,1,4) \end{cases} \; ; \; r_2 \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-b}{2} = \frac{z-4}{-1} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} P_2(-2,b,4) \\ \vec{v_2} = (1,2,-1) \end{cases}$$

$$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = \left|\vec{v_1}\right|\cdot\left|\vec{v_2}\right|\cdot\cos\alpha \rightarrow \alpha = \text{arc cos}\,\frac{\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}}{\left|\vec{v_1}\right|\cdot\left|\vec{v_2}\right|}$$

$$\alpha = \text{arc cos}\,\frac{(2,1,4)\cdot(1,2,-1)}{|(2,1,4)|\cdot|(1,2,-1)|} = \text{arc cos}\,\frac{2\cdot1+1\cdot2+4\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+1^2+4^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} =$$

$$= \text{arc cos}\,\frac{2+2-4}{\sqrt{4+1+16}\cdot\sqrt{1+4+1}} = \text{arc cos}\,\frac{0}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{6}} = \text{arc cos}\,\frac{0}{\sqrt{126}} = \text{arc cos}\,0 = 90^\circ \rightarrow r_1 \perp r_2$$

<u>Dado que son coplanarias y perpendiculares, las rectas se cortan en un punto.</u>

b) Hallar la relación que hay entre los parámetros a y b.

$$r_1 \equiv (x,y,z) = (a,0,-1) + \lambda\cdot(2,1,4) \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x = a+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1+4\lambda \end{cases}$$

$$r_2 \equiv (x,y,z) = (-2,b,4) + \mu\cdot(1,2,-1) \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = -2+\mu \\ y = b+2\mu \\ z = 4-\mu \end{cases}$$

$$P_0 \in r_1, r_2 \rightarrow P_0 \begin{cases} a+2\lambda = -2+\mu \xrightarrow{\lambda=\frac{5-\mu}{4}} a+2\cdot\frac{5-\mu}{4} = -2+\mu \rightarrow a+\frac{10-2\mu}{4} = -2+\mu \rightarrow * \\ \lambda = b+2\mu \xrightarrow{\lambda=\frac{5-\mu}{4}} \frac{5-\mu}{4} = b+2\mu \rightarrow 5-\mu = 4b+8\mu \rightarrow -9\mu = 4b-5 \rightarrow \mu = \frac{-4b+5}{9} \\ -1+4\lambda = 4-\mu \rightarrow 4\lambda = 5-\mu \rightarrow \lambda = \frac{5-\mu}{4} \end{cases}$$

$$* \rightarrow a = -2+\mu-\frac{10-2\mu}{4} = \frac{-8+4\mu-10+2\mu}{4} = \frac{6\mu-18}{4} = \frac{3\mu-9}{2} \xrightarrow{\mu=\frac{-4b+5}{9}} a = \frac{3\cdot\frac{-4b+5}{9}-9}{2} =$$

$$= \frac{\frac{-4b+5}{3}-9}{2} = \frac{\frac{-4b+5-27}{3}}{2} = \frac{\frac{-4b-22}{3}}{2} \rightarrow 2a = \frac{-4b-22}{3} \rightarrow 6a = -4b-22 \rightarrow 6a+4b+22=0$$

$$\boxed{3a+2b+11=0}$$

c) Hallar los valores de a y b si el plano que las contiene pasa por el punto P (2, 4 , 6).

$$\pi \equiv \begin{cases} P(2,4,6) \\ \vec{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = (2,1,4)\times(1,2,-1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}-\vec{k}+2\vec{j}-8\vec{i} = -9\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k} \equiv (3,-2,-1) \end{cases}$$

$$\pi \equiv 3x-2y-z+D=0 \xrightarrow{P\in\pi} 3\cdot 2-2\cdot 4-6+D=0 \rightarrow 6-8-6+D=0 \rightarrow D=8 \Rightarrow \pi \equiv 3x-2y-z+8=0$$

$$P_1(a,0,-1)\in\pi \leftrightarrow 3a-2\cdot 0-(-1)+8=0 \Rightarrow 3a+9=0 \rightarrow 3a=-9 \rightarrow a=\frac{-9}{3}=-3$$

$$3a+2b+11=0 \xrightarrow{a=-3} 3\cdot(-3)+2b+11=0 \rightarrow -9+2b+11=0 \rightarrow 2b+2=0 \rightarrow 2b=-2 \rightarrow b=\frac{-2}{2}=-1$$

$$\boxed{a=-3 \quad ; \quad b=-1}$$

31. Calcular el volumen del tetraedro cuyos vértices son:(1, 2, -4), (0, 1, 1), (-1, 0, -6) y (0 , 0 , 0).

$$\begin{matrix} O(0,0,0) \\ A(1,2,-4) \\ B(0,1,1) \\ C(-1,0,-6) \end{matrix} \left.\begin{matrix} \overrightarrow{OA}(1,2,-4) \\ \overrightarrow{OB}(0,1,1) \\ \overrightarrow{OC}(-1,0,-6) \end{matrix}\right\} V = \left|\frac{1}{6}\cdot\left[\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\right)\right]\right| = \left|\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -6 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{-6-2-4}{6}\right| = \left|\frac{-12}{6}\right| = 2\,u^3$$

32. Calcular el ángulo que forma la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}$ con el plano $x+z=17$

$$r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P(1,3,0) \\ \vec{v}=(2,1,1) \end{cases} \quad ; \quad \pi \equiv x+z-17=0 \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} Q(9,0,8) \\ \vec{n}=(1,0,1) \end{cases}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{n} = |\vec{v}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos\alpha \longrightarrow \alpha = \arccos\frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}$$

$$\alpha = \arccos\frac{|(2,1,1)\cdot(1,0,1)|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \arccos\frac{|2+1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \arccos\frac{3}{2\sqrt{3}} = 30^\circ$$

$$\boxed{\varphi = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60}$$

33. Determinar las posiciones relativas de los planos $3x+\lambda y+z=3$, $2\lambda x-y+z=5$ y $4x+3\lambda y+z=\lambda$ según los valores del parámetro real λ.

$$\begin{matrix} \pi_1 \equiv 3x+\lambda y+z=3 \\ \pi_2 \equiv 2\lambda x-y+z=5 \\ \pi_3 \equiv 4x+3\lambda y+z=\lambda \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & \lambda & 1 & 3 \\ 2\lambda & -1 & 1 & 5 \\ 4 & 3\lambda & 1 & \lambda \end{array}\right) \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & \lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \\ 4 & 3\lambda & 1 \end{vmatrix} = -3+4\lambda+6\lambda^2+4-9\lambda-2\lambda^2 = 4\lambda^2-5\lambda+1$$

$$4\lambda^2-5\lambda+1=0\to\lambda=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot4\cdot1}}{2\cdot4}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{8}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{8}=\frac{5\pm3}{8}\to\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{5+3}{8}=\dfrac{8}{8}=1\\[2ex] \lambda_2\ \dfrac{5-3}{8}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Si $\lambda=1$:

$$\begin{cases}3x+\ y+z=3\\2x-\ \ y+z=5\\4x+3y+z=1\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&1&3\\2&-1&1&5\\4&3&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[3\cdot F_3-4\cdot F_1]{3\cdot F_2-2\cdot F_1}\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&1&3\\0&-5&1&9\\0&5&-1&-9\end{array}\right)\xrightarrow{F_3+F_2}\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&1&3\\0&-5&1&9\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x+y+z=3\xrightarrow[z=\mu]{y=\frac{\mu-9}{5}}3x+\dfrac{\mu-9}{5}+\mu=3\to3x+\dfrac{6\mu-9}{5}=3\to x+\dfrac{2\mu-3}{5}=1\to x=1-\dfrac{2\mu-3}{5}=\dfrac{-2\mu+8}{5}\\[2ex] -5y+z=9\xrightarrow{z=\mu}y=\dfrac{9-\mu}{-5}=\dfrac{\mu-9}{5}\end{cases}$$

Si $\lambda=\dfrac{1}{4}$:

$$\begin{cases}3x+\ \dfrac{1}{4}\cdot y+z=3\\[1ex] \dfrac{1}{2}\cdot x-\qquad y+z=5\\[1ex] 4x+\ \dfrac{3}{4}\cdot y+z=\dfrac{1}{4}\end{cases}\to\begin{cases}12x+\ \ y+4z=12\\ x-2y+2z=10\\16x+3y+4z=\ 1\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}12&1&4&12\\1&-2&2&10\\16&3&4&1\end{array}\right)\xrightarrow[3\cdot F_3-4\cdot F_1]{12\cdot F_2-F_1}\left(\begin{array}{ccc|c}12&1&4&12\\0&-25&20&108\\0&5&-4&-45\end{array}\right)\xrightarrow{5\cdot F_3+F_2}$$

$$\xrightarrow{5\cdot F_3+F_2}\left(\begin{array}{ccc|c}12&1&4&12\\0&-25&20&108\\0&5&-4&-45\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}12x+y+\ \ 4z=\ \ \ 12\\ -25y+20z=\ \ \ 108\Rightarrow \text{Sistema Incompatible}\\ 0\neq-117\end{cases}$$

Si $\lambda\neq1$ y $\lambda\neq\dfrac{1}{4}$:

$$\begin{cases}3x+\ \lambda y+z=3\\2\lambda x-\ \ \ y+z=5\\4x+3\lambda y+z=\lambda\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&\lambda&1&3\\2\lambda&-1&1&5\\4&3\lambda&1&\lambda\end{array}\right)\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&\lambda&3&3\\1&-1&2\lambda&5\\1&3\lambda&4&\lambda\end{array}\right)\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&\lambda&3&3\\1&3\lambda&4&\lambda\\1&-1&2\lambda&5\end{array}\right)\xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1}$$

$$\xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&\lambda&3&3\\0&2\lambda&1&\lambda-3\\0&-1-\lambda&2\lambda-3&2\end{array}\right)\xrightarrow{C_2\leftrightarrow C_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&\lambda&3\\0&1&2\lambda&\lambda-3\\0&2\lambda-3&-1-\lambda&2\end{array}\right)\xrightarrow{F_3-(2\lambda-3)\cdot F_2}$$

$$\xrightarrow{F_3-(2\lambda-3)\cdot F_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&\lambda&3\\0&1&2\lambda&\lambda-3\\0&0&-4\lambda^2+5\lambda-1&-2\lambda^2+9\lambda-7\end{array}\right)\xrightarrow{-F_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&\lambda&3\\0&1&2\lambda&\lambda-3\\0&0&4\lambda^2-5\lambda+1&2\lambda^2-9\lambda+7\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}z+3x+\ \ \lambda y=\qquad 3\\ x+2\lambda y=\qquad\lambda-3\\ \left(4\lambda^2-5\lambda+1\right)\cdot y=2\lambda^2-9\lambda+7\end{cases}\Rightarrow\ 2\lambda^2-9\lambda+7=0\to\lambda=\frac{9\pm\sqrt{81-56}}{4}=\frac{9\pm5}{4}\to\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{14}{4}=\dfrac{7}{2}\\ \lambda_2=1\end{cases}$$

$\left(\text{Si } \lambda \neq 1 \text{ y } \lambda \neq \dfrac{1}{4}:\right)$

$$\left\{\begin{array}{l} z+3x+\quad \lambda y = \quad 3 \\ \quad x+\quad 2\lambda y = \lambda-3 \\ 4\cdot(\lambda-1)\cdot\left(\lambda-\dfrac{1}{4}\right)\cdot y = 2\cdot(\lambda-1)\cdot\left(\lambda-\dfrac{7}{2}\right) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z+3x+\quad \lambda y = \quad 3 \xrightarrow{x=\frac{\lambda+3}{4\lambda-1}\ ;\ y=\frac{2\lambda-7}{4\lambda-1}} ** \\ \quad x+\quad 2\lambda y = \lambda-3 \xrightarrow{y=\frac{2\lambda-7}{4\lambda-1}} x+2\lambda\cdot\dfrac{2\lambda-7}{4\lambda-1} = \lambda-3 \rightarrow * \\ 2\cdot\left(\lambda-\dfrac{1}{4}\right)\cdot y = \lambda-\dfrac{7}{2} \rightarrow y = \dfrac{\lambda-\frac{7}{2}}{2\lambda-\frac{1}{2}} = \dfrac{2\lambda-7}{4\lambda-1} \end{array}\right.$$

$$* \rightarrow x+\frac{4\lambda^2-14\lambda}{4\lambda-1} = \lambda-3 \rightarrow x = \lambda-3-\frac{4\lambda^2-14\lambda}{4\lambda-1} = \frac{(\lambda-3)\cdot(4\lambda-1)}{4\lambda-1}-\frac{4\lambda^2-14\lambda}{4\lambda-1} = \frac{\lambda+3}{4\lambda-1}$$

$$** \rightarrow z+3\cdot\frac{\lambda+3}{4\lambda-1}+\lambda\cdot\frac{2\lambda-7}{4\lambda-1} = 3 \rightarrow z+\frac{2\lambda^2-4\lambda+9}{4\lambda-1} = 3 \rightarrow z = 3-\frac{2\lambda^2-4\lambda+9}{4\lambda-1} = \frac{-2\lambda^2+16\lambda-12}{4\lambda-1}$$

Si $\lambda = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{8-2\mu}{5} \\ y = \dfrac{-9+\mu}{5} \\ z = \mu \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 8-2\upsilon \\ y = -9+\upsilon \\ z = 5\upsilon \end{array}\right. \Rightarrow \text{S.C.I.} \Rightarrow \text{Los tres planos se cortan en la recta } r \equiv (8,-9,5)+\upsilon\cdot(-2,1,5)$$

Si $\lambda = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$ S. I. $\Rightarrow$ Los tres planos son paralelos y no tienen ningún punto en común.

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq \dfrac{1}{4}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\lambda+3}{4\lambda-1} \\ y = \dfrac{2\lambda-7}{4\lambda-1} \\ z = \dfrac{-2\lambda^2+16\lambda-12}{4\lambda-1} \end{array}\right. \Rightarrow \text{S.C.D.} \Rightarrow \text{Los tres planos se cortan en el punto } P\left(\frac{\lambda+3}{4\lambda-1}, \frac{2\lambda-7}{4\lambda-1}, \frac{-2\lambda^2+16\lambda-}{4\lambda-1}\right.$$

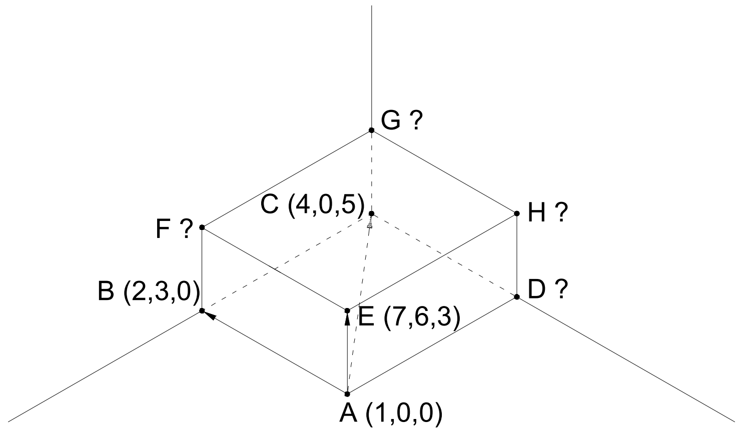
34. Hallar el volumen de un paralelepípedo de bases ABCD y EFGH, sabiendo que A (1 , 0 , 0) , B (2 , 3 , 0) , C (4 , 0 , 5) y E (7 , 6 , 3). Hallar las coordenadas de los restantes vértices del paralelepípedo.

$\overrightarrow{AB} = (2,3,0)-(1,0,0) = (1,3,0)$

$\overrightarrow{AC} = (4,0,5)-(1,0,0) = (3,0,5)$

$\overrightarrow{AE} = (7,6,3)-(1,0,0) = (6,6,3)$

$$V = \left|\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AE}\right)\right| = \left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)\right| = \left\|\begin{matrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & 6 & 3 \end{matrix}\right\| = |0+90+0-0-30-27| = |90-57| = 33\,u^3$$



$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=(x_D,y_D,z_D)-(4,0,5)=(4-x_D,0-y_D,5-z_D)=(1,3,0)\rightarrow\begin{cases}4-x_D=1\\-y_D=3\\5-z_D=0\end{cases}\Rightarrow D(3,-3,5)$$

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}=(7,6,3)-(x_F,y_F,z_F)=(x_F-7,y_F-6,z_F-3)=(1,3,0)\rightarrow\begin{cases}x_F-7=1\\y_F-6=3\\z_F-3=0\end{cases}\Rightarrow F(8,9,3)$$

$$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}=(7,6,3)-(x_G,y_G,z_G)=(x_G-7,y_G-6,z_G-3)=(3,0,5)\rightarrow\begin{cases}x_G-7=3\\y_G-6=0\\z_G-3=5\end{cases}\Rightarrow G(10,6,8)$$

$$\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AE}=(x_H,y_H,z_H)-(3,-3,5)=(x_H-3,y_H+3,z_H-5)=(6,6,3)\rightarrow\begin{cases}x_H-3=6\\y_H+3=6\\z_H-5=3\end{cases}\Rightarrow H(9,3,8)$$

35. Obtener la distancia desde el punto (0 , 0 , 7) al plano que pasa por los puntos (0 , 0 , 0) , (0 , 2 , 4) y (4 , 0 , 2).

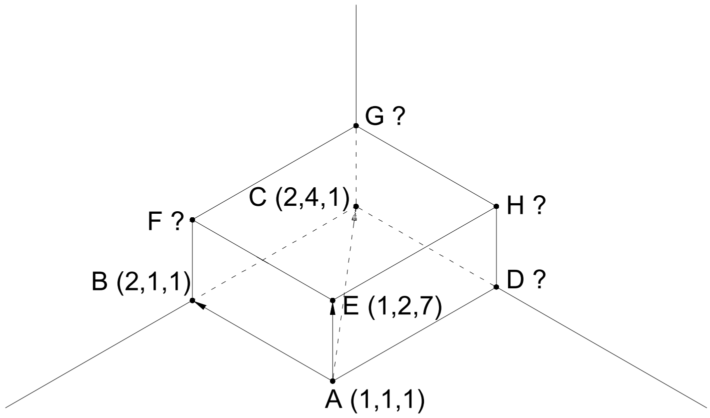
$P(0,0,7)$

$$\pi\equiv\begin{cases}O\ (0,0,0)\\Q\ (0,2,4)\\R\ (4,0,2)\end{cases}\Rightarrow\pi\equiv\begin{cases}O\ (0,0,0)\\ \vec{n}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=(0,2,4)\times(4,0,2)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&2&4\\4&0&2\end{vmatrix}=4\cdot\vec{i}+16\cdot\vec{j}-8\cdot\vec{k}=(4,16,-8)\equiv\end{cases}$$

$$\equiv(1,4,-2)\Rightarrow\pi\equiv x+4y-2z=D\xrightarrow{O(0,0,0)\in\pi}\pi\equiv x+4y-2z=0$$

$$d(P,\pi)=\frac{|A\cdot x_P+B\cdot y_P+C\cdot z_P+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1\cdot0+4\cdot0-2\cdot7+0|}{\sqrt{1^2+4^2+2^2}}=\frac{|-14|}{\sqrt{1+16+4}}=\frac{14}{\sqrt{21}}=\frac{14\sqrt{21}}{21}=\frac{2\sqrt{21}}{3}\approx3'055$$

36. Consideremos un paralelepípedo de bases ABCD y EFGH, siendo A = (1, 1, 1), B = (2, 1, 1), C = (2, 4, 1) y E (1, 2, 7). Hallar el área de una de las bases, el volumen del paralelepípedo y la distancia entre las bases.

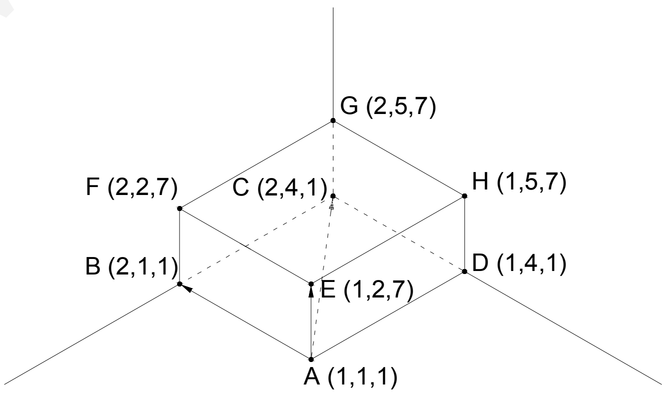


$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\left(x_D\,,y_D\,,z_D\right)-\left(2\,,4\,,1\right)=\left(2-x_D\,,4-y_D\,,1-z_D\right)=\left(1\,,0\,,0\right)\rightarrow\begin{cases}2-x_D=1\\4-y_D=0\Rightarrow D\left(1\,,4\,,1\right)\\1-z_D=0\end{cases}$$

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}=\left(1\,,2\,,7\right)-\left(x_F\,,y_F\,,z_F\right)=\left(x_F-1\,,y_F-2\,,z_F-7\right)=\left(1\,,0\,,0\right)\rightarrow\begin{cases}x_F-1=1\\y_F-2=0\Rightarrow F\left(2\,,2\,,7\right)\\z_F-7=0\end{cases}$$

$$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}=\left(1\,,2\,,7\right)-\left(x_G\,,y_G\,,z_G\right)=\left(x_G-1\,,y_G-2\,,z_G-7\right)=\left(1\,,3\,,0\right)\rightarrow\begin{cases}x_G-1=1\\y_G-2=3\Rightarrow G\left(2\,,5\,,7\right)\\z_G-7=0\end{cases}$$

$$\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AE}=\left(x_H\,,y_H\,,z_H\right)-\left(1\,,4\,,1\right)=\left(x_H-1\,,y_H-4\,,z_H-1\right)=\left(0\,,1\,,6\right)\rightarrow\begin{cases}x_H-1=0\\y_H-4=1\Rightarrow H\left(1\,,5\,,7\right)\\z_H-1=6\end{cases}$$



$$A_b = \left| \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} \right| = \left| (1,0,0)\times(0,3,0) \right| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \right\| = \left| 3\cdot\vec{k} \right| = \left| (0,0,3) \right| = \sqrt{3^2} = 3\ u^2$$

$$V = \left| \overrightarrow{AE}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right) \right| = \left| (0,1,6)\cdot[(1,0,0)\times(0,3,0)] \right| = \left\| \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \right\| = 18\ u^3$$

$$\pi \equiv \begin{cases} E\ (1,2,7) \\ \vec{n} = \overrightarrow{EF}\times\overrightarrow{EH} = (1,0,0)\times(0,3,0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot\vec{k} = (0,0,3) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv 3z + D = 0 \xrightarrow{E\ (1,2,7)\in\pi}$$

$$\xrightarrow{E\ (1,2,7)\in\pi} D = -21 \Rightarrow \pi \equiv 3z - 21 = 0 \rightarrow \pi \equiv z - 7 = 0$$

$$d(b,b') = d(b,\pi) = d(A,\pi) = \frac{|A\cdot x_A + B\cdot y_A + C\cdot z_A + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|0\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 - 7|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{1}} = 6\ u$$

37. Calcula la distancia desde el punto (0 , 0 , 10) al plano que pasa por los puntos (0 , 0 , 1) , (4 , 2 , 7) y (4 , 0 , 3).

$P(0,0,10)$

$$\pi \equiv \begin{cases} Q(0,0,1) \\ R(4,2,7) \\ Q(4,0,3) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} Q(0,0,1) \\ \vec{n} = \overrightarrow{QR}\times\overrightarrow{QS} = (4,2,6)\times(4,0,2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot\vec{i} + 24\cdot\vec{j} - 8\cdot\vec{k} - 8\cdot\vec{j} = \end{cases}$$

$$= 4\cdot\vec{i} + 16\cdot\vec{j} - 8\cdot\vec{k} = (4,16,-8) \equiv (1,4,-2)$$

$$\pi \equiv x + 4y - 2z + D = 0 \xrightarrow{Q(0,0,1)\in\pi} 2\cdot 1 + D = 0 \rightarrow D = 2 \Rightarrow \pi \equiv x + 4y - 2z + 2 = 0$$

$$d(P,\pi) = \frac{|A\cdot x_P + B\cdot y_P + C\cdot z_P + D|}{|\vec{n}|} = \frac{|1\cdot 0 + 4\cdot 0 - 2\cdot 10 + 2|}{\sqrt{1^2+4^2+2^2}} = \frac{|0+0-20+2|}{\sqrt{1+16+4}} = \frac{|-18|}{\sqrt{21}} = \frac{18}{\sqrt{21}} =$$
$$= \frac{18\sqrt{21}}{21} = \frac{6\sqrt{21}}{7} \approx 3'928\ u$$

38. Dados el punto $A(1,-2,-3)$, la recta $r: \begin{cases} x+y+1=0 \\ z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x-2y+1=0$ se pide:

a) Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.

$$r \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x+y \quad = -1 \xrightarrow{x=\lambda} y=-1-\lambda \\ z = \; 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \quad \lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv x=-y-1 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P(0,1,0) \\ \vec{v} = (1,-1,0) \end{cases}$$

$$\pi \equiv x-2y-3z+1=0 \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} Q(-1,0,0) \\ \vec{n} = (1,-2,-3) \end{cases}$$

$$\pi' \equiv \begin{cases} A(1,-2,-3) \in \pi' \\ \pi' // r \leftrightarrow \overrightarrow{n'} \perp \vec{v} \leftrightarrow \overrightarrow{n'} \cdot \vec{v} = 0 \\ \pi' \perp \pi \leftrightarrow \overrightarrow{n'} \perp \vec{n} \leftrightarrow \overrightarrow{n'} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{n'} \cdot \vec{v} = n_x' \cdot v_x + n_y' \cdot v_y + n_z' \cdot v_z = n_x' \cdot 1 + n_y' \cdot (-1) + n_z' \cdot 0 = 0 \longrightarrow n_x' - n_y' = 0 \longrightarrow n_x' = n_y'$$

$$\overrightarrow{n'} \cdot \vec{n} = n_x' \cdot n_x + n_y' \cdot n_y + n_z' \cdot n_z = n_x' \cdot 1 + n_y' \cdot (-2) + n_z' \cdot (-3) = n_x' - 2 \cdot n_y' - 3 \cdot n_z' = 0 \xrightarrow{n_x' = n_y'}$$
$$\xrightarrow{n_x' = n_y'} n_y' - 2 \cdot n_y' - 3 \cdot n_z' = -n_y' - 3 \cdot n_z' = 0 \longrightarrow -n_y' = 3 \cdot n_z' \longrightarrow n_y' = -3 \cdot n_z' \Rightarrow n_x' = n_y' = -3 \cdot n_z'$$

$$\pi' \equiv -3 \cdot n_z' \cdot x - 3 \cdot n_z' \cdot y + n_z' \cdot z + D = 0$$

$$A(1,-2,-3) \in \pi' \leftrightarrow -3 \cdot n_z' \cdot 1 - 3 \cdot n_z' \cdot (-2) + n_z' \cdot (-3) + D = 0 \to -3 \cdot n_z' + 6 \cdot n_z' - 3 \cdot n_z' + D = 0 \to D = 0$$

$$\boxed{\pi' \equiv 3x + 3y - z = 0}$$

Consideremos $n_z' = 1 \Rightarrow \pi' \equiv -3x - 3y + z = 0 \quad \Rightarrow$

b) Ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π.

$$s \equiv \begin{cases} A(1,-2,-3) \in s \\ \exists\, r \cap s \\ s // \pi \leftrightarrow \vec{w} \perp \vec{n} \leftrightarrow \vec{w} \cdot \vec{n} = 0 \to w_x \cdot n_x + w_y \cdot n_y + w_z \cdot n_z = 0 \to w_x \cdot 1 + w_y \cdot (-2) + w_z \cdot (-3) = 0 \end{cases}$$

$$w_x - 2w_y - 3w_z = 0 \to w_x = 2w_y + 3w_z$$

$$s \equiv \begin{cases} A(1,-2,-3) \\ \vec{w} = (2w_y + 3w_z, w_y, w_z) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \frac{x-1}{2w_y + 3w_z} = \frac{y+2}{w_y} = \frac{z+3}{w_z}$$

Como la recta s corta a r, tendrán un punto B en común que cumplirá las ecuaciones de ambas:

$$B = r \cap s \equiv \begin{cases} s \equiv \dfrac{x-1}{2w_y + 3w_z} = \dfrac{y+2}{w_y} = \dfrac{z+3}{w_z} \\ r \equiv \begin{cases} y = -1 - x \\ z = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{2w_y + 3w_z} = \frac{-1-x+2}{w_y} = \frac{0+3}{w_z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{2w_y + 3w_z} = \frac{x-1}{-w_y} = \frac{3}{w_z} \to 2w_y + 3w_z = -w_y \to 3w_z = -3w_y \to w_z = -w_y \to w_y = -w_z$$

$$\vec{w} \equiv \begin{cases} w_x = 2w_y + 3w_z \\ w_y = -w_z \end{cases} \Rightarrow \vec{w} = \left(-2w_z + 3w_z , -w_z , w_z \right) \xrightarrow{\text{si } w_z=1} \vec{w} = \left(-2+3 , -1 , 1 \right) = \left(1 , -1 , 1 \right)$$

$$\boxed{s \equiv \begin{cases} A\left(1 , -2 , -3 \right) \\ \vec{w} = \left(1 , -1 , 1 \right) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+3}{1} \Rightarrow s \equiv x-1 = -y-2 = z+3}$$

39. Calcula la distancia del punto (0 , 0 , 7) al plano determinado por los puntos (0 , 0 , 0) , (0 , 2 , 2) y (2 , 0 , 2) .

$P\left(0 , 0 , 7 \right)$

$$\pi \equiv \begin{cases} O\left(0,0,0 \right) \\ N\left(0,2,2 \right) \\ M\left(2,0,2 \right) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} O\left(0,0,0 \right) \\ \vec{n} = \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OM} = \left(0,2,2 \right) \times \left(2,0,2 \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} - 4 \cdot \vec{k} = \left(4 ,.4 , -4 \right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} O\left(0,0,0 \right) \\ \vec{n} = \left(1 ,.1 , -1 \right) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv x + y - z + D = 0 \xrightarrow{O\left(0,0,0 \right) \in \pi} D = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y - z = 0$$

$$\boxed{d\left(P , \pi \right) = \frac{| A \cdot x_P + B \cdot y_P + C \cdot z_P + D |}{\left| \vec{n} \right|} = \frac{| 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 7 + 0 |}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{| 0 + 0 - 7 + 0 |}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{| -7 |}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3} \approx 4 \text{ u}}$$

40. Hallar razonadamente las ecuaciones de los dos planos paralelos al plano π de ecuación $12x + 3y - 4z = 7$ que distan 6 unidades de π.

$$\pi \equiv 12x + 3y - 4z - 7 = 0 \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} P\left(0 , 1 , -1 \right) \\ \vec{n} = \left(12 , 3 , -4 \right) \end{cases} \quad ; \quad d\left(P , \pi \right) = \frac{| A \cdot x_P + B \cdot y_P + C \cdot z_P + D |}{\left| \vec{n} \right|}$$

$$\frac{\left| 12 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot \left(-1 \right) + D \right|}{\sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{\left| 0 + 3 + 4 + D \right|}{\sqrt{144 + 9 + 16}} = \frac{\left| 7 + D \right|}{\sqrt{169}} = \frac{\left| 7 + D \right|}{13} = 6 \rightarrow \left| 7 + D \right| = 6 \cdot 13 = 78 \rightarrow \begin{cases} D_1 = 71 \\ D_2 = -85 \end{cases}$$

$$\boxed{\pi_1 \equiv 12x + 3y - 4z + 71 = 0 \quad ; \quad \pi_2 \equiv 12x + 3y - 4z - 85 = 0}$$

41. Obtener las ecuaciones de las rectas obtenidas al cortar cada uno de los planos $\pi_1 : x + y + z = 3$, $\pi_2 : x - z = 0$ y $\pi_3 : y - z = 0$ con el plano $\pi_4 : z = 0$.

Esos cuatro planos limitan un tetraedro del que se obtendrá el área de la cara situada en el plano π_4 y la altura sobre esa cara, explicando el método utilizado.

$$r_1 \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv x+y+z-3=0 \\ \pi_4 \equiv z=0 \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x+y+z-3=0 \xrightarrow{y=\lambda_1} x+\lambda_1-3=0 \rightarrow x=3-\lambda_1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x=3-\lambda_1 \\ y=\quad \lambda_1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} P_1(3,0,0) \\ \vec{v}_1=(-1,1,0) \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv (x,y,z)=(3,0,0)+\lambda_1\cdot(-1,1,0) \Rightarrow$$

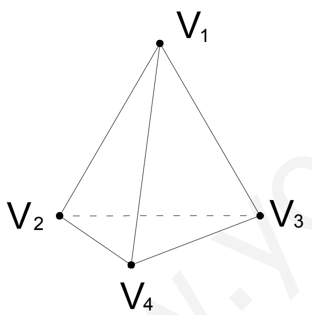
$$\Rightarrow r_1 = \frac{x-3}{-1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{0} \Rightarrow r_1 \equiv -x+3=y \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x+y \quad =3 \\ \qquad z=0 \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} \pi_2 \equiv x-z=0 \\ \pi_4 \equiv z=0 \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \xrightarrow{y=\lambda_2} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=\quad \lambda_2 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} P_2(0,0,0) \\ \vec{v}_2=(0,1,0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 \equiv (x,y,z)=(0,0,0)+\lambda_1\cdot(0,1,0) \Rightarrow r_2 = \frac{x-0}{0}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{0} \Rightarrow r_2 \equiv \frac{x}{0}=y=\frac{z}{0} \Rightarrow r_2 \equiv y$$

$$r_3 \equiv \begin{cases} \pi_3 \equiv y-z=0 \\ \pi_4 \equiv z=0 \end{cases} \Rightarrow r_3 \equiv \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \xrightarrow{x=\lambda_3} \Rightarrow r_3 \equiv \begin{cases} x=\quad \lambda_3 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow r_3 \equiv \begin{cases} P_3(0,0,0) \\ \vec{v}_3=(1,0,0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_3 \equiv (x,y,z)=(0,0,0)+\lambda_1\cdot(1,0,0) \Rightarrow r_3 = \frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-0}{0} \Rightarrow r_3 \equiv x=\frac{y}{0}=\frac{z}{0} \Rightarrow r_3 \equiv z$$



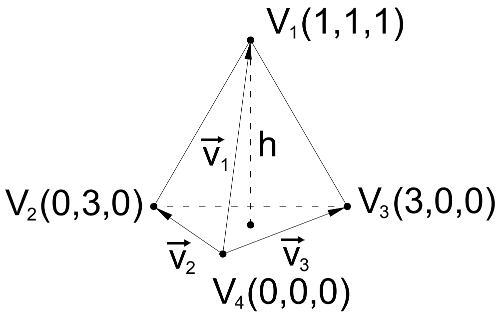
$$V_1 \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv x+y+z-3=0 \\ \pi_2 \equiv x \quad -z \quad =0 \\ \pi_3 \equiv \quad y-z \quad =0 \end{cases} \Rightarrow V_1 \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \\ x \quad -z=0 \\ \quad y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2}$$

$$\xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2\ ;\ -\frac{1}{3}\cdot F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow V_1 \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \xrightarrow[z=1]{y=1} x=1 \\ y+2z=3 \xrightarrow{z=1} y=1 \Rightarrow V_1(1,1,1) \\ z=1 \end{cases}$$

$$V_2 \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv x+y+z-3=0 \\ \pi_2 \equiv x \quad -z \quad =0 \\ \pi_4 \equiv \quad z \quad =0 \end{cases} \Rightarrow V_2 \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \xrightarrow[z=0]{x=0} y=3 \\ x \quad -z=0 \xrightarrow{z=0} x=0 \Rightarrow V_2(0,3,0) \\ \quad z=0 \end{cases}$$

$$V_3 \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv x+y+z-3=0 \\ \pi_3 \equiv \quad y-z \quad =0 \\ \pi_4 \equiv \quad\quad z \quad =0 \end{cases} \Rightarrow V_3 \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \xrightarrow[z=0]{y=0} x=3 \\ \quad y-z=0 \xrightarrow{z=0} y=0 \\ \quad\quad z=0 \end{cases} \Rightarrow V_3\,(\,3\,,0\,,0\,)$$

$$V_4 \equiv \begin{cases} \pi_2 \equiv x \quad -z=0 \\ \pi_3 \equiv \quad y-z=0 \\ \pi_4 \equiv \quad\quad z=0 \end{cases} \Rightarrow V_4 \equiv \begin{cases} x \quad -z=0 \xrightarrow[z=0]{y=0} x=0 \\ \quad y-z=0 \xrightarrow{z=0} y=0 \\ \quad\quad z=0 \end{cases} \Rightarrow V_4\,(\,0\,,0\,,0\,)$$



$\overrightarrow{v_1} = (\,1\,,1\,,1\,)$

$\overrightarrow{v_2} = (\,0\,,3\,,0\,)$

$\overrightarrow{v_3} = (\,3\,,0\,,0\,)$

$$A = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{v_2}\times\overrightarrow{v_3}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|(\,0\,,3\,,0\,)\times(\,3\,,0\,,0\,)\right| = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\left|-9\cdot\vec{k}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|(\,0\,,0\,,\text{-}9)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+9^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{0+0+81} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{81} = \frac{9}{2}\ u^2$$

$$h = d(\,V_1\,,\pi_4\,) = \frac{\left|A\cdot x_{V1}+B\cdot y_{V1}+C\cdot z_{V1}+D\right|}{\left|\overrightarrow{n_{\pi 4}}\right|} = \frac{\left|0\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1+0\right|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{\left|0+0+1+0\right|}{\sqrt{0+0+1}} = \frac{\left|1\right|}{\sqrt{1}} = \frac{1}{1} = 1\ u$$

42. Sea r_1 la recta que pasa por los puntos A = (0 , 0 , 0) y B = (80 , 10, 0) y sea r_2 la recta que pasa por C = (0 , 0 , 10) y D = (m , 10 , 10).

Obtener la distancia entre r_1 y r_2. Justificar geométricamente que la distancia entre r_1 y r_2 es independiente del valor de m.

$$r_1 \equiv \begin{cases} A(\,0,0,0\,) \\ B(\,80,10,0\,) \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} A(\,0,0,0\,) \\ \overrightarrow{v_1} = (\,80,10,0\,) \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv (\,x,y,z\,) = (\,0,0,0\,) + \lambda\cdot(\,80,10,0\,) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x = 80\lambda \\ y = 10\lambda \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \frac{x-0}{80} = \frac{y-0}{10} = \frac{z-0}{0} \to r_1 \equiv \frac{x}{8} = y = \frac{z}{0} \to r_1 \equiv x = 8y = \frac{z}{0} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x - 8y \quad = 0 \\ \quad\quad z = 0 \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} C(0,0,10) \\ D(m,10,10) \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} C(0,0,10) \\ \overrightarrow{v_2}=(m,10,0) \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv (x,y,z)=(0,0,10)+\mu\cdot(m,10,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x=m\mu \\ y=10\mu \\ z=10 \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \frac{x-0}{m}=\frac{y-0}{10}=\frac{z-10}{0} \rightarrow r_2 \equiv \frac{x}{m}=\frac{y}{10}=\frac{z-10}{0} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} 10x-my=0 \\ z=10 \end{cases}$$

Si $m=80 \rightarrow r_1 // r_2$:

$$d(r_1,r_2)=d(A,r_2)=\frac{\left|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{v_2}\right|}{\left|\overrightarrow{v_2}\right|}=\frac{|(0,0,-10)\times(80,10,0)|}{\sqrt{80^2+10^2+0^2}}=\frac{\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -10 \\ 80 & 10 & 0 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{6400+100+0}}=$$

$$=\frac{\left|(-10)\cdot 10\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -10 \\ 80 & 10 & 0 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{6500}}=\frac{\left|-100\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{65\cdot 100}}=\frac{\left|-100\cdot\left(8\vec{j}-\vec{i}\right)\right|}{\sqrt{65}\cdot\sqrt{100}}=\frac{|-100\cdot(-1,8,0)|}{10\sqrt{65}}=$$

$$=\frac{100\cdot|(-1,8,0)|}{10\sqrt{65}}=\frac{10\cdot\sqrt{1^2+8^2+0^2}}{\sqrt{65}}=\frac{10\cdot\sqrt{1+64+0}}{\sqrt{65}}=\frac{10\cdot\sqrt{65}}{\sqrt{65}}=10\,u$$

Si $m \neq 80 \rightarrow r_1$ y r_2 se cruzan:

$$\begin{cases} \pi \subset r_1 \\ \pi // r_2 \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} A(0,0,0) \\ \vec{n}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=(80,10,0)\times(m,10,0)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 80 & 10 & 0 \\ m & 10 & 0 \end{vmatrix}=80\cdot\vec{k}-10m\cdot\vec{k}=(0,0,80-10m) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv (80-10m)\cdot z+D=0 \xrightarrow{A(0,0,0)\in\pi} \pi \equiv (80-10m)\cdot z=0$$

$$d(r_1,r_2)=d(C,\pi)=\frac{|A\cdot x_c+B\cdot y_c+C\cdot z_c+D|}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{|0\cdot 0+0\cdot 0+(80-10m)\cdot 10+0|}{\sqrt{0^2+0^2+(80-10m)^2}}=\frac{100\cdot|8-m|}{10\cdot|8-m|}=10\,u$$

<u>Puesto que la distancia entre ambas rectas es de 10 unidades tanto si son paralelas como si se cruzan, entonces es que la distancia entre r_1 y r_2 no depende del valor de m.</u>

43. Dados los puntos A = (1 , -2 , 3) y B = (0 , 2 , 1) se pide:

a) La ecuación paramétrica de la recta que pasa por ambos puntos.

$$r \equiv \begin{cases} A(1,-2,3) \\ B(0,2,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} A(1,-2,3) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-1,4,-2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv (x,y,z) = (1,-2,3) + \lambda \cdot (-1,4,-2) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

b) **La ecuación del plano π que está a igual distancia de A y de B y es perpendicular a la recta AB.**

$$d(A,C) = d(B,C) \to C\left(\frac{1}{2},0,2\right)$$

$$\pi \equiv \begin{cases} C\left(\frac{1}{2},0,2\right) \\ \vec{n} = (1,-4,2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv x - 4y + 2z + D = 0 \xrightarrow{C\in\pi} \frac{1}{2} - 4\cdot 0 + 2\cdot 2 + D = 0 \to \frac{1}{2} - 0 + 4 + D = 0 \to$$

$$\to \frac{1}{2} - 0 + \frac{8}{2} + D = 0 \to \frac{9}{2} + D = 0 \to D = -\frac{9}{2} \Rightarrow \pi \equiv x - 4y + 2z - \frac{9}{2} = 0 \to \pi \equiv 2x - 8y + 4z - 9 = 0$$

c) **La distancia al origen de la recta intersección del plano 2y –z = 0 con el plano π del apartado b).**

$$s = \pi \cap \pi' \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \pi \equiv 2x - 8y + 4z - 9 = 0 \\ \pi' \equiv 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} 2x - 8y + 4z = 9 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \xrightarrow{z=\mu} s \equiv \begin{cases} 2x - 8y + 4\mu = 9 \\ 2y - \mu = 0 \end{cases} \to$$

$$\to s \equiv \begin{cases} 2x - 8y = 9 - 4\mu \xrightarrow{y=\frac{\mu}{2}} 2x - 8\cdot\frac{\mu}{2} = 9 - 4\mu \to 2x - 4\mu = 9 - 4\mu \to 2x = 9 \to x = \frac{9}{2} \\ 2y = \mu \to y = \frac{\mu}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = \frac{\mu}{2} \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow s \equiv \left(\frac{9}{2},0,0\right) + \mu\cdot\left(0,\frac{1}{2},1\right) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} D\left(\frac{9}{2},0,0\right) \\ \vec{w} = (0,1,2) \end{cases}$$

$$d(O,s)=\frac{\left|\overrightarrow{DO}\times\vec{w}\right|}{\left|\vec{w}\right|}=\frac{\left|\left(-\frac{9}{2},0,0\right)\times(0,1,2)\right|}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}}=\frac{\left|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-\frac{9}{2}&0&0\\0&1&2\end{vmatrix}\right|}{\sqrt{0+1+4}}=\frac{\left|-\frac{9}{2}\cdot\vec{k}+\frac{18}{2}\cdot\vec{j}\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|\left(0,9,-\frac{9}{2}\right)\right|}{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{\sqrt{0^2+9^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{0+81+\frac{81}{4}}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{\frac{324}{4}+\frac{81}{4}}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{\frac{405}{4}}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{\frac{81}{4}\cdot 5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{\frac{81}{4}}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{4}}=\frac{9}{2}\ u$$

44. a) Hallar la distancia del punto P = (3 , -1 , 4) a la recta r intersección de los planos:

$$\boldsymbol{\pi_1 : 2x+y-z+5=0}$$
$$\boldsymbol{\pi_2 : 4x+4y-z+9=0}$$

$$r=\pi_1\cap\pi_2\Rightarrow r\equiv\begin{cases}\pi_1\equiv 2x+\ \ y-z+5=0\\ \pi_2\equiv 4x+4y-z+9=0\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}2x+\ \ y-z=-5\\ 4x+4y-z=-9\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&-5\\4&4&-1&-9\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-2\cdot F_1}$$

$$\xrightarrow{F_2-2\cdot F_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&-5\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow r\equiv\begin{cases}2x+y-z=-5\\ \quad 2y+z=\ \ 1\end{cases}\xrightarrow{z=\lambda}r\equiv\begin{cases}2x+y-\lambda=-5\xrightarrow{y=\frac{1-\lambda}{2}}*\\ \quad 2y+\lambda=\ \ 1\rightarrow 2y=1-\lambda\rightarrow y=\dfrac{1-\lambda}{2}\end{cases}$$

$$*\rightarrow 2x+\frac{1-\lambda}{2}-\lambda=-5\rightarrow 4x+1-\lambda-2\lambda=-10\rightarrow 4x+1-3\lambda=-10\rightarrow 4x=-11+3\lambda\rightarrow x=\frac{-11+3\lambda}{4}$$

$$r\equiv\begin{cases}x=-\dfrac{11}{4}+\dfrac{3\lambda}{4}\\ y=\quad\dfrac{1}{2}-\dfrac{\lambda}{2}\\ z=\qquad\quad\lambda\end{cases}\xrightarrow{z=\lambda=4\mu}r\equiv\begin{cases}x=-\dfrac{11}{4}+3\mu\\ y=\quad\dfrac{1}{2}-2\mu\\ z=\qquad 4\mu\end{cases}\Rightarrow r\equiv(x,y,z)=\left(-\frac{11}{4},\frac{1}{2},0\right)+\mu\cdot(3,-2,4)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r\equiv\begin{cases}Q\left(-\dfrac{11}{4},\dfrac{1}{2},0\right)\\ \vec{v}=(3,-2,4)\end{cases}\Rightarrow\ \overrightarrow{QP}=\left(3+\frac{11}{4},-1-\frac{1}{2},4\right)=\left(\frac{12}{4}+\frac{11}{4},-\frac{2}{2}-\frac{1}{2},4\right)=\left(\frac{23}{4},-\frac{3}{2},4\right)$$

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{QP}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{23}{4} & -\frac{3}{2} & 4\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{3^2+2^2+4^2}}=\frac{\left|-6\cdot\vec{i}+12\cdot\vec{j}-\frac{23}{2}\cdot\vec{k}+\frac{9}{2}\cdot\vec{k}-23\cdot\vec{j}+8\cdot\vec{i}\right|}{\sqrt{9+4+16}}=\frac{\left|(2,-11,-7)\right|}{\sqrt{29}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2^2+11^2+7^2}}{\sqrt{29}}=\frac{\sqrt{4+121+49}}{\sqrt{29}}=\frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}}=\frac{\sqrt{2\cdot 3\cdot 29}}{\sqrt{29}}=\frac{\sqrt{2\cdot 3}\cdot\sqrt{29}}{\sqrt{29}}=\sqrt{6}\approx 2'449\ u$$

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta r y el punto P.

$$\pi\equiv\begin{cases}P(3,-1,4)\\ r\equiv\begin{cases}Q\left(-\frac{11}{4},\frac{1}{2},0\right)\\ \vec{v}=(3,-2,4)\end{cases}\end{cases}\Rightarrow\pi\equiv\begin{cases}P(3,-14)\\ \vec{n}=\overrightarrow{QP}\times\vec{v}=(2,-11,-7)\end{cases}\Rightarrow\pi\equiv 2x-11y-7z+D=0\xrightarrow{P\in\pi}$$

$$\xrightarrow{P\in\pi}2\cdot 3-11\cdot(-1)-7\cdot 4+D=0\rightarrow 6+11-28+D=0\rightarrow -11+D=0\rightarrow D=11$$

$$\boxed{\pi\equiv 2x-11y-7z+11=0}$$

45. Consideremos los planos

$$\pi_1: x+y-6=0$$
$$\pi_2: 2x+4y+\lambda z+2=0$$

donde λ es un parámetro real. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2 cuando $\lambda=4$.

Si $\lambda = 4$:

$$r \equiv \begin{cases} \pi_1 : x + y - 6 = 0 \\ \pi_2 : 2x + 4y + 4z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x + \ \ y \qquad = \ \ 6 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 2z + x + 2y = -1 \\ \qquad x + \ \ y = \ \ 6 \end{cases} \xrightarrow{x = \mu}$$

$$\xrightarrow{x = \mu} r \equiv \begin{cases} 2z + \mu + 2y = -1 \xrightarrow{y = 6 - \mu} 2z + \mu + 2 \cdot (6 - \mu) = -1 \to 2z + \mu + 12 - 2\mu = -1 \to * \\ \qquad \mu + \ \ y = \ \ 6 \to y = 6 - \mu \end{cases}$$

$$* \to 2z + 12 - \mu = -1 \to 2z = -1 - 12 + \mu = -13 + \mu \to z = \frac{-13 + \mu}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \qquad \mu \\ y = 6 \quad - \mu \\ z = \dfrac{-13}{2} + \dfrac{\mu}{2} \end{cases} \xrightarrow{\mu = 2\upsilon}$$

$$\xrightarrow{\mu = 2\upsilon} r \equiv \begin{cases} x = \qquad 2\upsilon \\ y = \quad 6 - 2\upsilon \\ z = \dfrac{-13}{2} + \upsilon \end{cases} \Rightarrow r \equiv (x, y, z) = \left(0, 6, -\frac{13}{2}\right) + \upsilon \cdot (2, -2, 1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} P\left(0, 6, -\dfrac{13}{2}\right) \\ \vec{v} = (2, -2, 1) \end{cases}$$

b) **Calcular razonadamente λ para que los planos π_1 y π_2 se corten formando un ángulo 45º.**

$$\pi_1 \equiv x + y - 6 = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{cases} P_1(0, 6, 0) \\ \vec{n_1} = (1, 1, 0) \end{cases} \quad ; \quad \pi_2 \equiv 2x + 4y + \lambda z + 2 = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv \begin{cases} P_2(-1, 0, 0) \\ \vec{n_2} = (2, 4, \lambda) \end{cases}$$

$$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = \left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right| \cdot \cos\ \alpha \to \cos\ \alpha = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right|}$$

$$\cos 45º = \frac{(1,1,0) \cdot (2,4,\lambda)}{|(1,1,0)| \cdot |(2,4,\lambda)|} = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot \lambda}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2 + \lambda^2}} = \frac{2 + 4 + 0}{\sqrt{1 + 1 + 0} \cdot \sqrt{4 + 16 + \lambda^2}} = \frac{6}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{20 + \lambda^2}}$$

$$\cos 45º = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{20 + \lambda^2}} \to 1 = \frac{6}{\sqrt{20 + \lambda^2}} \to \sqrt{20 + \lambda^2} = 6 \to 20 + \lambda^2 = 6^2 = 36 \to \lambda^2 = 36 - 20 = 16$$

$$\boxed{\lambda = \sqrt{16} = \pm 4}$$

46. Dado el plano definido por la ecuación $\pi : 8x - 4y + z = 3$ hallar :

a) La ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P (1 , -3 , 7) , expresada como la intersección de dos planos.

$$\pi \equiv 8x - 4y + z - 3 = 0 \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} Q(0,0,3) \\ \vec{n} = (8,-4,1) \end{cases}$$

$$r \equiv \begin{cases} P(1,-3,7) \\ \vec{v} = (8,-4,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv (x,y,z) = (1,-3,7) + \lambda \cdot (8,-4,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \ \ 1 + 8\lambda \\ y = -3 - 4\lambda \\ z = \ \ 7 + \ \lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{8} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-7}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} -4x + 4 = 8y + 24 \\ y + 3 = -4z + 28 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} -4x - 8y - 20 = 0 \\ y + 4z - 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x + 2y + 5 = 0 \\ y + 4z - 25 = 0 \end{cases}$$

b) La distancia del punto P al plano π.

$$d(P,\pi) = \frac{|A \cdot x_P + B \cdot y_P + C \cdot z_P + D|}{|\vec{n}|} = \frac{|8 \cdot 1 - 4 \cdot (-3) + 1 \cdot 7 - 3|}{\sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{|8 + 12 + 7 - 3|}{\sqrt{64 + 16 + 1}} = \frac{|24|}{\sqrt{81}} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3} \ u$$

c) Las ecuaciones de los planos que distan 3 unidades del plano π.

$$d(Q,\pi') = \frac{|A \cdot x_Q + B \cdot y_Q + C \cdot z_Q + D'|}{|\vec{n}|} = \frac{|8 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + D'|}{9} = \frac{|0 - 0 + 3 + D'|}{9} = \frac{|3 + D'|}{9} = 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow |3 + D'| = 3 \cdot 9 = 27 \rightarrow \begin{cases} 3 + D' = 27 \rightarrow D' = 27 - 3 = 24 \\ 3 + D'' = -27 \rightarrow D'' = -27 - 3 = -30 \end{cases}$$

$$\boxed{\pi' \equiv 8x - 4y + z + 24 = 0 \quad ; \quad \pi'' \equiv 8x - 4y + z - 30 = 0}$$

47. Sean r y r' las rectas del espacio R^3, determinadas del modo siguiente: r pasa por los puntos A = (3 , 6 , 7) y B = (7 , 8 , 3) y r' es la recta intersección de los planos de ecuaciones:

$$\mathbf{x - 4y - z + 24 = -10 \quad y \quad 3x - 4y + z + 24 = -2}$$

Se pide:

a) Calcular de cada una de las rectas r y r' una ecuación paramétrica y determinar la posición relativa de ambas.

$$r \equiv \begin{cases} A(3,6,7) \\ B(7,8,3) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} A(3,6,7) \\ \vec{v} = (4,2,-4) \equiv (2,1,-2) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 6 + \ \lambda \\ z = 7 - 2\lambda \end{cases}$$

$$r'\equiv\begin{cases}x-4y-z=-10\\3x-4y+z=-2\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-4&-1&-10\\3&-4&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-3\cdot F_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-4&-1&-10\\0&8&4&28\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{4}\cdot F_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-4&-1&-10\\0&2&1&7\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r'\equiv\begin{cases}x-4y-z=-10\\2y+z=\quad 7\end{cases}\xrightarrow{z=\mu} r'\equiv\begin{cases}x-4y=-10+\mu\xrightarrow{y=\frac{7-\mu}{2}} x-4\cdot\dfrac{7-\mu}{2}=-10+\mu\to *\\2y=\quad 7-\mu\to y=\dfrac{7-\mu}{2}\end{cases}$$

$$*\to x-14+2\mu=-10+\mu\to x=4-\mu\Rightarrow r'\equiv\begin{cases}x=4-\mu\\y=\dfrac{7}{2}-\dfrac{\mu}{2}\\z=\quad\mu\end{cases}\xrightarrow{z=\lambda=2\upsilon} r'\equiv\begin{cases}x=4-2\upsilon\\y=\dfrac{7}{2}-\upsilon\\z=\quad 2\upsilon\end{cases}\Rightarrow r'\equiv\begin{cases}C\left(4,\dfrac{7}{2},0\right)\\\vec{w}=(-2,-1,2)\end{cases}$$

$$\boxed{r\equiv\begin{cases}x=3+2\lambda\\y=6+\lambda\\z=7-2\lambda\end{cases}\;;\quad r'\equiv\begin{cases}x=4-2\upsilon\\y=\dfrac{7}{2}-\upsilon\\z=\quad 2\upsilon\end{cases}}$$

Las rectas son paralelas o coincidentes porque (2 , 1 , -2) // (-2 , -1 , 2) :

$$A(3,6,7)\in r'?\to r'(A)\equiv\begin{cases}3-4\cdot 6-7=-10\\2\cdot 6+7=-2\end{cases}\Rightarrow r'(A)\equiv\begin{cases}-28\neq -10\\19\neq -2\end{cases}\Rightarrow A\notin r'\Rightarrow r\,//\,r'$$

<u>Las rectas r y r ‘ son paralelas.</u>

b) Calcular la distancia d entre las rectas r y r ‘.

$$d(r,r')=d(A,r')=\frac{\left|\overrightarrow{CA}\times\vec{w}\right|}{\left|\vec{w}\right|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&\frac{5}{2}&7\\-2&-1&2\end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{\left|5\cdot\vec{i}-14\cdot\vec{j}+\vec{k}+5\cdot\vec{k}+2\cdot\vec{j}+7\cdot\vec{i}\right|}{\sqrt{4+1+4}}=$$

$$=\frac{|(12,-12,6)|}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{12^2+12^2+6^2}}{3}=\frac{\sqrt{144+144+36}}{3}=\frac{\sqrt{324}}{3}=\frac{18}{3}=6\,u$$

c) Calcular el área del triángulo de vértices A , B y C , siendo C un punto cualquiera de la recta r ’ .

$$A=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 2 & -4\\ 1 & -\frac{5}{2} & -7\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\left|-14\cdot\vec{i}-4\cdot\vec{j}-10\cdot\vec{k}-2\cdot\vec{k}+28\cdot\vec{j}-10\cdot\vec{i}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left|(-24,24,-12)\right|=\left|(-12,12,-6)\right|=\sqrt{12^2+12^2+6^2}=\sqrt{144+144+36}=\sqrt{324}=18\ u^2$$

48. Sean r la recta y π el plano de R^3, determinados del siguiente modo: r pasa por los puntos (2 , 2 , 4) y (-1 , 2 , 1) y π pasa por los puntos (1 , 0 , 1) , (1 , -1 , 0) y (3 , 0 , 0).
Se pide:

a) Probar que la recta r no es paralela a π.

$$r\equiv\begin{cases}A(2,2,4)\\ B(-1,2,1)\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}A(2,2,4)\\ \vec{v}=(-3,0,-3)\equiv(1,0,1)\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=2\\ z=4+\lambda\end{cases}\Rightarrow r\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-4}{1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r\equiv\begin{cases}y-2=0\\ x-2=z-4\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x\quad -z=-2\\ \quad y\quad =2\end{cases}$$

$$\pi\equiv\begin{cases}C(1,0,1)\\ D(1,-1,0)\\ E(3,0,0)\end{cases}\Rightarrow\pi\equiv\begin{cases}E(3,0,0)\\ \vec{n}=(-2,0,1)\times(-2,-1,0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 0 & 1\\ -2 & -1 & 0\end{vmatrix}=-2\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{k}+\vec{i}=(1,-2,2)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\pi\equiv x-2y+2z+D=0\xrightarrow{E(3,0,0)\in\pi}D=-3\Rightarrow\pi\equiv x-2y+2z-3=0$$

$$r\,//\,\pi\longleftrightarrow\vec{v}\perp\vec{n}\longleftrightarrow\vec{v}\cdot\vec{n}=0\longrightarrow(1,0,1)\cdot(1,-2,2)=1+2\neq 0\longrightarrow\text{La recta r no es paralela al plano }\pi$$

b) Calcular el punto P intersección de r y π y el ángulo que forman la recta r y el plano π.

$$P=r\cap\pi\to P\equiv\begin{cases}r\equiv\begin{cases}x\quad -z=-2\\ \quad y\quad =2\end{cases}\\ \pi\equiv x-2y+2z=3\end{cases}\Rightarrow P\equiv\begin{cases}x-2y+2z=3\\ x\quad -z=-2\\ \quad y\quad =2\end{cases}\xrightarrow{y=2}P\equiv\begin{cases}x-4+2z=3\xrightarrow{x=z-2}*\\ x\quad -z=-2\to x=z-2\end{cases}$$

$$*\xrightarrow{x=z-2}z-2-4+2z=3\to 3z-6=3\to 3z=3+6=9\to z=\frac{9}{3}=3\Rightarrow x=3-2=1\Rightarrow P\equiv\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=3\end{cases}$$

$$\boxed{P(1,2,3)}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{n}=\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|\cdot\cos\alpha\longrightarrow\cos\alpha=\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\longrightarrow\alpha=\arccos\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\arccos\frac{(1,0,1)\cdot(1,-2,2)}{\left|(1,0,1)\right|\cdot\left|(1,-2,2)\right|}=$$

$$=\arccos\frac{1+0+2}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+4+4}}=\arccos\frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}}=\arccos\frac{3}{\sqrt{2}\cdot 3}=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=45^{\circ}$$

c) Determinar los puntos S y T de la recta r que cumplan que su distancia a π sea 4.

$$d(Q,\pi)=\frac{|A\cdot x_Q+B\cdot y_Q+C\cdot z_Q+D|}{|\vec{n}|}=\frac{|1\cdot x_Q-2\cdot y_Q+2\cdot z_Q-3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|x_Q-2y_Q+2z_Q-3|}{\sqrt{1+4+4}}=$$

$$=\frac{|x_Q-2y_Q+2z_Q-3|}{\sqrt{9}}=\frac{|x_Q-2y_Q+2z_Q-3|}{3}=4\rightarrow|x_Q-2y_Q+2z_Q-3|=12\xrightarrow{r\equiv\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=2\\ z=4+\lambda\end{cases}}$$

$$\xrightarrow{r\equiv\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=2\\ z=4+\lambda\end{cases}}|2+\lambda-2\cdot2+2\cdot(4+\lambda)-3|=12\rightarrow|2+\lambda-2\cdot2+8+2\lambda-3|=12\rightarrow|3\lambda+3|=12\rightarrow$$

$$\rightarrow|\lambda+1|=4\rightarrow\begin{cases}\lambda+1=-4\rightarrow\lambda=-4-1=-5\\ \lambda+1=\ \ 4\rightarrow\lambda=4-1=3\end{cases}$$

$$\boxed{S\equiv\begin{cases}x=2-5=-3\\ y=2\\ z=4-5=-1\end{cases}\Rightarrow S(-3,2,-1)\quad;\quad T\equiv\begin{cases}x=2+3=5\\ y=2\\ z=4+3=7\end{cases}\Rightarrow T(5,2,7)}$$

49. Sean A , B y C los puntos de intersección del plano de ecuación x + 4y – 2z – 4 = 0 con los tres ejes coordenados OX , OY y OZ , respectivamente.
Se pide:

a) El área del triángulo ABC.

$$\pi\equiv x+4y-2z-4=0$$

$$A(x_A,0,0)\xrightarrow{A\in\pi}A(4,0,0)$$

$$B(0,y_B,0)\xrightarrow{B\in\pi}B(0,1,0)$$

$$C(0,0,z_B)\xrightarrow{C\in\pi}C(0,0,-2)$$

$$A_t=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot|(-4,1,0)\times(-4,0,-2)|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-4&1&0\\-4&0&-2\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\left|-2\cdot\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-4&1&0\\2&0&1\end{vmatrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{2}\cdot\left\|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-4&1&0\\2&0&1\end{vmatrix}\right\|=\left|-\vec{i}+2\cdot\vec{k}-4\cdot\vec{j}\right|=|(-1,-4,2)|=\sqrt{1^2+4^2+2^2}=\sqrt{1+16+4}=\sqrt{21}\approx4'582\ u^2$$

b) El perímetro del triángulo ABC.

$$P_t = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|(-4,1,0)\right| + \left|(0,-1,-2)\right| + \left|(-4,0,-2)\right| =$$
$$= \sqrt{4^2+1^2+0^2} + \sqrt{0^2+1^2+2^2} + \sqrt{4^2+0^2+2^2} = \sqrt{16+1+0} + \sqrt{0+1+4} + \sqrt{16+0+4} =$$
$$= \sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{17} + \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = \sqrt{17} + 3\sqrt{5} \approx 10'813 \ u$$

c) Los tres ángulos interiores del triángulo ABC.

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|\cdot\cos\alpha \longrightarrow \alpha = \text{arc cos}\,\frac{\left|\vec{v}\cdot\vec{w}\right|}{\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{w}\right|}$$

$$\hat{A} = \text{arc cos}\,\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \text{arc cos}\,\frac{\left|(-4,1,0)\cdot(-4,0,-2)\right|}{\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{5}} = \text{arc cos}\,\frac{|16|}{2\sqrt{85}} = \text{arc cos}\,\frac{8}{\sqrt{85}} \approx 29'805^\circ$$
$$\hat{B} = \text{arc cos}\,\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \text{arc cos}\,\frac{\left|(-4,1,0)\cdot(0,-1,-2)\right|}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{5}} = \text{arc cos}\,\frac{|-1|}{\sqrt{85}} = \text{arc cos}\,\frac{1}{\sqrt{85}} \approx 83'773^\circ$$
$$\hat{C} = \text{arc cos}\,\frac{\left|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \text{arc cos}\,\frac{\left|(-4,0,-2)\cdot(0,-1,-2)\right|}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \text{arc cos}\,\frac{|4|}{10} = \text{arc cos}\,\frac{2}{5} \approx 66'422^\circ$$

50. Dados los puntos O (0 , 0 , 0) , A (4 , 4 , 0) y P (0 , 0 , 12) se pide obtener razonadamente:
a) La ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular al plano de ecuación z = 0.

$$\pi \equiv z = 0 \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{n}(0,0,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} A(4,4,0) \\ \vec{v}(0,0,1) \end{cases}$$

$$r \equiv (x,y,z) = (4,4,0) + \lambda\cdot(0,0,1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = \lambda \end{cases} \quad ; \quad r \equiv \frac{x-4}{0} = \frac{y-4}{0} = \frac{z}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x - 4 = 0 \\ y - 4 = 0 \end{cases}$$

b) La ecuación de un plano que cumpla las dos condiciones siguientes:

- **Pase por P y por un punto Q de la recta de ecuación x = y = 4.**
- **Sea perpendicular a la recta que pasa por O y Q.**

La recta x = y = 4 es la misma recta r del apartado anterior, por lo cual un punto Q que pertenezca a la recta r tendrá como coordenadas Q (4 , 4, λ):

$$s \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ Q(4,4,\lambda) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} O(0,0,0) \\ \vec{w} = (4,4,\lambda) \end{cases}$$

$$\pi_0 \equiv \begin{cases} P(0,0,12) \\ \vec{n}(4,4,\lambda) \end{cases} \Rightarrow \pi_0 \equiv 4x + 4y + \lambda z + D = 0 \xrightarrow[Q(4,4,\lambda)\in\pi_0]{P(0,0,12)\in\pi_0} \begin{cases} 4\cdot 0 + 4\cdot 0 + \lambda\cdot 12 + D = 0 \to D = -12\lambda \\ 4\cdot 4 + 4\cdot 4 + \lambda\cdot\lambda + D = 0 \xrightarrow{D=-12\lambda} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{D=-12\lambda} \lambda^2 - 12\lambda + 32 = 0 \to \lambda = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4\cdot 1\cdot 32}}{2\cdot 1} = \frac{12 \pm \sqrt{144-128}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{12 \pm 4}{2} = 6 \pm 2 \to$$

$$\to \begin{cases} \lambda_1 = 6+2 = 8 \\ \lambda_2 = 6-2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = -12\cdot 8 = -96 \\ D_2 = -12\cdot 4 = -48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 \equiv 4x + 4y + 8z - 96 = 0 \to \pi_1 \equiv x + y + 2z - 24 = 0 \\ \pi_2 \equiv 4x + 4y + 4z - 48 = 0 \to \pi_2 \equiv x + y + z - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\pi_1 \equiv x + y + 2z - 24 = 0 \quad ; \quad \pi_2 \equiv x + y + z - 12 = 0}$$

ANÁLISIS

1. Calcular $\displaystyle\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx$

Resolveremos esta integral por partes:

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du \Rightarrow \begin{cases} u = \ln x \to du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx \to v = x \end{cases}$$

Además, debemos tener en cuenta que el logaritmo neperiano lo tomamos en valor absoluto, es decir, que si es negativo (cuando 0 < x < 1) se torna en positivo, de ahí que los extremos de la integral definida se modifican para tomar el valor correcto invirtiendo los valores de x comprendidos entre 1/e y 1:

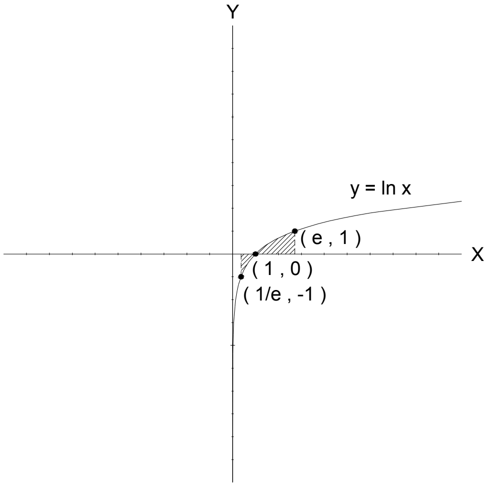
$$\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx = \left| \left| x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx \right| \right|_{1/e}^{e} = \left| x\cdot\ln x - x \right|_{1}^{1/e} + \left| x\cdot\ln x - x \right|_{1}^{e} =$$

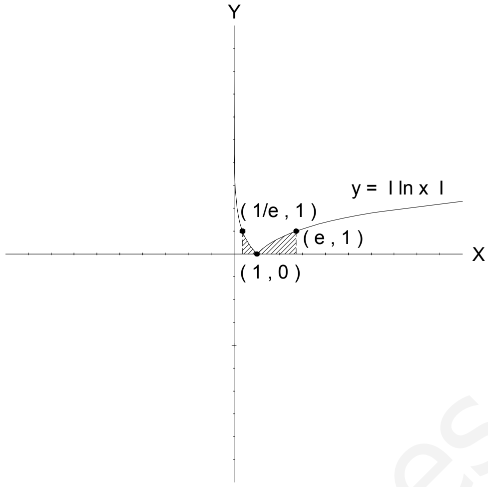
$$= \left[\left(\frac{1}{e}\cdot\ln\frac{1}{e} - \frac{1}{e} \right) - (\,1\cdot\ln 1 - 1\,) \right] + [\,(\,e\cdot\ln e - e\,) - (\,1\cdot\ln 1 - 1\,)\,] =$$

$$= \left[\frac{1}{e}\cdot\left(\ln\frac{1}{e} - 1 \right) + 1 + \ln 1 \right] + [\,e\cdot(\,\ln e - 1\,) + 1 - \ln 1\,] = \left[\frac{1}{e}\cdot(\,\ln 1 - \ln e - 1\,) + 1 + 0 \right] + [\,e\cdot(\,1 - 1\,) + 1 - 0\,] =$$

$$= \left[\frac{1}{e}\cdot(\,0 - 1 - 1\,) + 1 \right] + (\,e\cdot 0 + 1\,) = \left[\frac{1}{e}\cdot(-2) + 1 \right] + (\,0 + 1\,) = \frac{-2}{e} + 1 + 1 = 2 - \frac{2}{e}$$

$$\boxed{\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx = 2 - \frac{2}{e}}$$





2. Calcule el área comprendida entre el eje de abcisas y la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$.

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \rightarrow x\cdot\left(x^2 - 6x + 8\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 1\cdot 8}}{2\cdot 1} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \end{cases}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = 3 \pm 1 = \begin{cases} x_1 = 3 + 1 = 4 \\ x_2 = 3 - 1 = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \rightarrow \begin{cases} f(1) = 1^3 - 6\cdot 1^2 + 8\cdot 1 = 1 - 6 + 8 = 9 - 6 = 3 > 0 \\ f(3) = 3^3 - 6\cdot 3^2 + 8\cdot 3 = 27 - 54 + 24 = 51 - 54 = -3 < 0 \end{cases}$$

$$A = \int_0^2 \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right) dx - \int_2^4 \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 4x^3\, dx - 2\int_0^2 3x^2\, dx + 4\int_0^2 2x\, dx - \frac{1}{4}\int_2^4 4x^3\, dx + 2\int_2^4 3x^2\, dx - 4\int_2^4 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left| x^4 \right|_0^2 - 2\left| x^3 \right|_0^2 + 4\left| x^2 \right|_0^2 - \frac{1}{4}\left| x^4 \right|_2^4 + 2\left| x^3 \right|_2^4 - 4\left| x^2 \right|_2^4 =$$

$$\boxed{A = 8\, u.a.}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(2^4 - 0^4\right) - 2\cdot\left(2^3 - 0^3\right) + 4\cdot\left(2^2 - 0^2\right) - \frac{1}{4}\cdot\left(4^4 - 2^4\right) + 2\cdot\left(4^3 - 2^3\right) - 4\cdot\left(4^2 - 2^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(16 - 0) - 2\cdot(8 - 0) + 4\cdot(4 - 0) - \frac{1}{4}\cdot(256 - 16) + 2\cdot(64 - 8) - 4\cdot(16 - 4) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 16 - 2\cdot 8 + 4\cdot 4 - \frac{1}{4}\cdot 240 + 2\cdot 56 - 4\cdot 12 = 4 - 16 + 16 - 60 + 112 - 48 = 116 - 108 = 8\, u.a.$$

3. Sea $F(x) = \int_1^{x^2} \ln t\, dt$ con $x \geq 1$

a) Calcular $F'(e)$

INTEGRACIÓN POR PARTES: $\int u\, dv = u\cdot v - \int v\, du$

$$\begin{cases} u = \ln t \rightarrow du = \dfrac{1}{t}dt \\ dv = dt \rightarrow v = t \end{cases} \Rightarrow \int \ln t\, dt = \ln t\cdot t - \int t\cdot\frac{1}{t}dt = t\cdot\ln t - \int dt = t\cdot\ln t - t$$

$$\int_1^{x^2} \ln t \ dt = \left| t\cdot \ln t - t \right|_1^{x^2} = \left(x^2 \cdot \ln x^2 - x^2 \right) - \left(1\cdot \ln 1 - 1 \right) = x^2 \cdot \ln x^2 - x^2 - 1\cdot 0 + 1 = x^2 \cdot \ln x^2 - x^2 + 1$$

$$F(x) = x^2 \cdot \ln x^2 - x^2 + 1 \rightarrow F'(x) = 2x\cdot \ln x^2 + x^2 \cdot \frac{1}{x^2}\cdot 2x - 2x = 2x\cdot \ln x^2$$

$$\boxed{F'(e) = 2e\cdot \ln e^2 = 2e\cdot \ln(e\cdot e) = 2e\cdot(\ln e + \ln e) = 2e\cdot \ln e + 2e\cdot \ln e = 4e\cdot \ln e}$$

b) ¿Es $F''(x)$ una función constante? Justifica la respuesta.

$$F''(x) = 2\cdot \ln x^2 + 2x\cdot \frac{1}{x^2}\cdot 2x = 2\cdot \ln(x\cdot x) + 4 = 2\cdot(\ln x + \ln x) + 4 = 2\ln x + 2\ln x + 4 = 4\ln x + 4$$

<u>F '' (x) no es una función constante porque su valor depende de la variable x.</u>

4. Dada la función $f(x) = e^x + a e^{-x}$ siendo a un número real, estudiar los siguientes apartados en función de a:

a) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

$$f'(x) = e^x + a e^{-x}\cdot(-1) = e^x - a e^{-x} = e^x - \frac{a}{e^x} = 0 \rightarrow e^x = \frac{a}{e^x} \rightarrow a = \left(e^x\right)^2 = e^{2x} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x = \ln a \rightarrow x = \frac{\ln a}{2}$$

- Si $a = 0$: $f'(x) = e^x - \frac{0}{e^x} = e^x - 0 = e^x > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente
- Si $a < 0$: $f'(x) = e^x - \frac{-|a|}{e^x} = e^x + \frac{|a|}{e^x} > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente
- Si $a > 0$: $f'(x) = e^x - \frac{a}{e^x} = \frac{e^x\cdot e^x}{e^x} - \frac{a}{e^x} = \frac{e^{2x} - a}{e^x} = 0 \leftrightarrow e^{2x} - a = 0 \leftrightarrow a = e^{2x}$

I) $a = e^{2x} \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow f(x)$ tiene un extremo relativo en $x = \frac{\ln a}{2}$

II) $a < e^{2x} \rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow a < e^{2x} \rightarrow 2x > \ln a \rightarrow x > \frac{\ln a}{2} \Rightarrow f(x)$ es creciente $\forall x \in \left] \frac{\ln a}{2}, +\infty \right[$

III) $a > e^{2x} \rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow a > e^{2x} \rightarrow 2x < \ln a \rightarrow x < \frac{\ln a}{2} \Rightarrow f(x)$ es decreciente $\forall x \in \left] -\infty, \frac{\ln a}{2} \right[$

f (x) tiene un mínimo relativo en $x = \frac{\ln a}{2}$

f (x) es decreciente $\forall x \in \left] -\infty, \frac{\ln a}{2} \right[$

f (x) es creciente $\forall x \in \left] \frac{\ln a}{2}, +\infty \right[$

b) Estudiar para qué valor, o valores de a, la función f tiene alguna asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^x + a\cdot e^{-x}\right) = \lim_{x\to-\infty} e^x + \lim_{x\to-\infty} ae^{-x} = \lim_{x\to-\infty} e^x + \lim_{x\to-\infty} ae^{-x} = e^{-\infty} + a\cdot e^{+\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} + \infty =$$

$$= 0 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^x + a\cdot e^{-x}\right) = e^{+\infty} + a\cdot e^{-\infty} = +\infty + \frac{a}{e^{+\infty}} = +\infty + 0 = +\infty$$

La función f no tiene asíntotas horizontales.

c) Para a > 0, hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas x = 0 , x = 2.

$$A = \int_0^2 \left(e^x + a\cdot e^{-x}\right)dx = \int_0^2 e^x\,dx - a\cdot\int_0^2 (-1)\cdot e^{-x}\,dx = \left| e^x \right|_0^2 - a\cdot\left| e^{-x}\right|_0^2 = \left(e^2 - e^0\right) - a\cdot\left(e^{-2} - e^{-0}\right) =$$

$$= e^2 - 1 - a\cdot e^{-2} + a\cdot 1 = e^2 - 1 - \frac{a}{e^2} + a = \frac{a\cdot e^2}{e^2} - \frac{a}{e^2} + e^2 - 1 = a\cdot\frac{e^2-1}{e^2} + e^2 - 1$$

5. **Dada la función $f(x) = x^3 - x$ se pide:**

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (-1 , f (-1)).

$$f(-1) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$$

$$P(-1, f(-1)) = (-1, 0)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$P(-1, f(-1)) = (-1, 0) \to t \equiv \begin{cases} P(-1, 0) \\ m = f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 0 + 2\cdot[x - (-1)] = 2\cdot(x+1) = 2x + 2$$

$$\boxed{t \equiv y = 2x + 2}$$

b) Determinar los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica f.

$x^3 - x = 2x + 2 \to x^3 - 3x - 2 = 0 \to$ resolveremos esta ecuación por Ruffini:

	1	0	-3	-2
-1		-1	1	2
	1	-1	-2	0

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)\cdot\left(x^2 - x - 2\right) = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \to x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

La recta t ≡ y = 2x + 2 corta a la gráfica f (x) = x^2 - x en los puntos x = -1 y x = 2.

c) Calcular el área de la región acotada que está comprendida entre la gráfica de f y la recta obtenida en el apartado a).

$$\left.\begin{array}{r} f(0) = 0^3 - 0 = 0 \\ t(0) \equiv 2\cdot 0 + 2 = 0 + 2 = 2 \end{array}\right\} \text{ la recta t está por encima de la gráfica f}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} \left[(2x+2) - (x^3 - x) \right] dx = \int_{-1}^{2} (-x^3 + 2x + x + 2)\, dx = \int_{-1}^{2} (-x^3 + 3x + 2)\, dx = \\ &= -\frac{1}{4}\int_{-1}^{2} 4x^3\, dx + \frac{3}{2}\int_{-1}^{2} 2x\, dx + 2\int_{-1}^{2} dx = -\frac{1}{4}\left| x^4 \right|_{-1}^{2} + \frac{3}{2}\left| x^2 \right|_{-1}^{2} + 2\left| x \right|_{-1}^{2} = \\ &= -\frac{1}{4}\left| x^4 \right|_{-1}^{2} + \frac{3}{2}\left| x^2 \right|_{-1}^{2} + 2\left| x \right|_{-1}^{2} = -\frac{1}{4}\cdot\left[2^4 - (-1)^4 \right] + \frac{3}{2}\cdot\left[2^2 - (-1)^2 \right] + 2\cdot\left[2 - (-1) \right] = \\ &= -\frac{1}{4}\cdot(16-1) + \frac{3}{2}\cdot(4-1) + 2\cdot(2+1) = -\frac{1}{4}\cdot 15 + \frac{3}{2}\cdot 3 + 2\cdot 3 = -\frac{15}{4} + \frac{9}{2} + 6 = -\frac{15}{4} + \frac{18}{4} + \frac{24}{4} = \frac{27}{4}\text{ u. s.} \end{aligned}}$$

6. Sea $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2+1}$

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en x = 0.

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1} \Rightarrow f(x) \equiv \begin{cases} \dfrac{-x}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{x}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) \text{ es continua en } x = 0 \leftrightarrow f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$$\left.\begin{array}{r} f(0) = \dfrac{0}{0^2+1} = \dfrac{0}{0+1} = \dfrac{0}{1} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x^2+1} = \frac{-0}{0^2+1} = \frac{0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^2+1} = \frac{0}{0^2+1} = \frac{0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0 \end{array}\right\} f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 0$$

$$f(x) \text{ es derivable en } x = 0 \leftrightarrow f'(0^-) = f'(0^+)$$

$$f'(x) \equiv \begin{cases} \dfrac{-1\cdot(x^2+1) - (-x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2 - 1 + 2x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} = \dfrac{x^2 - 1}{x^4 + 2x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\[3ex] \dfrac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2 + 1 - 2x^2}{x^4 + 2x^2 + 1} = \dfrac{-x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f'\left(0^-\right) &= \frac{0^2-1}{0^4+2\cdot0^2+1} = \frac{0-1}{0+2\cdot0+1} = \frac{-1}{1} = -1 \\ f'\left(0^+\right) &= \frac{-0^2+1}{0^4+2\cdot0^2+1} = \frac{0+1}{0+2\cdot0+1} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}\right\} f'\left(0^-\right) \neq f'\left(0^+\right) \Rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x=0$$

f (x) es continua, pero no derivable en x = 0.

b) Estudiar cuándo se verifica que $f'(x)=0$. Puesto que $f(1)=f(-1)$, ¿existe contradicción con el Teorema de Rolle en el intervalo $[-1,1]$?

$$f'(x)=0 \rightarrow \begin{cases} \text{si } x<0 \quad \dfrac{x^2-1}{x^4+2x^2+1} = 0 \rightarrow x^2-1=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\sqrt{1}=-1 \\ \\ \text{si } x\geq 0 \quad \dfrac{-x^2+1}{x^4+2x^2+1} = 0 \rightarrow -x^2+1=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\sqrt{1}=1 \end{cases}$$

f ‘ (x) si x = -1 ó x = 1

No existe contradicción con el Teorema de Rolle pues f no cumple la hipótesis de derivabilidad en el intervalo] -1 , 1 [al no ser derivable en x = 0.

7. Área del lóbulo limitado por la parábola de ecuación $y=x^2-2x-10$ y la recta $x-y+8=0$.

$$x-y+8=0 \rightarrow y=x+8$$

$$x^2-2x-10=x+8 \rightarrow x^2-2x-x-10-8=0 \rightarrow x^2-3x-18=0 \rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-18)}}{2\cdot1}=$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{81}}{2}=\frac{3\pm9}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{3+9}{2}=\dfrac{12}{2}=6 \\ \\ x_2=\dfrac{3-9}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3 \end{cases}$$

$$f(x)=x^2-2x-10 \rightarrow f(0)=0^2-2\cdot0-10=0-0-10=-10$$

$$g(x)=x+8 \rightarrow g(0)=0+8=8$$

$$A=\int_{-3}^{6}\left[\left(x+8\right)-\left(x^2-2x-10\right)\right]dx=\int_{-3}^{6}\left(-x^2+x+2x+8+10\right)dx=\int_{-3}^{6}\left(-x^2+3x+18\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{3}\int_{-3}^{6}3x^2\,dx+\frac{3}{2}\int_{-3}^{6}2x\,dx+18\int_{-3}^{6}dx=-\frac{1}{3}\cdot\left|\,x^3\,\right|_{-3}^{6}+\frac{3}{2}\cdot\left|\,x^2\,\right|_{-3}^{6}+18\cdot\left|\,x\,\right|_{-3}^{6}=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\left[6^3-\left(-3\right)^3\right]+\frac{3}{2}\cdot\left[6^2-\left(-3\right)^2\right]+18\cdot\left[\,6-\left(-3\right)\,\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\left[\,216-\left(-27\right)\,\right]+\frac{3}{2}\cdot\left(\,36-9\,\right)+18\cdot\left(\,6+3\,\right)=-\frac{1}{3}\cdot\left(\,216+27\,\right)+\frac{3}{2}\cdot\left(\,36-9\,\right)+18\cdot\left(\,6+3\,\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot243+\frac{3}{2}\cdot27+18\cdot9=-81+\frac{81}{2}+162=81+\frac{81}{2}=\frac{162+81}{2}=\frac{243}{2}\ \text{u.a.}$$

8. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{x+1}$$

según los valores del parámetro α.

- Si $\alpha=0:\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{4x+8}\right)^{x+1}=1^{+\infty}\to \text{indeterminación}$
- Si $\alpha\neq0:\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{x+1}=1^{+\infty}\to \text{indeterminación}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{x+1}=1^{+\infty}\to\text{indeterminación}\ \ \forall\alpha\in IR$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{x+1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)\cdot\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}-1\right)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)\cdot\left(\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\alpha x^2+4x+8}}$$

- Si $\alpha=0:\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{4x+8}\right)^{x+1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{+4x+8}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{4x}{x}+\frac{8}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{4+\frac{8}{x}}}=e^{\frac{1+\frac{1}{+\infty}}{4+\frac{8}{+\infty}}}=e^{\frac{1+0}{4+0}}=e^{\frac{1}{4}}$
- Si $\alpha\neq0:$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{x+1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\alpha x^2+4x+8}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{\alpha x^2}{x}+\frac{4x}{x}+\frac{8}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\alpha x+4+\frac{8}{x}}}=e^{\frac{1+\frac{1}{+\infty}}{\alpha\cdot(+\infty)+4+\frac{8}{+\infty}}}=e^{\frac{1+0}{\alpha\cdot(+\infty)+4+0}}=e^0=1$$

9. Una partícula recorre la curva $y=-x^2+10x-25$ de manera que en el tiempo t segundos ocupa la posición $x=t$ e $y=-t^2+10t-25$. Al llegar al instante t = 5 segundos se escapa por la

tangente a la curva recorriendo diez unidades de longitud en cada segundo en la dirección positiva del eje OX, es decir hacia la derecha.
Calcular la posición de la partícula en el instante 15 segundos (a partir de que sale por la tangente).

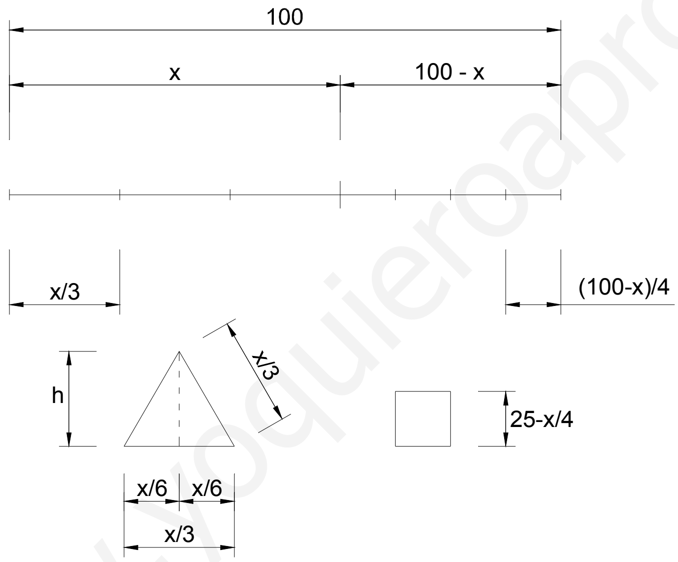
$$f(t) = -t^2 + 10t - 25 \rightarrow f'(t) = -2t + 10 \rightarrow f'(5) = -2 \cdot 5 + 10 = -10 + 10 = 0 \rightarrow f(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 - 25 = 0$$

$$\text{Posición}\begin{cases} \text{Trayectoria curva}\begin{cases} x = t \\ f(t) = y = -t^2 + 10t - 25 \end{cases} \\ \text{Trayectoria recta}\begin{cases} m = f'(5) = 0 \\ P(5, 0) \end{cases} \Rightarrow y = 0 + 0 \cdot (x - 5) = 0 \equiv \text{eje OX} \end{cases}$$

$$v(t) = 10 \text{ u/s} \rightarrow x(t) = 10t + 5 = 10 \cdot 15 + 5 = 150 + 5 = 155 \text{ u}$$

<u>La posición de la partícula 15 segundos después de salirse por la tangente es (155 , 0).</u>

10. Se divide un alambre de longitud 100 en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triángulo equilátero y con el segundo un cuadrado. Determinar las longitudes de esos trozos para que la suma de las áreas del triángulo y el cuadrado sea mínima.



$$L = 100 \rightarrow L = x + (100 - x)$$

$$h^2 + \left(\frac{x}{6}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 \rightarrow h^2 + \frac{x^2}{36} = \frac{x^2}{9} \rightarrow h^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{36} = \frac{4x^2}{36} - \frac{x^2}{36} = \frac{3x^2}{36} = \frac{x^2}{12} \rightarrow h = \sqrt{\frac{x^2}{12}} = \frac{x}{\sqrt{12}} = \frac{x}{2\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{6}$$

$$A_T = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\frac{x}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{6}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot x^2$$

$$A_C = l^2 = \left(25 - \frac{x}{4}\right)^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x}{4} \cdot 25 + 25^2 = \frac{1}{16} \cdot x^2 - \frac{25}{2} \cdot x + 625$$

$$f(x) = A_T + A_C = \frac{\sqrt{3}}{36}\cdot x^2 + \frac{1}{16}\cdot x^2 - \frac{25}{2}\cdot x + 625 = \frac{\sqrt{3}}{4\cdot 9}\cdot x^2 + \frac{1}{4\cdot 4}\cdot x^2 - \frac{25}{2}\cdot x + 625 =$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{4\cdot 4\cdot 9}\cdot x^2 + \frac{9}{4\cdot 4\cdot 9}\cdot x^2 - \frac{25}{2}\cdot x + 625 = \frac{4\sqrt{3}+9}{144}\cdot x^2 - \frac{25}{2}\cdot x + 625$$

$$f'(x) = \frac{4\sqrt{3}+9}{144}\cdot x^2 - \frac{25}{2}\cdot x + 625 = \frac{4\sqrt{3}+9}{72}\cdot x - \frac{25}{2} = 0 \rightarrow \frac{4\sqrt{3}+9}{72}\cdot x = \frac{25}{2} \rightarrow \frac{4\sqrt{3}+9}{36}\cdot x = 25 \rightarrow$$
$$\rightarrow \left(4\sqrt{3}+9\right)\cdot x = 25\cdot 36 = 900 \rightarrow x = \frac{900}{9+4\sqrt{3}}$$

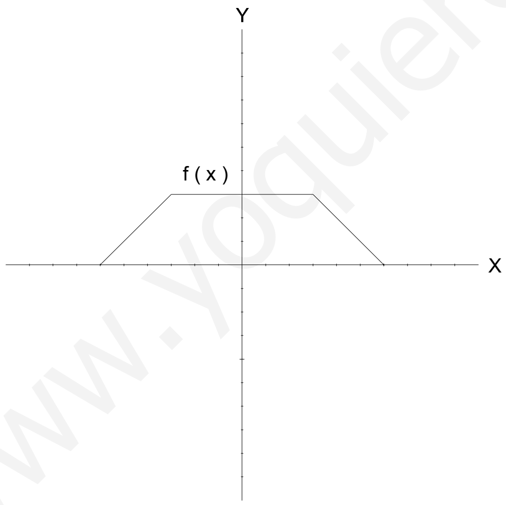
Para comprobar que es un mínimo:

$f''(x) = \frac{4\sqrt{3}+9}{72} > 0 \rightarrow x = \frac{900}{9+4\sqrt{3}}$ es un mínimo de la suma de las áreas del triángulo y el cuadrado

11. Representa la función $f(x)$:

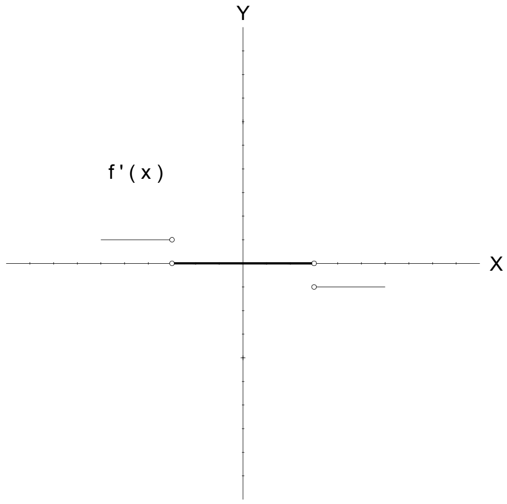
$$f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{si } x \in [-6,-3] \\ 3 & \text{si } x \in [-3,\ 3] \\ 6-x & \text{si } x \in [3,\ 6] \end{cases}$$

Hallar el conjunto de puntos donde está definida la derivada y representa la función $f'(x)$.

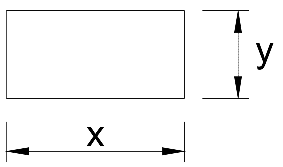


$f(x)$ es continua $\forall x \in \,]-6,6[$

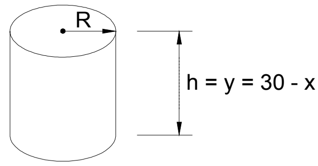
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} f'(-3^-) = 1 \\ f'(-3^+) = 0 \end{array}\right\} \nexists f'(-3) \\ \\ \left.\begin{array}{l} f'(3^-) = 0 \\ f'(3^+) = -1 \end{array}\right\} \nexists f'(3) \end{array}\right\} \exists f'(x)\ \forall x \in \,]-6,-3[\, \cup \,]-3,3[\, \cup \,]3,6[$$



12. Hallar la base x y la altura y de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que al dar una vuelta completa alrededor de un lado vertical genere un cilindro de volumen máximo.



$$P = 2x + 2y = 60 \text{ cm}$$
$$\downarrow$$
$$x + y = 30 \rightarrow y = 30 - x$$



$$V = A\cdot h = \pi\cdot R^2\cdot(30 - x) \xrightarrow{L=2\cdot\pi\cdot R=x\rightarrow\ R=\frac{x}{2\pi}} V(x) = A\cdot h = \pi\cdot\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\cdot(30 - x) = \pi\cdot\frac{x^2}{4\pi^2}\cdot(30 - x) =$$

$$= \frac{x^2}{4\pi}\cdot(30 - x) = -\frac{1}{4\pi}\cdot x^3 + \frac{30}{4\pi}\cdot x^2 \rightarrow V'(x) = -\frac{3}{4\pi}\cdot x^2 + \frac{2\cdot 30}{4\pi}\cdot x = -\frac{3}{4\pi}\cdot x^2 + \frac{60}{4\pi}\cdot x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x}{\pi}\cdot\left(-\frac{3}{4}\cdot x + 15\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{\pi} = 0 \rightarrow x = 0 \\ -\frac{3}{4}\cdot x + 15 = 0 \rightarrow \frac{3x}{4} = 15 \rightarrow 3x = 15\cdot 4 = 60 \rightarrow x = \frac{60}{3} = 20 \rightarrow y = 30 - 20 = 10 \end{cases}$$

$$\boxed{x = 20 \text{ cm} \quad ; \quad y = 10 \text{ cm}}$$

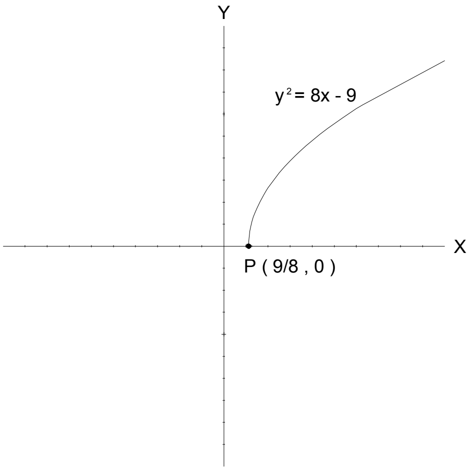
13. Un punto material recorre la parábola $y^2 = 8x - 9$. Determinar razonadamente en qué posición la distancia del punto al origen (0 , 0) es mínima.

$$y^2 = 8x - 9 \rightarrow y = \sqrt{8x - 9} = (8x - 9)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{dist}(O, P) = \left|\overrightarrow{OP}\right| = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{y=\sqrt{8x-9}}$$

$$\xrightarrow{y=\sqrt{8x-9}} d(x) = \sqrt{x^2 + 8x - 9} = (x^2 + 8x - 9)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow d'(x) = \frac{1}{2}\cdot(x^2 + 8x - 9)^{\frac{1}{2}}\cdot(2x + 8) = \frac{2x + 8}{2\cdot\sqrt{x^2 + 8x - 9}} =$$

$$= \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x - 9}} = 0 \rightarrow x + 4 = 0 \rightarrow x = -4$$

Pero la parábola $y=\sqrt{8x-9}$ sólo está definida cuando $8x-9\geq 0 \rightarrow 8x\geq 9 \rightarrow x\geq \frac{9}{8}$, es decir, en el intervalo $\left]\frac{9}{8},+\infty\right[$, por tanto, la distancia mínima al origen será para el punto más cercano a $x=-4$, es decir el punto correspondiente a $x=\frac{9}{8}\rightarrow y\left(\frac{9}{8}\right)=\sqrt{8\cdot\frac{9}{8}-9}=0$, o sea, el vértice de la semiparábola horizontal:



$$\boxed{P\left(\frac{9}{8},0\right)}$$

14. Si la derivada de una función f es:

$$\mathbf{f'(x)=(x-1)^3\cdot(x-5)}$$

Obtener:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

$$f'(x)=(x-1)^3\cdot(x-5)=(x-1)^2\cdot(x-1)\cdot(x-5)=\left(x^2-2x+1\right)\cdot\left(x^2-6x+5\right)=x^4-6x^3+5x^2-$$
$$-2x^3+12x^2-10x+x^2-6x+5=x^4-8x^3+18x^2-16x+5$$

$$f''(x)=3\cdot(x-1)^2\cdot 1\cdot(x-5)+(x-1)^3\cdot 1=(x-1)^2\cdot[3\cdot(x-5)+(x-1)]=(x-1)^2\cdot(3x-15+x-1)=$$
$$=(x-1)^2\cdot(4x-16)=4\cdot(x-1)^2\cdot(x-4)$$

$$f'(x)=(x-1)^3\cdot(x-5)=0\rightarrow\begin{cases}(x-1)^3=0\rightarrow x=1\\ x-5=0\rightarrow x=5\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(0)=(0-1)^3\cdot(0-5)=(-1)^3\cdot(-5)=(-1)\cdot(-5)=5>0\rightarrow \text{f creciente } \forall x\in\left]-\infty,1\right[\\ f'(3)=(3-1)^3\cdot(3-5)=2^3\cdot(-2)=8\cdot(-2)=-16<0\rightarrow \text{f decreciente } \forall x\in\left]1,5\right[\\ f'(6)=(6-1)^3\cdot(6-5)=5^3\cdot 1=125\cdot 1=125>0\rightarrow \text{f creciente } \forall x\in\left]5,+\infty\right[\end{array}}$$

b) Los valores de x en los que f tiene máximos relativos, mínimos relativos o puntos de inflexión.

<u>La función f tiene un máximo relativo en x = 1 y un mínimo relativo en x = 5.</u>

c) La función f sabiendo que $\mathbf{f(0)=0}$.

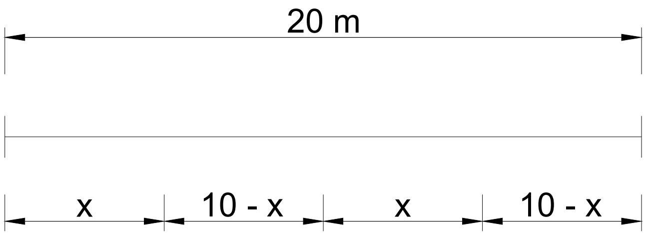
$$\int\left(x^4-8x^3+18x^2-16x+5\right)dx=\frac{1}{5}\int 5x^4\,dx-2\int 4x^3\,dx+6\int 3x^2\,dx-8\int 2x\,dx+5\int dx=$$
$$=\frac{1}{5}\cdot x^5-2x^4+6x^3-8x^2+5x+C$$

$$f(0)=\frac{1}{5}\cdot 0^5-2\cdot 0^4+6\cdot 0^3-8\cdot 0^2+5\cdot 0+C=0\rightarrow C=0$$

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{5}\cdot x^5-2x^4+6x^3-x^2+5x}$$

15. Descomponer un segmento de longitud 20 metros en cuatro partes para obtener el paralelogramo de la mayor área posible.

Puesto que es un paralelogramo, los lados del mismo serán iguales 2 a 2, por lo tanto:



Además, se tratará de un rectángulo por que los romboides tienen menos área que un rectángulo cuyos lados tengan la misma dimensión que los romboides. Por tanto:

$$A(x)=x\cdot(10-x)=-x^2+10x\rightarrow A'(x)=-2x+10=0\rightarrow -2x=-10\rightarrow x=\frac{10}{2}=5$$

<u>Cada parte del segmento medirá 5 m para obtener un paralelogramo de la mayor área posible.</u>

16. Un punto material recorre la parábola $y=x^2-7$. Deducir razonadamente la posición o posiciones, en que la distancia de punto al origen (0 , 0) es mínima.

$$d=\sqrt{x^2+y^2}\xrightarrow{y=x^2-7}d(x)=\sqrt{x^2+\left(x^2-7\right)^2}=\sqrt{x^2+x^4-14x^2+49}=\sqrt{x^4-13x^2+49}=\left(x^4-13x^2+49\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(x^4-13x^2+49\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(4x^3-26x\right)=\frac{4x^3-26x}{2\cdot\sqrt{x^4-13x^2+49}}=\frac{2x^3-13x}{\sqrt{x^4-13x^2+49}}=0\rightarrow 2x^3-13x=0\rightarrow$$

$$\rightarrow x\cdot\left(2x^2-13\right)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\rightarrow d(0)=\sqrt{0^4-13\cdot 0^2+49}=\sqrt{0-0+49}=\sqrt{49}=7\\ 2x^2-13=0\rightarrow 2x^2=13\rightarrow x^2=\dfrac{13}{2}\rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{13}{2}}\end{cases}$$

$$d\left(+\sqrt{\frac{13}{2}}\right)=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{13}{2}}\right)^4-13\cdot\left(\sqrt{\frac{13}{2}}\right)^2+49}=\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2-13\cdot\frac{13}{2}+49}=\sqrt{\frac{13^2}{2^2}-\frac{13^2}{2}+49}=$$

$$=\sqrt{\frac{169}{4}-\frac{169}{2}+49}=\sqrt{\frac{169}{4}-\frac{2\cdot 169}{4}+\frac{4\cdot 49}{4}}=\sqrt{\frac{169}{4}-\frac{338}{4}+\frac{196}{4}}=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2'598$$

$$d\left(-\sqrt{\frac{13}{2}}\right)=\sqrt{\left(-\sqrt{\frac{13}{2}}\right)^4-13\cdot\left(-\sqrt{\frac{13}{2}}\right)^2+49}=\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2-13\cdot\frac{13}{2}+49}=\sqrt{\frac{13^2}{2^2}-\frac{13^2}{2}+49}=$$

$$=\sqrt{\frac{169}{4}-\frac{169}{2}+49}=\sqrt{\frac{169}{4}-\frac{2\cdot 169}{4}+\frac{4\cdot 49}{4}}=\sqrt{\frac{169}{4}-\frac{338}{4}+\frac{196}{4}}=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2'598$$

$$f\left(+\sqrt{\frac{13}{2}}\right)=\left(\sqrt{\frac{13}{2}}\right)^2-7=\frac{13}{2}-7=\frac{13}{2}-\frac{14}{2}=-\frac{1}{2}=-0'5$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{13}{2}}\right)=\left(-\sqrt{\frac{13}{2}}\right)^2-7=\frac{13}{2}-7=\frac{13}{2}-\frac{14}{2}=-\frac{1}{2}=-0'5$$

La distancia al origen será mínima en las posiciones $P_1\left(-\sqrt{\frac{13}{2}},-\frac{1}{2}\right)$ y $P_2\left(+\sqrt{\frac{13}{2}},-\frac{1}{2}\right)$.

17. Se considera la función $f(x)=x^2+m$, donde m > 0 es una constante.

a) Para cada valor de m, hallar el valor de a > 0, tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto (a , $f(a)$) pase por el origen de coordenadas.

$$f(x)=x^2+m\to f(a)=a^2+m$$
$$\downarrow$$
$$f'(x)=2x\to f'(a)=2a$$

$$\text{recta punto - pendiente}: y-y_0=p\cdot(x-x_0)\xrightarrow[p=f'(a)]{P(a,f(a))}y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)\to$$
$$\to y-\left(a^2+m\right)=2a\cdot(x-a)\to y-a^2-m=2ax-2a^2\to y=2ax-2a^2+a^2+m=2ax-a^2+m$$

Para que pase por el origen: $0=2a\cdot 0-a^2+m\to 0=0-a^2+m\to a^2=m\to a=\sqrt{m}$

b) Halla el valor de m para que la recta y = x sea tangente a la gráfica de f.

$$y=2ax-a^2+m\ \equiv\ y=x\Rightarrow\begin{cases}2a=1\to a=\dfrac{1}{2}\\[2ex]-a^2+m=0\to m=a^2\xrightarrow{a=\frac{1}{2}}m=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1^2}{2^2}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

$$\boxed{m=\frac{1}{4}}$$

18. Sea: $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & \text{si } x\le 1\\ \ln x & \text{si } x>1\end{cases}$

Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de $f(x)$ y por la recta y = 1.

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+1 & \text{si } x\le 1\\ \ln x & \text{si } x>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-2x+1=1\to x^2-2x=0\to x\cdot(x-2)=0\to\begin{cases}x=0\\ x-2=0\to x=2\notin\left]-\infty,1\right]\end{cases}\\ \ln x=1\to x=e\end{cases}$$

$$f(0'5)=(0'5)^2-2\cdot 0'5+1=0'25-1+1=0'25<1\longrightarrow f(x)<1\ \ \forall x\in[0,1]$$
$$f(2)=\ln 2=0'693<1\longrightarrow f(x)<1\ \ \forall x\in\left]1,e\right]$$

La integración logarítmica la realizaremos por partes:

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du \Rightarrow \begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\int \ln x\ \ dx = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\cdot\ln x - \int\ dx = x\cdot\ln x - x = x\cdot(\ \ln x - 1\ )$$

$$A = \int_0^1 \left[\ 1-\left(x^2-2x+1\right)\ \right]dx + \int_1^e (\ 1-\ln x\ )\ dx = \int_0^1 \left(\ 1-x^2+2x-1\ \right)dx + \int_1^e (\ 1-\ln x\ )\ dx =$$

$$= \int_0^1 \left(-x^2+2x\ \right)dx + \int_1^e (\ 1-\ln x\ )\ dx = -\frac{1}{3}\int_0^1 3x^2\ dx + \int_0^1 2x\,dx + \int_1^e dx - \int_1^e \ln x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\left|\ x^3\ \right|_0^1 + \left|\ x^2\right|_0^1 + \left|\ x\ \right|_1^e - \left|\ x\cdot(\ \ln x\ -1\ )\ \right|_1^e =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\left(1^3-0^3\right) + \left(\ 1^2-0^2\right) + (e-1) - \left[\ e\cdot(\ \ln e - 1\ ) - 1\cdot(\ln 1 - 1)\right] =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot(1-0) + (\ 1-0) + e - 1 - \left[\ e\cdot(\ 1-1\ ) - 1\cdot(0-1\ )\ \right] = -\frac{1}{3}\cdot 1 + 1 - 0 + e - 1 - \left[\ e\cdot 0 - 1\cdot(-1\ )\ \right] =$$

$$= -\frac{1}{3} + e - (\ 0+1\ ) = -\frac{1}{3} + e - 1 = e - \frac{4}{3} = 1'385\ u$$

19. Dada la función $f(\ x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, se pide:

a) Poner un ejemplo de b, c y d de forma que la función carezca de máximos y mínimos relativos.

$$f'(\ x) = 3x^2 + 2bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4\cdot 3\cdot c}}{2\cdot 3} = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2-12c}}{6} \neq 0 \leftrightarrow 4b^2 - 12c < 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow b^2 - 3c < 0 \rightarrow b^2 < 3c$$

<u>Por ejemplo : b = 2 ; c = 3 ; d = 4</u>

$$f(\ x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \rightarrow f'(\ x) = 3x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 3\cdot 3}}{2\cdot 3} = \frac{-4\pm\sqrt{16-36}}{6} = \frac{-4\pm\sqrt{-20}}{6} \rightarrow \text{No hay máximos ni mínimos relativos.}$$

b) Demostrar que si c = 0 y b < 0, entonces la función presenta un máximo y un mínimo relativos.

$$f'(\ x) = 3x^2 + 2bx = x\cdot(3x+2b) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ 3x + 2b = 0 \rightarrow 3x = -2b \rightarrow x_2 = \dfrac{-2b}{3} \xrightarrow{b<0} x_2 = \dfrac{2\cdot|\,b\,|}{3} \end{cases}$$

$$f''(\ x) = 6x + 2b \rightarrow \begin{cases} f''(\ 0) = 6\cdot 0 + 2b = 0 + 2b = 2b \xrightarrow{b<0} f''(\ 0) < 0 \rightarrow \text{máximo en } x = 0 \\ f''\left(\dfrac{-2b}{3}\right) = 6\cdot\left(\dfrac{-2b}{3}\right) + 2b = \dfrac{-12b}{3} + 2b = \dfrac{-6b}{3} = -2b \xrightarrow{b<0} f''\left(\dfrac{-2b}{3}\right) > 0 \rightarrow \text{mín.} \end{cases}$$

<u>La función presenta un máximo relativo en x = 0 y un mínimo relativo en x = -2b/3 si c = 0 y b < 0.</u>

20. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - x^2 \right)$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(e^x - x^2 \right) = \lim_{x \to +\infty} e^x - \lim_{x \to +\infty} x^2 = e^{+\infty} - (+\infty)^2 = +\infty - (+\infty) = \infty - \infty = \text{indeterminación}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(e^x - x^2 \right) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \frac{e^x - x^2}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{x^2}{x^2} \right) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 \right) =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 \right) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} - \lim_{x \to +\infty} 1 \right) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} - \lim_{x \to +\infty} 1 \right) =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} - \lim_{x \to +\infty} 1 \right) = (+\infty)^2 \cdot \left(\frac{e^{+\infty}}{2} - 1 \right) = +\infty \cdot \left(\frac{+\infty}{2} - 1 \right) = +\infty \cdot (+\infty - 1) = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x} = \frac{4^{+\infty} + 5^{+\infty}}{3^{+\infty} + 6^{+\infty}} = \frac{+\infty + \infty}{+\infty + \infty} = \frac{\infty}{\infty} = \text{indeterminación}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{4^x}{6^x} + \frac{5^x}{6^x}}{\frac{3^x}{6^x} + \frac{6^x}{6^x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{4^x}{6^x} + \frac{5^x}{6^x}}{\frac{3^x}{6^x} + 1} = \frac{\frac{4^{+\infty}}{6^{+\infty}} + \frac{5^{+\infty}}{6^{+\infty}}}{\frac{3^{+\infty}}{6^{+\infty}} + 1} = \frac{0+0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0$$

21. Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 2x - 3}$

Estudiar si la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 2x - 3} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **es continua en x = 1.**

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1^2 - 1}{1^2 + 2 \cdot 1 - 3} = \frac{1-1}{1+2-3} = \frac{0}{0} = \text{indeterminación}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \to 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = \frac{1 - \frac{1}{1}}{1 + \frac{2}{1} - \frac{3}{1^2}} = \frac{1-1}{1+2-3} = \frac{0}{0} = \text{indeterminación}$$

Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{2x+2}=\frac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1+2}=\frac{2-1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

<u>f (x) no es continua en x = 1 porque</u> $\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{4}\neq f(1)=2$

22. Obtener los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$\mathbf{f(x)=x\cdot(\ln x)^2}$$

$$f'(x)=1\cdot(\ln x)^2+x\cdot 2\cdot(\ln x)\cdot\frac{1}{x}=(\ln x)^2+2\cdot(\ln x)=(\ln x)\cdot[(\ln x)+2]=0\Rightarrow\begin{cases}\ln x=0\to x=1\\ \ln x=-2\to x=\frac{1}{e^2}\end{cases}$$

$$f''(x)=2\cdot(\ln x)\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\cdot(\ln x)}{x}+\frac{2}{x}=\frac{2\cdot(\ln x)+2}{x}=\frac{2\cdot[(\ln x)+1]}{x}=0\to 2\cdot[(\ln x)+1]=0\to$$

$$\to(\ln x)+1=0\to\ln x=-1\to x=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$$f(1)=1\cdot(\ln 1)^2=0\to f''(1)=2>0\to\text{mínimo relativo en }(1,0)$$

$$f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2}\cdot\left(\ln\frac{1}{e^2}\right)^2=\frac{1}{e^2}\cdot(-2)^2=\frac{4}{e^2}\to f''\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{-2}{e^{-2}}=-2\cdot e^2<0\to\text{Máximo en}\left(\frac{1}{e^2},-2\cdot e^2\right)$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\cdot\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2=\frac{1}{e}\cdot(-1)^2=\frac{1}{e}\to\text{punto de inflexión en}\left(\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$$

23. Calcular el dominio y los intervalos de crecimiento de la función $\mathbf{f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}}$

$$x^2-1=0\to x^2=1\to x=\sqrt{1}=\pm 1$$

$$\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-1,1\}=]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,1[\,\cup\,]1,+$$

$$f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}\to f'(x)=\frac{4x\cdot(x^2-1)-2x^2\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{4x^3-4x-4x^3}{x^4-2x^2+1}=\frac{-4x}{x^4-2x^2+1}=0\to x=0$$

$$f'(-2)=\frac{-4\cdot(-2)}{(-2)^4-2\cdot(-2)^2+1}=\frac{8}{16-8+1}=\frac{8}{9}>0\to f\text{ es creciente }\forall x\in\,]-\infty,-1[$$

$$f'(-0'5) = \frac{-4\cdot(-0'5)}{(-0'5)^4 - 2\cdot(-0'5)^2 + 1} = \frac{2}{0'0625 - 0'5 + 1} = \frac{2}{0'5625} > 0 \rightarrow \text{f es creciente } \forall x \in \left]-1, 0\right[$$

$$f'(0'5) = \frac{-4\cdot 0'5}{(0'5)^4 - 2\cdot(0'5)^2 + 1} = \frac{-2}{0'0625 - 0'5 + 1} = \frac{-2}{0'5625} < 0 \rightarrow \text{f es decreciente } \forall x \in \left]0, 1\right[$$

$$f'(2) = \frac{-4\cdot 2}{2^4 - 2\cdot 2^2 + 1} = \frac{-8}{16 - 8 + 1} = \frac{-8}{9} < 0 \rightarrow \text{f es decreciente } \forall x \in \left]1, +\infty\right[$$

$$\boxed{\text{f es creciente } \forall x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1, \right.}$$

24. a) Se sabe que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. ¿Se puede asegurar que a = b ? Razonar la respuesta.

No, pues puede suceder que la función cambie de signo en [a, b] determinando recintos de igual área a ambos lados del corte con OX.

c) Calcular, utilizando la regla de Barrow, la integral definida: $\int_{-3}^{3} |x-1|\,dx$

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

$$\int_{-3}^{3} |x-1|\,dx = \int_{-3}^{1} (1-x)\,dx + \int_{1}^{3} (x-1)\,dx = \int_{-3}^{1} dx - \int_{-3}^{1} x\,dx + \int_{1}^{3} x\,dx - \int_{1}^{3} dx =$$
$$= \int_{-3}^{1} dx - \frac{1}{2}\int_{-3}^{1} 2x\,dx + \frac{1}{2}\int_{1}^{3} 2x\,dx - \int_{1}^{3} dx == \left|x\right|_{-3}^{1} - \frac{1}{2}\cdot\left|x^2\right|_{-3}^{1} + \frac{1}{2}\cdot\left|x^2\right|_{1}^{3} - \left|x\right|_{1}^{3} =$$
$$= [1-(-3)] - \frac{1}{2}\cdot\left[1^2-(-3)^2\right] + \frac{1}{2}\cdot(3^2-1^2) - (3-1) = 1+3-\frac{1}{2}\cdot(1-9) + \frac{1}{2}\cdot(9-1) - 2 =$$
$$= 4 - \frac{1}{2}\cdot(-8) + \frac{1}{2}\cdot 8 - 2 = 4+4+4-2 = 10$$

25. a) Para cada valor de c > 0 , calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}\cdot x^2 + 1$, el eje OX y las rectas x = 0 , x = 1.

$$\int_0^1 \left(cx^4 + \frac{1}{c}\cdot x^2 + 1\right)dx = \int_0^1 cx^4\,dx + \int_0^1 \frac{1}{c}\cdot x^2\,dx + \int_0^1 dx = \frac{c}{5}\int_0^1 5x^4\,dx + \frac{1}{3c}\int_0^1 3x^2\,dx + \int_0^1 dx =$$
$$= \frac{c}{5}\cdot\left|x^5\right|_0^1 + \frac{1}{3c}\cdot\left|x^3\right|_0^1 + \left|x\right|_0^1 = \frac{c}{5}\cdot(1^5-0^5) + \frac{1}{3c}\cdot(1^3-0^3) + (1-0) = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$$

b) Hallar el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado a) es mínima.

$$f(c)=\frac{c}{5}+\frac{1}{3c}+1=\frac{1}{5}\cdot c+\frac{1}{3}\cdot c^{-1}+1$$

$$f'(c)=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot c^{-2}=\frac{1}{5}-\frac{1}{3c^2}=0\to\frac{1}{5}=\frac{1}{3c^2}\to 3c^2=5\to c^2=\frac{5}{3}\to$$
$$\to c=\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5\cdot 3}}{\sqrt{3\cdot 3}}=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{15}}{3}\approx 1'291$$

26. Estudiar para qué valores de a, b, c la recta que une los puntos A (-1 , 1) y B (1 , 3) es tangente en el punto B a la gráfica de la función $f(x)=a\cdot\ln\left(1+x^2\right)-bx+c$.

$$\mathbf{f(x)=a\cdot\ln\left(1+x^2\right)-bx+c}$$

$$r\equiv\frac{x-x_A}{x_A-x_B}=\frac{y-y_A}{y_A-y_B}\Rightarrow r\equiv\frac{x-(-1)}{-1-1}=\frac{y-1}{1-3}\to r\equiv\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{-2}\to r\equiv x+1=y-1\to r\equiv y=x+2\to m=1$$

$$f'(x)=a\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x-b=\frac{2ax}{x^2+1}-b\to f'(1)=\frac{2a\cdot 1}{1^2+1}-b=\frac{2a}{1+1}-b=\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}}-b=a-b=1\to a=b+1$$

$$f(1)=a\cdot\ln\left(1+1^2\right)-b\cdot 1+c=3\to a\cdot\ln(1+1)-b+c=3\to a\cdot\ln 2-b+c=3\xrightarrow{a=b+1}$$
$$\xrightarrow{a=b+1}(b+1)\cdot\ln 2-b+c=3\to c=3+b-(b+1)\cdot\ln 2$$

$$a=b+1\ ,\ c=3+b-(b+1)\cdot\ln 2\quad\forall b\in IR$$

27. Dada la función $f(x)=e^{-x}\cdot\left(x^2+1\right)$ se pide:

a) Dibujar la gráfica de f, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

$$f(x)=e^{-x}\cdot\left(x^2+1\right)=\frac{x^2+1}{e^x}\Rightarrow e^x\neq 0\ \ \forall x\in IR\to \text{Dom } f=\left]-\infty,+\infty\right[$$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot e^x-\left(x^2+1\right)\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{e^x\cdot\left[2x-\left(x^2+1\right)\right]}{e^{2x}}=\frac{-x^2+2x-1}{e^x}=-\frac{x^2-2x+1}{e^x}=0\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x^2-2x+1=0\to x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{2\pm 0}{2}=1$$

$$f''(x)=-\frac{(2x-2)\cdot e^x-\left(x^2-2x+1\right)\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=-\frac{e^x\cdot\left[(2x-2)-\left(x^2-2x+1\right)\right]}{e^{2x}}=-\frac{-x^2+4x-3}{e^x}=\frac{x^2-4x+3}{e^x}$$

$$f''(1)=\frac{1^2-4\cdot 1+3}{e^1}=\frac{1-4+3}{e}=\frac{0}{e}=0\to f(1)=\frac{1^2+1}{e^1}=\frac{1+1}{e}=\frac{2}{e}\approx 0'736\Rightarrow \text{pto. inflexión en }\left(1,\frac{2}{e}\right)$$

$$f'(0)=-\frac{0^2-2\cdot 0+1}{e^0}=-\frac{0-0+1}{1}=-1-0\to f\ \text{ es decreciente }\ \forall x\in\left]-\infty,+\infty\right[$$

<u>f es decreciente en todo su dominio (todo IR)</u>

$$f''(x)=\frac{x^2-4x+3}{e^x}=0 \leftrightarrow x^2-4x+3=0 \rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=2\pm 1\rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1=2+1=3 \\ x_2=2-1=1 \end{cases} \Rightarrow f(3)=\frac{3^2+1}{e^3}=\frac{9+1}{e^3}=\frac{10}{e^3}\approx 0'498 \Rightarrow \text{pto. inflexión en } \left(3,\frac{10}{e^3}\right)\approx(3, 0'5)$$

$$f''(0)=\frac{0^2-4\cdot 0+3}{e^0}=\frac{0-0+3}{1}=3>0\rightarrow f \text{ es cóncava } \forall x\in\,]-\infty,1[$$

$$f''(2)=\frac{2^2-4\cdot 2+3}{e^2}=\frac{4-8+3}{e^2}=\frac{-1}{e^2}<0\rightarrow f \text{ es convexa } \forall x\in\,]1,3[$$

$$f''(4)=\frac{4^2-4\cdot 4+3}{e^4}=\frac{16-16+3}{e^4}=\frac{3}{e^4}>0\rightarrow f \text{ es cóncava } \forall x\in\,]3,+\infty[$$

_ ASÍNTOTAS:

- Horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{e^x}=\frac{(+\infty)^2+1}{e^{+\infty}}=0\rightarrow x=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{e^x}=\frac{(-\infty)^2+1}{e^{-\infty}}=(+\infty)\cdot e^{+\infty}=+\infty$$

La función tiene como asíntota horizontal la recta x = 0 por la derecha.

- Verticales: No tiene.

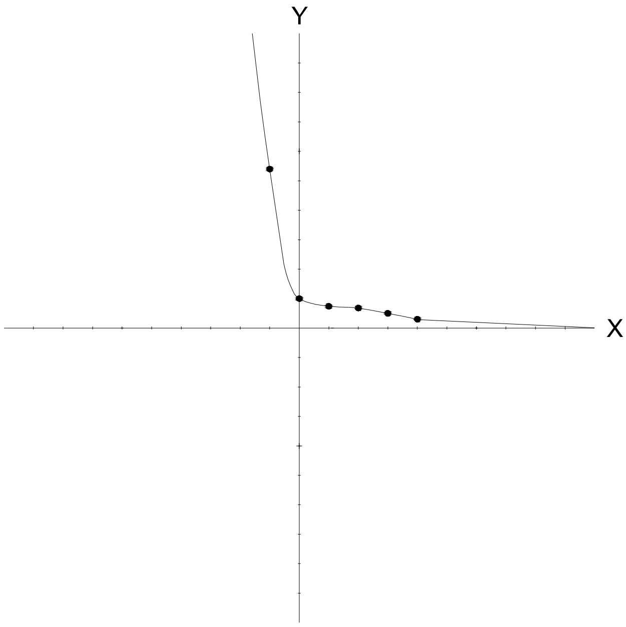
- Oblicuas:

$$y=mx+n\begin{cases} m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{e^x}\cdot\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x\cdot e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{+\infty+\frac{1}{+\infty}}{e^{+\infty}}=0 \\ n=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0 \end{cases} \Rightarrow \text{No tiene.}$$

_ GRÁFICA:

$$f(0)=\frac{0^2+1}{e^0}=\frac{1}{1}=1 \quad ; \quad f(1)=\frac{1^2+1}{e^1}=\frac{2}{e}\approx 0'74 \quad ; \quad f(2)=\frac{2^2+1}{e^2}=\frac{5}{e^2}\approx 0'68$$

$$f(3)=\frac{3^2+1}{e^3}=\frac{10}{e^3}\approx 0'5 \quad ; \quad f(-1)=\frac{(-1)^2+1}{e^{-1}}=2e\approx 5'4 \quad ; \quad f(4)=\frac{4^2+1}{e^3}=\frac{17}{e^4}\approx 0'3$$



b) Calcular la integral $\int_0^1 f(x)\,dx$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{-x}\cdot\left(x^2+1\right)\,dx$$

_ Integración por partes:

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du \rightarrow \int u\cdot v'\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx \Rightarrow \begin{cases} u = x^2+1 \rightarrow u' = 2x \\ v' = e^{-x} \rightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{-x}\cdot\left(x^2+1\right)\,dx = \left|\left(x^2+1\right)\cdot\left(-e^{-x}\right)\right|_0^1 - \int_0^1 2x\cdot\left(-e^{-x}\right)\,dx =$$

$$= \left|-x^2\cdot e^{-x} - e^{-x}\right|_0^1 + 2\int_0^1 x\cdot e^{-x}\,dx = -1^2\cdot e^{-1} - e^{-1} - \left(-0^2\cdot e^{-0} - e^{-0}\right) + 2\int_0^1 x\cdot e^{-x}\,dx =$$

$$= \frac{-2}{e} + 1 + 2\int_0^1 x\cdot e^{-x}\,dx$$

_ Nueva integración por partes:

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du \rightarrow \int u\cdot v'\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx \Rightarrow \begin{cases} u = x \rightarrow u' = 1 \\ v' = e^{-x} \rightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\int_0^1 x\cdot e^{-x}\,dx = \left|-x\cdot e^{-x}\right|_0^1 - \int_0^1 1\cdot -e^{-x}\,dx = -1\cdot e^{-1} - \left(-0\cdot e^{-0}\right) + \int_0^1 e^{-x}\,dx = \frac{-1}{e} + \left|-e^{-x}\right|_0^1 =$$

$$= \frac{-1}{e} - e^{-1} - \left(-e^{-0}\right) = \frac{-1}{e} - \frac{1}{e} + e^0 = \frac{-2}{e} + 1$$

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{-2}{e} + 1 + 2\cdot\left(\frac{-2}{e}+1\right) = -\frac{2}{e} + 1 - \frac{4}{e} + 2 = 3 - \frac{6}{e}}$$

28. Dada la función $f(t) = at + b$ (con a y b constantes reales), se define $F(x) = x\int_1^{x+1} f(t)\,dt$. Se pide obtener razonadamente:

a) La integral $\int_1^{x+1} f(t)\,dt$

$$\int_1^{x+1} f(t)\,dt = \int_1^{x+1} (at+b)\,dt = \int_1^{x+1} at\,dt + \int_1^{x+1} b\,dt = \frac{a}{2}\int_1^{x+1} 2t\,dt + b\int_1^{x+1} dt = \frac{a}{2}\cdot \left| t^2 \right|_1^{x+1} +$$

$$= \frac{a}{2}\cdot\left[(x+1)^2 - 1^2\right] + b\cdot\left[(x+1)-1\right] = \frac{a}{2}\cdot\left(x^2+2x+\cancel{1}-\cancel{1}\right) + b\cdot x = \frac{a}{2}\cdot x^2 + a\cdot x + b\cdot x = \frac{a}{2}\cdot x^2 + (a+b)\cdot x$$

b) La expresión de la derivada $F'(x)$ y de la función $F(x)$.

$$F(x) = x\int_1^{x+1} f(t)\,dt = x\cdot\left[\frac{a}{2}\cdot x^2 + (a+b)\cdot x\right] = \frac{a}{2}\cdot x^3 + (a+b)\cdot x^2$$

$$F'(x) = \frac{3a}{2}\cdot x^2 + 2\cdot(a+b)\cdot x$$

c) La relación entre los valores a y b para la que se verifica: $F''(0) = 0$

$$F''(x) = 3a\cdot x + 2\cdot(a+b) \rightarrow F''(0) = 3a\cdot 0 + 2\cdot(a+b) = 0 \rightarrow 2\cdot(a+b) = 0 \rightarrow a+b = 0 \rightarrow a = -b$$

29. Sea la función real $f(x) = \log \sqrt[x]{\dfrac{1+x}{1-x}}$

a) Calcula el dominio de f (x).

$$f(x) = \log\sqrt[x]{\frac{1+x}{1-x}} = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\cdot\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{x} = \frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x}$$

$1+x<0 \rightarrow x<-1$; $1-x<0 \rightarrow -x<-1 \rightarrow x>1$

$$\boxed{\text{Dom } f =]-1,0[\;U\;]0,1}$$

b) Estudia si f (x) es una función par.

Una función es par $\leftrightarrow f(-x) = f(x)$

$$f(-x) = \frac{\log[1+(-x)] - \log[1-(-x)]}{-x} = -\frac{\log(1-x)-\log(1+x)}{x} = \frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x} = f(x)$$

<u>La función es par.</u>

c) Calcular las asíntotas de f (x).

Sólo puede tener asíntotas verticales en x = -1 , x = 0 y x = 1 por la restricción del dominio:

- x = -1

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x} = \frac{\log\left[1+\left(-1^+\right)\right]-\log\left[1-\left(-1^+\right)\right]}{-1^+} = \frac{\log\left(1-1^+\right)-\log\left(1+1^-\right)}{-1^+} =$$

$$= \frac{\log 0^+ - \log 2^-}{-1^+} = \frac{-\infty}{-1^+} = +\infty$$

- $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x} = \frac{\log\left(1+0^-\right)-\log\left(1-0^-\right)}{0^-} = \frac{\log 1^- - \log 1^+}{0^-} = \frac{\log \frac{1^-}{1^+}}{0^-} = \frac{0}{0} = \text{inc}$$

Aplicando el Teorema de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \left[\frac{1}{(1+x)\cdot \ln 10} + \frac{1}{(1-x)\cdot \ln 10}\right] =$$

$$= \frac{1}{\left(1+0^-\right)\cdot \ln 10} + \frac{1}{\left(1-0^-\right)\cdot \ln 10} = \frac{1}{1^-\cdot \ln 10} + \frac{1}{1^+\cdot \ln 10} = \frac{1}{\ln 10} + \frac{1}{\ln 10} = \frac{2}{\ln 10} \neq \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x} = \frac{\log\left(1+0^+\right)-\log\left(1-0^+\right)}{0^-} = \frac{\log 1^+ - \log 1^-}{0^-} = \frac{\log \frac{1^+}{1^-}}{0^-} = \frac{0}{0} = \text{inc}$$

Aplicando el Teorema de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{1}{(1+x)\cdot \ln 10} + \frac{1}{(1-x)\cdot \ln 10}\right] =$$

$$= \frac{1}{\left(1+0^+\right)\cdot \ln 10} + \frac{1}{\left(1-0^+\right)\cdot \ln 10} = \frac{1}{1+^-\cdot \ln 10} + \frac{1}{1^-\cdot \ln 10} = \frac{1}{\ln 10} + \frac{1}{\ln 10} = \frac{2}{\ln 10} \neq \pm\infty$$

- $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{x} = \frac{\log\left[1+1^-\right]-\log\left[1-1^-\right]}{1^-} = \frac{\log 2^- - \log 0^+}{1^-} = \frac{+\infty}{1^-} = +\infty$$

<u>La función f (x) tiene asíntotas verticales en x = -1 y x = 1.</u>

30. Representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$, estudiando su dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad, puntos extremos y de inflexión, y las posibles asíntotas.

I) DOMINIO:

$$\boxed{\mathrm{Dom}\, f(x) = \mathrm{IR} - \{2\} = \left]-\infty, 2\right[\cup \left]2, +\infty\right[}$$

II) CRECIMIENTO:

$$f(x)=\frac{x^2}{x-2}\rightarrow f'(x)=\frac{2x\cdot(x-2)-x^2\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x^2}{x^2-4x+4}=\frac{x^2-4x}{x^2-4x+4}=\frac{x\cdot(x-4)}{x^2-4x+4}=0\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x\cdot(x-4)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\ x-4=0\rightarrow x=4\end{cases}$$

$$f'(-1)=\frac{-1\cdot(-1-4)}{(-1)^2-2\cdot(-1)+4}=\frac{-1\cdot(-5)}{(-1)^2-2\cdot(-1)+4}=\frac{5}{1+2+4}=\frac{5}{7}>0\rightarrow \text{f es creciente } \forall\, x\in\left]-\infty,0\right[$$

$$f'(1)=\frac{1\cdot(1-4)}{1^2-2\cdot 1+4}=\frac{1\cdot(-3)}{1-2+4}=\frac{-3}{3}=-1<0\rightarrow \text{f es decreciente } \forall\, x\in\left]0,2\right[$$

$$f'(3)=\frac{3\cdot(3-4)}{3^2-2\cdot 3+4}=\frac{3\cdot(-1)}{9-6+4}=\frac{-3}{7}<0\rightarrow \text{f es decreciente } \forall\, x\in\left]2,4\right[$$

$$f'(5)=\frac{5\cdot(5-4)}{5^2-2\cdot 5+4}=\frac{5\cdot 1}{25-10+4}=\frac{5}{19}>0\rightarrow \text{f es creciente } \forall\, x\in\left]4,+\infty\right[$$

> f es creciente $\forall x\in\left]-\infty,0\right[\ \boxtimes\ \left]4,+\infty\right[$;
> f es decreciente $\forall x\in\left]0,2\right[\ \boxtimes\ \left]2,4\right[$

III) CURVATURA:

$$f'(x)=\frac{x^2-4x}{x^2-4x+4}\rightarrow f''(x)=\frac{(2x-4)\cdot(x^2-4x+4)-(x^2-4x)\cdot(2x-4)}{(x^2-4x+4)^2}=$$

$$=\frac{2x^3-8x^2+8x-4x^2+16x-16-(2x^3-4x^2-8x^2+16x)}{(x^2-4x+4)\cdot(x^2-4x+4)}=$$

$$=\frac{2x^3-12x^2+24x-16-(2x^3-12x^2+16x)}{x^4-4x^3+4x^2-4x^3+16x^2-16x+4x^2-16x+16}=\frac{2x^3-12x^2+24x-16-2x^3+12x^2-16x}{x^4-8x^3+24x^2-32x+16}=$$

$$=\frac{8x-16}{x^4-8x^3+24x^2-32x+16}=0\leftrightarrow 8x-16=0\rightarrow 8x=16\rightarrow x=2\notin \text{Dom f}$$

$$f''(0)=\frac{8\cdot 0-16}{0^4-8\cdot 0^3+24\cdot 0^2-32\cdot 0+16}=\frac{-16}{16}=-1<0\rightarrow \text{f es convexa } \forall\, x\in\left]-\infty,2\right[$$

$$f''(10)=\frac{8\cdot 10-16}{10^4-8\cdot 10^3+24\cdot 10^2-32\cdot 10+16}=\frac{64}{4096}=\frac{1}{64}>0\rightarrow \text{f es cóncava } \forall\, x\in\left]2,+\infty\right[$$

> f es convexa $\forall x\in\left]-\infty,2\right[$;
> f es cóncava $\forall x\in\left]2,+\infty\right[$

IV) EXTREMOS:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \dfrac{0^2}{0-2} = \dfrac{0}{-2} = 0 \\[2ex] f''(0) = \dfrac{2\cdot 0^2 + 24\cdot 0 - 16}{0^4 - 4\cdot 0^3 + 12\cdot 0^2 - 16\cdot 0 + 16} = \dfrac{-16}{16} = -1 < 0 \end{array}\right\} f(x) \text{ tiene un máximo en } (0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(4) = \dfrac{4^2}{4-2} = \dfrac{16}{2} = 8 \\[2ex] f''(4) = \dfrac{2\cdot 4^2 + 24\cdot 4 - 16}{4^4 - 4\cdot 4^3 + 12\cdot 4^2 - 16\cdot 4 + 16} = \dfrac{112}{144} = \dfrac{7}{9} > 0 \end{array}\right\} f(x) \text{ tiene un mínimo en } (4,8)$$

<u>f (x) tiene un máximo en (0 , 0) , un mínimo en (4 , 8)</u>.

V) ASÍNTOTAS:

- Verticales:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{x-2} = \frac{(2^-)^2}{2^- - 2} = \frac{4^-}{0^-} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{x-2} = \frac{(2^+)^2}{2^+ - 2} = \frac{4^+}{0^+} = +\infty$$

<u>f (x) tiene un asíntota vertical en x = 2.</u>

- Horizontales:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x-2} = \frac{(-\infty)^2}{-\infty-2} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x-2} = \frac{(+\infty)^2}{+\infty-2} = +\infty$$

<u>No tiene asíntotas horizontales.</u>

- Oblicuas:

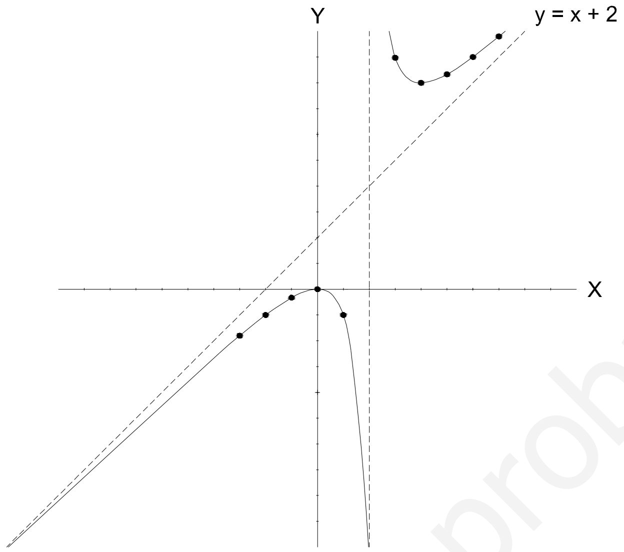
$$y = mx + n \begin{cases} m = \displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}\cdot\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1}{1-\frac{2}{-\infty}} = \frac{1}{1-0} = 1 \\[3ex] n = \displaystyle\lim_{x\to -\infty} [\, f(x) - mx \,] = \lim_{x\to -\infty}\left[\frac{x^2}{x-2} - x\right] = \lim_{x\to -\infty}\left[\frac{x^2}{x-2} - \frac{x\cdot(x-2)}{x-2}\right] = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{x-2} = 2 \end{cases}$$

$$y = mx + n \begin{cases} m = \displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}\cdot\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1}{1-\frac{2}{+\infty}} = \frac{1}{1-0} = 1 \\[3ex] n = \displaystyle\lim_{x\to +\infty} [\, f(x) - mx \,] = \lim_{x\to +\infty}\left[\frac{x^2}{x-2} - x\right] = \lim_{x\to +\infty}\left[\frac{x^2}{x-2} - \frac{x\cdot(x-2)}{x-2}\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x-2} = 2 \end{cases}$$

<u>La función f (x) tiene como asíntota oblicua la recta y = x + 2 .</u>

VI) GRÁFICA:

$$f(-3)=\frac{(-3)^2}{-3-2}=\frac{9}{-5}=-1'8\;;\quad f(-2)=\frac{(-2)^2}{-2-2}=\frac{4}{-4}=-1\quad;$$
$$f(-1)=\frac{(-1)^2}{-1-2}=\frac{1}{-3}\approx-0'3\quad f(1)=\frac{1^2}{1-2}=\frac{1}{-1}=-1\quad;\quad f(3)=\frac{3^2}{3-2}=\frac{9}{1}=9$$
$$;\quad f(4)=\frac{4^2}{4-2}=\frac{16}{2}=8$$



31. Considera la función f real de variable real definida de la forma $f(x)=1+x\cdot|x|$. Se pide:

$$f'(x)\begin{cases}\text{si } x<0 \to f'(x)=-2x\\ \text{si } x=0 \to f'(x)=0\\ \text{si } x>0 \to f'(x)=2x\end{cases}$$

a) Halla la derivada de f.

$$f(x)\begin{cases}\text{si } x<0 \to f(x)=1+x\cdot(-x)=-x^2+1\\ \text{si } x=0 \to f(x)=1+x\cdot 0=1+0=1\\ \text{si } x>0 \to f(x)=1+x\cdot x=x^2+1\end{cases}\quad\Rightarrow$$

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$f'(-1)=-2\cdot(-1)=2>0\to f\ \text{ es creciente }\ \forall x\in\left]-\infty,0\right[$$
$$f'(1)=2\cdot 1>0\to f\ \text{ es decreciente }\ \forall x\in\left]0,+\infty\right[$$

f es siempre creciente.

c) Calcula $\int_{-1}^{2} x\, f(x)\, dx$

$$\int_{-1}^{2} x\,f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} x\cdot\left(-x^2+1\right)dx+\int_{0}^{2} x\cdot\left(x^2+1\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(-x^3+x\right)dx+\int_{0}^{2}\left(x^3+x\right)dx=$$

$$=-\int_{-1}^{0} x^3\,dx+\int_{-1}^{0} x\,dx+\int_{0}^{2} x^3\,dx+\int_{0}^{2} x\,dx=-\frac{1}{4}\int_{-1}^{0} 4x^3\,dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} 2x\,dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{2} 4x^3\,dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2} 2x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\left|\,x^4\right|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}\cdot\left|\,x^2\right|_{-1}^{0}+\frac{1}{4}\cdot\left|\,x^4\right|_{0}^{2}+\frac{1}{2}\cdot\left|\,x^2\right|_{0}^{2}=-\frac{1}{4}\cdot\left[0^4-(-1)^4\right]+\frac{1}{2}\cdot\left[0^2-(-1)^2\right]+\frac{1}{4}\cdot\left(2^4-0^4\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\left(2^2-0^2\right)=-\frac{1}{4}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot(-1)+\frac{1}{4}\cdot 16+\frac{1}{2}\cdot 4=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{16}{4}+\frac{4}{2}=\frac{1}{4}-\frac{2}{4}+\frac{16}{4}+\frac{8}{4}=\frac{23}{4}$$

32. Dada la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, se pide:

a) Determinar los valores numéricos de los coeficientes (a, b, c) para los cuales la función tiene un mínimo para x = 1 y un punto de inflexión en el origen de coordenadas.

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c\rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b\rightarrow f''(x)=6x+2a$$

$$f''(x)=6x+2a=0\rightarrow f''(0)=6\cdot 0+2a=0\rightarrow 2a=0\rightarrow a=0$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b\xrightarrow{a=0}f'(x)=3x^2+b\rightarrow f'(1)=3\cdot 1^2+b=0\rightarrow b=-3$$

$$\boxed{\begin{cases}a=\ \ 0\\ b=-3\\ c=\ \ 0\end{cases}}$$

$$f(x)=x^3-3x+c\rightarrow f(0)=0^3-3\cdot 0+c=0\rightarrow c=0\Rightarrow\begin{cases}f(x)=x^3-3x\\ f'(x)=3x^2-3\\ f''(x)=6x\end{cases}$$

b) Representar gráficamente la función f (x).

1º) DOMINIO: Dom f = IR

2º) EXTREMOS:

$$f'(x)=3x^2-3=0\rightarrow 3x^2=3\rightarrow x^2=1\rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

$$f''(-1)=6\cdot(-1)=-6<0\rightarrow f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)=-1+3=2\rightarrow(-1,2)\ \text{es máximo relativo}$$

$$f''(1)=6\cdot 1=6>0\rightarrow f(1)=1^3-3\cdot 1=1-3=-2\rightarrow(1,-2)\ \text{es mínimo relativo}$$

3º) CRECIMIENTO:

$$f'(-10)=3\cdot(-10)^2-3=3\cdot 100-3=300-3=297>0\rightarrow f\ \text{es creciente}\ \forall x\in\left]-\infty,-1\right[$$

$$f'(0)=3\cdot 0^2-3=0-3=-3<0\rightarrow f\ \text{es decreciente}\ \forall x\in\left]-1,1\right[$$

$$f'(10)=3\cdot 10^2-3=3\cdot 100-3=300-3=297>0\rightarrow f\ \text{es creciente}\ \forall x\in\left]1,+\infty\right[$$

4º) INFLEXIÓN:

$$f''(x)=6x=0\rightarrow x=0\rightarrow f(0)=0^3-3\cdot 0=0-0=0\rightarrow(0,0)\ \text{es punto de inflexión}$$

5º) CURVATURA:

$f''(-1) = 6\cdot(-1) = -6 < 0 \rightarrow f$ es convexa $\forall x \in \,]-\infty, 0[$

$f''(1) = 6\cdot 1 = 6 > 0 \rightarrow f$ es cóncava $\forall x \in \,]0, +\infty[$

6º) ASÍNTOTAS:

- Verticales: No tiene asíntotas verticales.
- Horizontales:

  $\lim_{x\to-\infty} (x^3 - 3x) = (-\infty)^3 - 3\cdot(-\infty) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} (x^3 - 3x) = (+\infty)^3 - 3\cdot(+\infty) = +\infty$

  No tiene asíntotas horizontales.

- Oblicuas:

$$y = mx + n \begin{cases} m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 3x}{x} = \lim_{x\to-\infty} (x^2 - 3) = (-\infty)^2 - 3 = +\infty \\ n = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx] \end{cases}$$

$$y = mx + n \begin{cases} m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 3x}{x} = \lim_{x\to+\infty} (x^2 - 3) = (+\infty)^2 - 3 = +\infty \\ n = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx] \end{cases}$$

No tiene asíntotas oblicuas.

7º) SIMETRÍA:

$f(-x) = (-x)^3 - 3\cdot(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -f(x) \rightarrow f$ es impar (simétrica respecto al origen)

8º) CORTES:

- Con el eje X:

$$f(x) = x^3 - 3x = 0 \rightarrow x\cdot(x^2 - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1'732 \end{cases}$$

f corta al eje X en los puntos $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$.

- Con el eje Y:

$f(0) = 0^3 - 3\cdot 0 = 0 \rightarrow$ f corta al eje Y en el punto $(0, 0)$.

9º) PUNTOS:

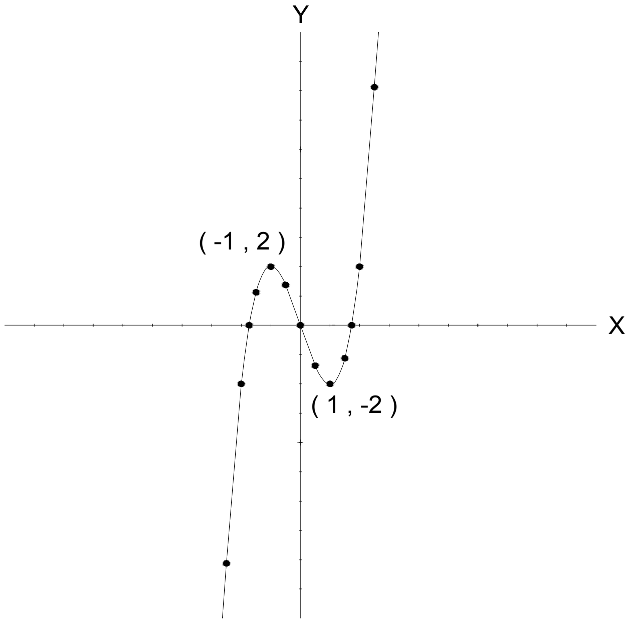
$f(-3) = (-3)^3 - 3\cdot(-3) = -27 + 9 = -18$; $f(-2'5) = (-2'5)^3 - 3\cdot(-2'5) = -8'125$

$f(-2) = (-2)^3 - 3\cdot(-2) = -8 + 6 = -2$; $f(-1'5) = (-1'5)^3 - 3\cdot(-1'5) = 1'125$

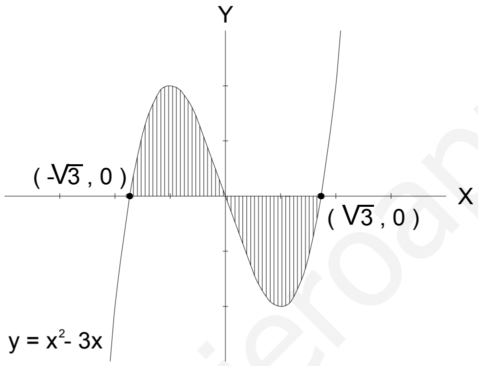
$f(-0'5) = (-0'5)^3 - 3\cdot(-0'5) = 1'375$; $f(0'5) = -1'375$;

$f(1'5) = -1'125$ $f(2) = 2$; $f(2'5) = 8'125$; $f(3) = 18$

10º) GRÁFICA:



c) Calcular el área limitada por la curva representativa de f (x) y el eje de abcisas.



$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{0} \left(x^3 - 3x \right) dx - \int_{0}^{\sqrt{3}} \left(x^3 - 3x \right) dx = \frac{1}{4} \int_{-\sqrt{3}}^{0} 4x^3 \, dx - \frac{3}{2} \int_{-\sqrt{3}}^{0} 2x \, dx - \frac{1}{4} \int_{0}^{\sqrt{3}} 4x^3 \, dx + \frac{3}{2} \int_{0}^{\sqrt{3}} 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left| x^4 \right|_{-\sqrt{3}}^{0} - \frac{3}{2} \cdot \left| x^2 \right|_{-\sqrt{3}}^{0} - \frac{1}{4} \cdot \left| x^4 \right|_{0}^{\sqrt{3}} + \frac{3}{2} \cdot \left| x^2 \right|_{0}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{4} \cdot \left[0^4 - \left(-\sqrt{3} \right)^4 \right] - \frac{3}{2} \cdot \left[0^2 - \left(-\sqrt{3} \right)^2 \right] -$$

$$- \frac{1}{4} \cdot \left[\left(\sqrt{3} \right)^4 - 0^4 \right] + \frac{3}{2} \cdot \left[\left(\sqrt{3} \right)^2 - 0^2 \right] = \frac{1}{4} \cdot (0 - 9) - \frac{3}{2} \cdot (0 - 3) - \frac{1}{4} \cdot (9 - 0) + \frac{3}{2} \cdot (3 - 0) =$$

$$= -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} + \frac{9}{2} = \frac{36 - 18}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

33. a) Dadas la parábola $y = 6x - x^2$ y la recta y = 2x , representar gráficamente la parábola y la recta y determinar el área limitada por ambas.

1º) DOMINIO: $\text{Dom} (- x^2 + 6x) = IR$

2º) EXTREMOS:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = -2x+6=0 \rightarrow 2x=6 \rightarrow x=3 \\ f(3) = -3^2+6\cdot 3 = -9+18=9 \\ f''(x) = -2 \end{array}\right\} (3,9) \text{ es un máximo relativo de } f(x) = -x^2+6x$$

3º) CRECIMIENTO:

$f'(0) = -2\cdot 0+6 = 6 > 0 \longrightarrow f$ es creciente $\forall x \in \,]-\infty, 3[$

$f'(10) = -2\cdot 10+6 = -20+6 = -14 < 0 \longrightarrow f$ es decreciente $\forall x \in \,]3, +\infty[$

4º) INFLEXIÓN:

$f''(x) = -2 \neq 0 \longrightarrow$ No tiene puntos de inflexión.

5º) CURVATURA:

$f''(x) = -2 < 0 \longrightarrow f$ es convexa $\forall x \in IR$

6º) ASÍNTOTAS:

- Verticales: No tiene asíntotas verticales.
- Horizontales:

  $\lim_{x\to -\infty} \left(-x^2+6x\right) = -(-\infty)^2+6\cdot(-\infty) = -\infty$; $\lim_{x\to +\infty} \left(-x^2+6x\right) = -(+\infty)^2+6\cdot(+\infty) = -\infty$

  No tiene asíntotas horizontales.
- Oblicuas:

$$y = mx+n \begin{cases} m = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{-x^2+6x}{x} = \lim_{x\to -\infty} (-x+6) = +\infty \\ n = \lim_{x\to -\infty} \left[f(x) - mx \right] \end{cases}$$

$$y = mx+n \begin{cases} m = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{-x^2+6x}{x} = \lim_{x\to +\infty} (-x+6) = -\infty \\ n = \lim_{x\to -\infty} \left[f(x) - mx \right] \end{cases}$$

No tiene asíntotas oblicuas.

7º) SIMETRÍA:

$f(-x) = -(-x)^2+6\cdot(-x) = -x^2-6x \neq -f(x), f(x) \longrightarrow f$ no es par ni impar, pero simétrica a $x=3$

8º) CORTES:

- Con el eje X:

$f(x) = -x^2+6x=0 \rightarrow -x\cdot(x-6)=0 \rightarrow \begin{cases} -x=0 \rightarrow x=0 \\ x-6=0 \rightarrow x=6 \end{cases} \Rightarrow f$ corta a OX en $(0,0)$ y $(6,0)$.

- Con el eje Y: $f(0) = -0^2+6\cdot 0 = 0 \longrightarrow$ f corta al eje Y en el punto $(0,0)$.

9º) PUNTOS:

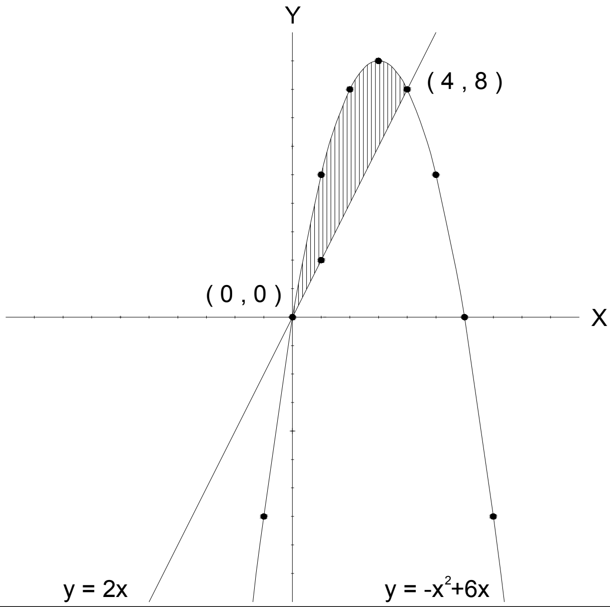
$f(-2) = -(-2)^2+6\cdot(-2) = -4-12 = -16$; $f(-1) = -(-1)^2+6\cdot(-1) = -1-6 = -7$

$f(1) = -1^2+6\cdot 1 = -1+6 = 5$; $f(2) = -2^2+6\cdot 2 = -4+12 = 8$

$f(4) = -4^2+6\cdot 4 = -16+24 = 8$; $f(5) = -5^2+6\cdot 5 = -25+30 = 5$

$f(7) = -7^2+6\cdot 7 = -49+42 = -7$; $f(8) = -8^2+6\cdot 8 = -64+48 = -16$

10º) GRÁFICA : $-x^2+6x = 2x \rightarrow -x^2+4x=0 \rightarrow -x\cdot(x-4)=0 \rightarrow x_1=0$ y $x_2=4$



$$A=\int_0^4\left(-x^2+6x\right)dx-\int_0^4 2x\,dx=-\frac{1}{3}\int_0^4 3x^2\,dx+3\int_0^4 2x\,dx-\int_0^4 2x\,dx=-\frac{1}{3}\int_0^4 3x^2\,dx+2\int_0^4 2x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\left|\,x^3\right|_0^4+2\cdot\left|\,x^2\right|_0^4=-\frac{1}{3}\cdot\left(4^3-0^3\right)+2\cdot\left(4^2-0^2\right)=-\frac{1}{3}\cdot 64+2\cdot 16=-\frac{64}{3}+32=\frac{96-64}{3}=\frac{32}{3}u^2$$

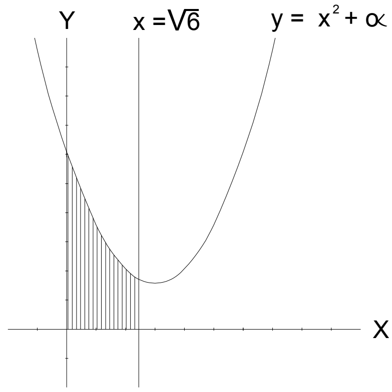
b) Hallar el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}\right]$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-(1-x)^{\frac{1}{2}}}{3x}\right]\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{1}{2}\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)}{3}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{3}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{6}\right]=\frac{\frac{1}{\sqrt{1+0}}+\frac{1}{\sqrt{1-0}}}{6}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}}}{6}=\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}}{6}=\frac{1+1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

34. Para cada número real positivo α , se considera la función $g(x)=x^2+\alpha$.Se pide razonadamente:

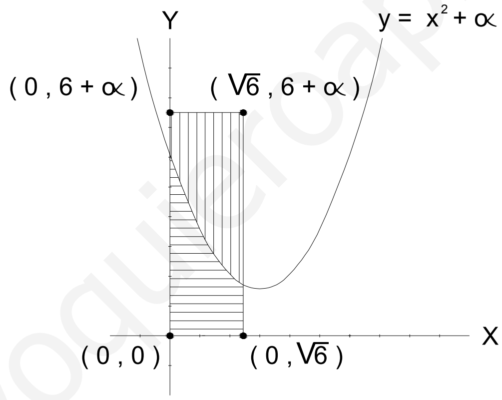
a) El área de la región del plano limitada por el eje OX, el eje OY, la recta $x=\sqrt{6}$ y la curva $y=g(x)$.



$$A=\int_0^{\sqrt{6}}\left(x^2+\alpha\right)dx=-\frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{6}}3x^2\,dx+\alpha\int_0^{\sqrt{6}}dx=\frac{1}{3}\cdot\left|\,x^3\right|_0^{\sqrt{6}}+\alpha\cdot\left|\,x\right|_0^{\sqrt{6}}=\frac{1}{3}\cdot\left[\left(\sqrt{6}\right)^3-0^3\right]+\alpha\cdot\left(\sqrt{6}-0\right)=$$

$$=\frac{6\sqrt{6}}{3}+\alpha\sqrt{6}=2\sqrt{6}+\alpha\sqrt{6}=(\,\alpha+2\,)\cdot\sqrt{6}\ u^2$$

b) El valor α para el que la curva $y=x^2+\alpha$ divide al rectángulo de vértices (0, 0), ($\sqrt{6}$, 0) , ($\sqrt{6}$, $6+\alpha$) , (0 , $6+\alpha$) en dos regiones de igual área.

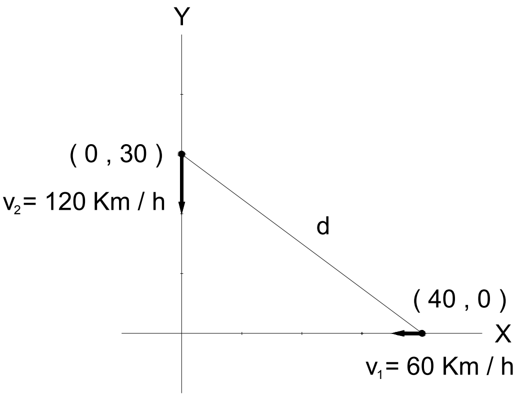


$$A_T=\sqrt{6}\cdot(\,6+\alpha)\rightarrow A=\frac{1}{2}\cdot A_T\rightarrow A_T=2A\xrightarrow[A=\sqrt{6}\cdot(\,\alpha+2\,)]{A_T=\sqrt{6}\cdot(\,\alpha+6\,)}\sqrt{6}\cdot(\,\alpha+6\,)=2\sqrt{6}\cdot(\,\alpha+2\,)\rightarrow$$

$$\rightarrow\alpha+6=2\cdot(\alpha+2)=2\alpha+4\rightarrow\alpha-2\alpha=4-6\rightarrow-\alpha=-2\rightarrow\alpha=2$$

35. Dos líneas férreas se cortan perpendicularmente. Por cada línea avanza una locomotora (de longitud despreciable), dirigiéndose ambas al punto de corte; sus velocidades son 60 Km/h y 120 Km/h y han salido simultáneamente de estaciones situadas, respectivamente, a 40 km y 30 Km del punto de corte.

1º Hallar la distancia a la que se encuentran las locomotoras, en función del tiempo que pasa desde que inician su recorrido.



$$x(t) = -60t + 40$$

$$y(t) = -120t + 30$$

$$d^2 = x^2 + y^2 \rightarrow d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} d &= \sqrt{(-60t+40)^2 + (-120t+30)^2} = \sqrt{3600t^2 - 4800t + 1600 + 14400t^2 - 7200t + 900} = \\ &= \sqrt{18000t^2 - 12000t + 2500} = 10\sqrt{180t^2 - 120t + 25} = 10\sqrt{5}\sqrt{36t^2 - 24t + 5} \end{aligned}}$$

2º Hallar el valor mínimo de dicha distancia.

$$d = 10\sqrt{5}\cdot\left(36t^2 - 24t + 5\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow d' = 10\sqrt{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(36t^2 - 24t + 5\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(72t - 24) = 5\sqrt{5}\cdot\frac{72t - 24}{\sqrt{36t^2 - 24t + 5}} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 72t - 24 = 0 \rightarrow 72t = 24 \rightarrow t = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{d\left(\frac{1}{3}\right) = 10\sqrt{5}\sqrt{36\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 24\cdot\frac{1}{3} + 5} = 10\sqrt{5}\sqrt{36\cdot\frac{1}{9} - 24\cdot\frac{1}{3} + 5} = 10\sqrt{5}\sqrt{4 - 8 + 5} = 10\sqrt{5} \approx 22'36\ \text{Km}}$$

36. De la función f conocemos que :

a) Su gráfica pasa por el punto (1, 6).

b) $f'(2) = 4$

c) Su segunda derivada es la función constante 2 , es decir $f''(x) = 2$.

Calcular razonadamente la función f.

$$f''(x) = 2 \rightarrow f'(x) = \int 2\,dx = 2\int dx = 2x + C \xrightarrow{f'(2)=4} f'(2) = 2\cdot 2 + C = 4 + C = 4 \rightarrow C = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x \rightarrow f(x) = \int 2x\,dx = x^2 + C \xrightarrow{f(1)=6} f(1) = 1^2 + C = 1 + C = 6 \rightarrow C = 5 \Rightarrow f(x) = x^2 + 5$$

$$\boxed{f(x) = x^2 + 5}$$

37. Se consideran las funciones reales:

$f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5$ y $g(x) = 6x^2 - 7x + 2$.

Se pide:

a) Determinar las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}$$

$$6x^2-7x+2=0 \to x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 6\cdot 2}}{2\cdot 6}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{12}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{12}=\frac{7\pm 1}{12}\to\begin{cases} x_1=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}\approx 0'667 \\ x_2=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}=0'5\end{cases}$$

ASÍNTOTAS HORIZONTALES:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}=-\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}=+\infty\end{array}\right\}\to \text{No tiene asíntotas horizontales}$$

_ ASÍNTOTAS VERTICALES:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} h(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}=\frac{12\cdot\left(\frac{1^-}{2}\right)^3-8\cdot\left(\frac{1^-}{2}\right)^2+9\cdot\left(\frac{1^-}{2}\right)-5}{6\cdot\left(\frac{1^-}{2}\right)^2-7\cdot\left(\frac{1^-}{2}\right)+2}=$$

$$=\frac{12\cdot\left(\frac{1^-}{8}\right)-8\cdot\left(\frac{1^-}{4}\right)+\frac{9^-}{2}-5}{6\cdot\left(\frac{1^-}{4}\right)-\frac{7^-}{2}+2}=\frac{\frac{12^-}{8}-\frac{8^-}{4}+\frac{9^-}{2}-5}{\frac{6^-}{4}-\frac{7^-}{2}+2}=\frac{\frac{3^-}{2}-\frac{4^-}{2}+\frac{9^-}{2}-\frac{10}{2}}{\frac{3^-}{2}-\frac{7^-}{2}+\frac{4}{2}}=\frac{\frac{8^-}{2}-\frac{10}{2}}{0^+}=\frac{-\frac{2^-}{2}}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} h(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}=\frac{12\cdot\left(\frac{1^+}{2}\right)^3-8\cdot\left(\frac{1^+}{2}\right)^2+9\cdot\left(\frac{1^+}{2}\right)-5}{6\cdot\left(\frac{1^+}{2}\right)^2-7\cdot\left(\frac{1^+}{2}\right)+2}=$$

$$=\frac{12\cdot\left(\frac{1^+}{8}\right)-8\cdot\left(\frac{1^+}{4}\right)+\frac{9^+}{2}-5}{6\cdot\left(\frac{1^+}{4}\right)-\frac{7^+}{2}+2}=\frac{\frac{12^+}{8}-\frac{8^+}{4}+\frac{9^+}{2}-5}{\frac{6^+}{4}-\frac{7^+}{2}+2}=\frac{\frac{3^+}{2}-\frac{4^+}{2}+\frac{9^+}{2}-\frac{10}{2}}{\frac{3^+}{2}-\frac{7^+}{2}+\frac{4}{2}}=\frac{\frac{8^+}{2}-\frac{10}{2}}{0^-}=\frac{-\frac{2^+}{2}}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}^-} h(x)=\lim_{x\to\frac{2}{3}^-}\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}=\frac{12\cdot\left(\frac{2^-}{3}\right)^3-8\cdot\left(\frac{2^-}{3}\right)^2+9\cdot\left(\frac{2^-}{3}\right)-5}{6\cdot\left(\frac{2^-}{3}\right)^2-7\cdot\left(\frac{2^-}{3}\right)+2}=$$

$$=\frac{12\cdot\left(\frac{8}{27}^-\right)-8\cdot\left(\frac{4^-}{9}\right)+\frac{18^-}{3}-5}{6\cdot\left(\frac{4^-}{9}\right)-\frac{14^-}{3}+2}=\frac{\frac{96^-}{27}-\frac{32^-}{9}+6^--5}{\frac{24^-}{9}-\frac{14^-}{3}+2}=\frac{\frac{32^-}{9}-\frac{32^-}{9}+6^--5}{\frac{8^-}{3}-\frac{14^-}{3}+2}=\frac{1^-}{-2^-+2}=\frac{1^-}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{2^+}{3}} h(x) = \lim_{x\to\frac{2^+}{3}} \frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2} = \frac{12\cdot\left(\frac{2^+}{3}\right)^3-8\cdot\left(\frac{2^+}{3}\right)^2+9\cdot\left(\frac{2^+}{3}\right)-5}{6\cdot\left(\frac{2^+}{3}\right)^2-7\cdot\left(\frac{2^+}{3}\right)+2} =$$

$$= \frac{12\cdot\left(\frac{8^+}{27}\right)-8\cdot\left(\frac{4^+}{9}\right)+\frac{18^+}{3}-5}{6\cdot\left(\frac{4^+}{9}\right)-\frac{14^+}{3}+2} = \frac{\frac{96^+}{27}-\frac{32^+}{9}+6^+-5}{\frac{24^+}{9}-\frac{14^+}{3}+2} = \frac{\frac{32^+}{9}-\frac{32^+}{9}+6^+-5}{\frac{8^+}{3}-\frac{14^+}{3}+2} = \frac{1^+}{-2^++2} = \frac{1^+}{0^-} = -\infty$$

_ ASÍNTOTAS OBLICUAS:

$$y = mx+n\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^3-7x^2+2x} = 2 \\ n = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}-2x\right] = \\ = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}-2x\cdot\frac{6x^2-7x+2}{6x^2-7x+2}\right] = \\ = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}-\frac{12x^3-14x^2+4x}{6x^2-7x+2}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x^2+5x-5}{6x^2-7x+2} = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 2x+1$$

$$y = mx+n\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^3-7x^2+2x} = 2 \\ n = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}-2x\right] = \\ = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}-2x\cdot\frac{6x^2-7x+2}{6x^2-7x+2}\right] = \\ = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}-\frac{12x^3-14x^2+4x}{6x^2-7x+2}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x^2+5x-5}{6x^2-7x+2} = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 2x+1$$

> La función $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene dos asíntotas verticales en $x=\frac{1}{2}$ y $x=\frac{2}{3}$ y una asíntota oblicua en la recta $y=2x+1$

b) **Calcular la función $H(x)=\int\frac{f(x)}{g(x)}dx$ que cumple $H(1)=1$**

$$H(x) = \int\frac{f(x)}{g(x)}dx = \int\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}dx = *$$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
12x^3 & -8x^2 & +9x & -5 & 6x^2 \; -7x \; +2 \\ \hline
-(12x^3 & -14x^2 & +4x) & & 2x \; +1 \\ \hline
 & 6x^2 & +5x & -5 & \\
 & -(6x^2 & -7x & +2) & \\ \hline
 & & 12x & -7 &
\end{array}
$$

$$* = \int\left(2x+1+\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}\right)dx = \int 2x\,dx + \int dx + \int\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}\,dx = **$$

$$\frac{12x-7}{6x^2-7x+2} = \frac{12x-7}{6\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)} = \frac{12x-7}{2\cdot 3\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)} = \frac{12x-7}{(2x-1)\cdot(3x-2)} = \frac{A}{2x-1}+\frac{B}{3x-2} =$$

$$= \frac{12x-7}{(2x-1)\cdot(3x-2)} = \frac{A\cdot(3x-2)+B\cdot(2x-1)}{(2x-1)\cdot(3x-2)} \rightarrow 12x-7 = A\cdot(3x-2)+B\cdot(2x-1)$$

- Si $x=\frac{1}{2}$:

$$12\cdot\frac{1}{2}-7 = A\cdot\left(3\cdot\frac{1}{2}-2\right)+B\cdot\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right) \rightarrow 6-7 = A\cdot\left(\frac{3}{2}-2\right)+B\cdot\left(\frac{2}{2}-1\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow -1 = A\cdot\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{2}\right)+B\cdot(1-1) \rightarrow -1 = A\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+B\cdot 0 \rightarrow -1 = -\frac{A}{2}+0 \rightarrow 1 = \frac{A}{2} \rightarrow A = 1\cdot 2 = 2$$

- Si $x=\frac{2}{3}$:

$$12\cdot\frac{2}{3}-7 = A\cdot\left(3\cdot\frac{2}{3}-2\right)+B\cdot\left(2\cdot\frac{2}{3}-1\right) \rightarrow \frac{24}{3}-7 = A\cdot\left(\frac{6}{3}-2\right)+B\cdot\left(\frac{4}{3}-1\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow 8-7 = A\cdot(2-2)+B\cdot\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{3}\right) \rightarrow 1 = A\cdot 0+B\cdot\frac{1}{3} \rightarrow 1 = 0+\frac{B}{3} \rightarrow 1 = \frac{B}{3} \rightarrow B = 1\cdot 3 = 3$$

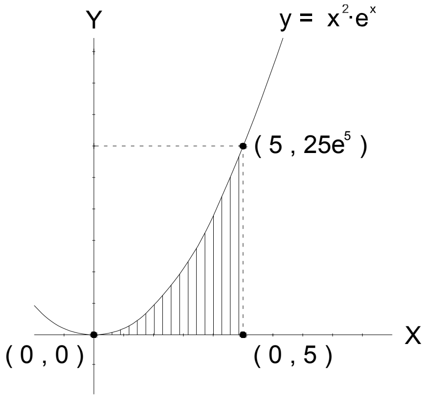
$$** = \int 2x\,dx + \int dx + \int\frac{2}{2x-1}\,dx + \int\frac{3}{3x-2}\,dx = x^2+x+\ln|2x-1|+\ln|3x-2|+C =$$

$$= \ln|(2x-1)\cdot(3x-2)|+x^2+x+C = \ln\left(6x^2-7x+2\right)+x^2+x+C$$

Pero ni siquiera hacía falta resolver la integral de forma racional, sino de forma inmediata desde ** :

$$\boxed{\begin{array}{l} H(1) = \ln\left(6\cdot 1^2-7\cdot 1+2\right)+1^2+1+C = \ln(6\cdot 1-7+2)+1+1+C = \ln(6-7+2)+1+1+C = \\ = \ln 1+2+C = 0+2+C = 2+C = 1 \rightarrow c = 1-2 = -1 \rightarrow H(x) = \ln\left(6x^2-7x+2\right)+x^2+x-1 \end{array}}$$

38. Calcular el área del recinto plano limitado por la curva $y = x^2 \cdot e^x$, cuando x varía entre 0 y 5, el segmento horizontal de extremos (0 , 0) y (5 , 0) y el segmento vertical de extremos (5 , 0) y (5 , $25e^5$).



$$A = \int_0^5 x^2 \cdot e^x \, dx$$

Resolveremos la integral $\int x^2 \cdot e^x \, dx$ por partes:

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du \rightarrow \int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx \Rightarrow \begin{cases} u = \\ v' = \end{cases}$$

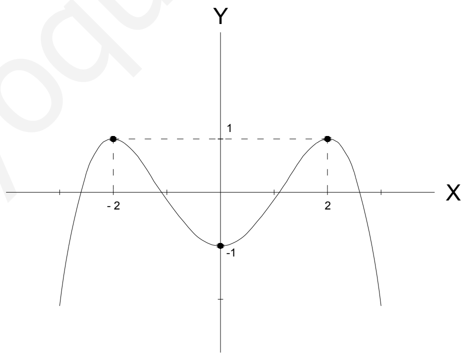
$$\int x^2 \cdot e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \, dx = *$$

Volveremos a integrar por partes:

$$* = x^2 \cdot e^x - \left(2x \cdot e^x - \int 2e^x \, dx \right) = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2\int e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C =$$
$$= \left(x^2 - 2x + 2 \right) \cdot e^x + C$$

$$A = \int_0^5 x^2 \cdot e^x \, dx = \left| \left(x^2 - 2x + 2 \right) \cdot e^x \right|_0^5 = \left(5^2 - 2 \cdot 5 + 2 \right) \cdot e^5 - \left(0^2 - 2 \cdot 0 + 2 \right) \cdot e^0 =$$
$$= \left(25 - 10 + 2 \right) \cdot e^5 - \left(0 - 0 + 2 \right) \cdot 1 = 17 \cdot e^5 - 2 \cdot 1 = 17 \cdot e^5 - 2 \approx 2521'024 \ u^2$$

39. Se considera una función tal que su representación gráfica en el intervalo] -3 , 3 [es la siguiente:



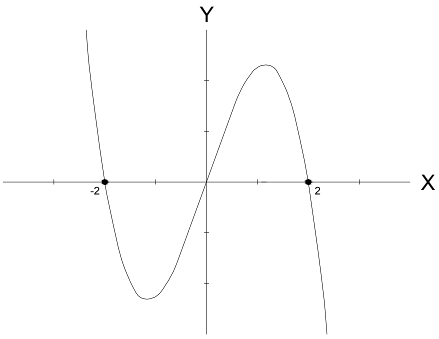
a) **Determina las abscisas de sus puntos extremos relativos.**

La función tiene dos máximos relativos en (-2 , 1) y (2 , 1) y un mínimo relativo en (0 , -1).

b) **Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo] -3 , 3 [.**

f es creciente $\forall x \in \left] -3, -2 \right[\cup \left] 0, 2 \right[$ y decreciente $\forall x \in \left] -2, 0 \right[\cup \left] 2, 3 \right[$

c) **Haz un esbozo de la gráfica de la derivada de esta función.**



d) Sabiendo que la función es de la forma:
$f(x)=ax^4+bx^2+c$, encontrar de qué función se trata.

$$f(-2)=a\cdot(-2)^4+b\cdot(-2)^2+c=16a+4b+c=1$$

$$f(0)=a\cdot 0^4+b\cdot 0^2+c=0+0+c=c=-1$$

$$f(2)=a\cdot 2^4+b\cdot 2^2+c=16a+4b+c=1\xrightarrow{c=-1}16a+4b-1=1\rightarrow 16a+4b=2\rightarrow 8a+2b=1$$
$$f'(x)=4ax^3+2bx\rightarrow f'(2)=4a\cdot 2^3+2b\cdot 2=32a+4b=0\rightarrow 8a+b=0\rightarrow b=-8a$$

$$8a+2b=1\xrightarrow{b=-8a}8a+2\cdot(-8a)=1\rightarrow 8a-16a=1\rightarrow -8a=1\rightarrow a=-\frac{1}{8}$$

$$\boxed{f(x)=-\frac{1}{8}\cdot x^4+x^2-1}$$

40. Dibuja la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{|x|}{2-x}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

$$f(x)=\frac{|x|}{2-x}\rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{2-x} & \text{si } x<0\\[2ex] \dfrac{x}{2-x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-2} & \text{si } x<0\\[2ex] \dfrac{x}{-x+2} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

1º) DOMINIO:
$\text{Dom } f=\mathbb{IR}-\{2\}=]-\infty,2[\ \boxtimes\ ]2,+\infty[$

2º) EXTREMOS:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1\cdot(x-2)-x\cdot 1}{(x-2)^2}=\dfrac{x-2-x}{x^2-2\cdot 2\cdot x+2^2}=\dfrac{-2}{x^2-4x+4} & \text{si } x<0\\[3ex] \dfrac{1\cdot(-x+2)-x\cdot(-1)}{(-x+2)^2}=\dfrac{-x+2+x}{(-x)^2-2\cdot x\cdot 2+2^2}=\dfrac{2}{x^2-4x+4} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

$f'(x) \neq 0 \;\; \forall x \in \text{Dom } f \longrightarrow$ No hay extremos relativos

3º) CRECIMIENTO:

$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 > 0 \;\; \forall x \in \text{Dom } f$

$$\boxed{\begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ si } x < 0 \longrightarrow f \text{ es decreciente } \forall x \in \left]-\infty, 0\right[\\ f'(x) > 0 \text{ si } x \geq 0 \longrightarrow f \text{ es creciente } \forall x \in \left]0, 2\right[\boxtimes \left]2, +\infty\right[\end{array}}$$

4º) INFLEXIÓN:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{0 \cdot (x^2-4x+4) - (-2) \cdot (2x-4)}{(x^2-4x+4)^2} = \dfrac{4x-8}{x^4-4x^3+4x^2-4x^3+16x^2-16x+4x^2-16x+16} = * \\[2ex] \dfrac{0 \cdot (x^2-4x+4) - 2 \cdot (2x-4)}{(x^2-4x+4)^2} = \dfrac{-4x+8}{x^4-4x^3+4x^2-4x^3+16x^2-16x+4x^2-16x+16} = ** \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \ldots * = \dfrac{4x-8}{x^4-8x^3+24x^2-32x+16} \text{ si } x < 0 \\[2ex] \ldots ** = \dfrac{-4x+8}{x^4-8x^3+24x^2-32x+16} \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} 4x-8 = 0 \rightarrow x = 2 \text{ si } x < 0 \\ -4x+8 = 0 \rightarrow x = 2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

f no tiene puntos de inflexión porque $x \notin \text{Dom } f$

5º) CURVATURA:

$$f''(0) = \frac{4 \cdot 0 - 8}{0^4 - 8 \cdot 0^3 + 24 \cdot 0^2 - 32 \cdot 0 + 16} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} < 0 \rightarrow f \text{ es cóncava } \forall x \in \left]-\infty, 2\right[$$

$$f''(10) = \frac{4 \cdot 10 - 8}{10^4 - 8 \cdot 10^3 + 24 \cdot 10^2 - 32 \cdot 10 + 16} = \frac{40-8}{10000 - 8 \cdot 1000 + 24 \cdot 100 - 320 + 16} =$$

$$= \frac{32}{10000 - 8000 + 2400 - 320 + 16} = \frac{32}{4096} > 0 \rightarrow f \text{ es convexa } \forall x \in \left]2, +\infty\right[$$

6º) ASÍNTOTAS:

- Verticales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x}{-x+2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x}{2-x} = \dfrac{2^-}{2-2^-} = \dfrac{2^-}{0^+} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x}{-x+2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x}{2-x} = \dfrac{2^+}{2-2^+} = \dfrac{2^+}{0^-} = -\infty \end{array}\right\} \to \text{f tiene asíntota vertical en } x = 2$$

- Horizontales:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x-2} = 1 \to \text{f tiene una asíntota horizontal en } y = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{-x+2} = -1 \to \text{f tiene una asíntota horizontal en } y = -1$$

- Oblicuas: No tiene asíntotas oblicuas puesto que ya tiene dos asíntotas horizontales.

7º) SIMETRÍA:

$$f(-x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{-x-2} = -\dfrac{x}{x+2} & \text{si } x < 0 \\ \\ \dfrac{-x}{-(-x)+2} = -\dfrac{x}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{cases} \Rightarrow \text{f no es par ni impar}$$

8º) CORTES:

- Con el eje X: $f(x) = 0 \leftrightarrow x = 0 \Rightarrow$ f corta al eje OX en el punto $(0, 0)$.
- Con el eje Y: $f(0) = 0 \leftrightarrow x = 0 \Rightarrow$ f corta al eje OY en el punto $(0, 0)$.

9º) PUNTOS:

$f(-10) = \dfrac{-10}{-10-2} = \dfrac{-10}{-12} = \dfrac{5}{6} = 0'833$; $f(-9) = \dfrac{-9}{-9-2} = \dfrac{-9}{-11} = \dfrac{9}{11} = 0'818$

$f(-8) = \dfrac{-8}{-8-2} = \dfrac{-8}{-10} = \dfrac{4}{5} = 0'8$; $f(-7) = \dfrac{-7}{-7-2} = \dfrac{-7}{-9} = \dfrac{7}{9} = 0'778$

$f(-6) = \dfrac{-6}{-6-2} = \dfrac{-6}{-8} = \dfrac{3}{4} = 0'75$; $f(-5) = \dfrac{-5}{-5-2} = \dfrac{-5}{-7} = \dfrac{5}{7} = 0'714$

$f(-4) = \dfrac{-4}{-4-2} = \dfrac{-4}{-6} = \dfrac{2}{3} = 0'667$; $f(-3) = \dfrac{-3}{-3-2} = \dfrac{-3}{-5} = \dfrac{3}{5} = 0'6$

$f(-2) = \dfrac{-2}{-2-2} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2} = 0'5$; $f(-1) = \dfrac{-1}{-1-2} = \dfrac{-1}{-3} = \dfrac{1}{3} = 0'333$

$$f(1)=\frac{1}{-1+2}=\frac{1}{1}=1 \quad ; \quad f(1'5)=\frac{1'5}{-1'5+2}=\frac{1'5}{0'5}=3 \quad ;$$

$$f(1'75)=\frac{1'75}{-1'75+2}=\frac{1'75}{0'25}=7$$

$$f(2'25)=\frac{2'25}{-2'25+2}=\frac{2'25}{-0'25}=-9 \quad ; \quad f(2'5)=\frac{2'5}{-2'5+2}=\frac{2'5}{-0'5}=-5$$

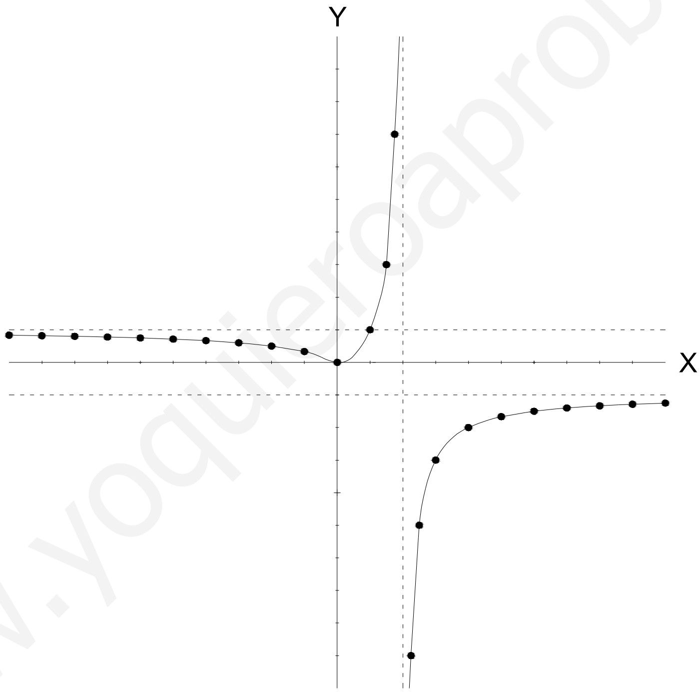
$$f(3)=\frac{3}{-3+2}=\frac{3}{-1}=-3 \quad ; \quad f(4)=\frac{4}{-4+2}=\frac{4}{-2}=-2$$

$$f(5)=\frac{5}{-5+2}=\frac{5}{-3}=-1'667 \quad ; \quad f(6)=\frac{6}{-6+2}=\frac{6}{-4}=-\frac{3}{2}=-1'5$$

$$f(7)=\frac{7}{-7+2}=\frac{7}{-5}=-1'4 \quad ; \quad f(8)=\frac{8}{-8+2}=\frac{8}{-6}=-\frac{4}{3}=-1'333$$

$$f(9)=\frac{9}{-9+2}=\frac{9}{-7}=-\frac{4}{3}=-1'286 \quad ; \quad f(10)=\frac{10}{-10+2}=\frac{10}{-8}=-\frac{5}{4}=-1'25$$

10º) GRÁFICA :



41. a) Determinar el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $\mathbf{f(x)=\dfrac{1}{(3-x)\cdot(3+x)}}$

1º) DOMINIO: $\text{Dom } f = IR-\{-3,3\}=\,]-\infty,-3[\;\cup\;]-3,3[\;\cup\;]3,+\infty[$

2º) EXTREMOS:

$$f(x) = \frac{1}{(3-x)\cdot(3+x)} = \frac{1}{3^2 - x^2} = \frac{1}{-x^2+9} = -\frac{1}{x^2-9} = -\left(x^2-9\right)^{-1}$$

$$f'(x) = -(-1)\cdot\left(x^2-9\right)^{-1}\cdot 2x = \frac{2x}{\left(x^2-9\right)^2} = \frac{2x}{x^4-18x^2+81} = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$f''(x) = \frac{2\cdot\left(x^4-18x^2+81\right) - 2x\cdot\left(4x^3-36x\right)}{\left(x^4-18x^2+81\right)^2} = \frac{2x^4-36x^2+162-\left(8x^4-72x^2\right)}{\left(x^4-18x^2+81\right)^2} =$$

$$= \frac{2x^4-36x^2+162-8x^4+72x^2}{\left(x^4-18x^2+81\right)^2} = \frac{-6x^4+36x^2+162}{\left(x^4-18x^2+81\right)^2}$$

$$f''(0) = \frac{-6\cdot 0^4+36\cdot 0^2+162}{\left(0^4-18\cdot 0^2+81\right)^2} = \frac{162}{81^2} > 0 \rightarrow \left(0, \frac{1}{9}\right) \text{ es un mínimo}$$

3º) CRECIMIENTO:

$$f'(-10) = \frac{2\cdot(-10)}{\left[(-10)^2-9\right]^2} = \frac{-20}{(100-9)^2} = \frac{-20}{91^2} < 0 \rightarrow f \text{ decrece } \forall\, x \in \left]-\infty, -3\right[$$

$$f'(-1) = \frac{2\cdot(-1)}{\left[(-1)^2-9\right]^2} = \frac{-2}{(1-9)^2} = \frac{-2}{(-8)^2} = \frac{-2}{64} < 0 \rightarrow f \text{ decrece } \forall\, x \in \left]-3, 0\right[$$

$$f'(1) = \frac{2\cdot 1}{\left(1^2-9\right)^2} = \frac{2}{(1-9)^2} = \frac{2}{(-8)^2} = \frac{2}{64} > 0 \rightarrow f \text{ crece } \forall\, x \in \left]0, 3\right[$$

$$f'(10) = \frac{2\cdot 10}{\left(10^2-9\right)^2} = \frac{20}{(100-9)^2} = \frac{20}{91^2} > 0 \rightarrow f \text{ crece } \forall\, x \in \left]3, +\infty\right[$$

f es decreciente $\forall x \in \left]-\infty, -3\right[\boxtimes \left]-3, 0\right[$ y f es creciente $\forall x \in \left]0, 3\right[\boxtimes \left]3, +\infty\right[$

b) Obtener los valores de A y B tales que:

$$\frac{1}{(3-x)\cdot(3+x)} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{3+x}$$

$$\frac{1}{(3-x)\cdot(3+x)} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{3+x} = \frac{A\cdot(3+x)}{(3-x)\cdot(3+x)} + \frac{B\cdot(3-x)}{(3-x)\cdot(3+x)} = \frac{A\cdot(3+x)+B\cdot(3-x)}{(3-x)\cdot(3+x)}$$

$$1 = A\cdot(3+x) + B\cdot(3-x)$$

$$\text{Si } x=-3 \Rightarrow 1 = A\cdot[3+(-3)] + B\cdot[3-(-3)] = 1 = A\cdot 0 + B\cdot(3+3) = 0 + B\cdot 6 = 6B \rightarrow B = \frac{1}{6}$$

$$\text{Si } x=3 \Rightarrow 1 = A\cdot(3+3) + B\cdot(3-3) = 1 = A\cdot 6 + B\cdot 0 = A\cdot 6 + 0 = 6A \rightarrow A = \frac{1}{6}$$

c) Calcular el área de la superficie S limitada por la curva $y = \dfrac{1}{(3-x)\cdot(3+x)}$, el eje OX y las rectas de ecuaciones x = -2 y x = 2 .

$$A = \int_{-2}^{2} \frac{1}{(3-x)\cdot(3+x)}\,dx = \int_{-2}^{2}\left(\frac{\frac{1}{6}}{3-x} + \frac{\frac{1}{6}}{3+x}\right)dx = \int_{-2}^{2}\frac{\frac{1}{6}}{3-x}\,dx + \int_{-2}^{2}\frac{\frac{1}{6}}{3+x}\,dx = \frac{-1}{6}\int_{-2}^{2}\frac{-1}{3-x}\,dx + \frac{1}{6}\int_{-2}^{2}\frac{1}{3+x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left(\int_{-2}^{2}\frac{1}{3+x}\,dx - \int_{-2}^{2}\frac{-1}{3-x}\,dx\right) = \frac{1}{6}\cdot\left(\Big|\ln|3+x|\Big|_{-2}^{2} - \Big|\ln|3-x|\Big|_{-2}^{2}\right) = \frac{1}{6}\cdot[(\ln 5 - \ln 1) - (\ln 1 - \ln 5)] =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot(\ln 5 - \ln 1 - \ln 1 + \ln 5) = \frac{1}{6}\cdot(2\ln 5 - 2\ln 1) = \frac{2}{6}\cdot(\ln 5 - \ln 1) = \frac{1}{3}\cdot(\ln 5 - 0) = \frac{1}{3}\cdot\ln 5 \approx 0'536 \ u^2$$

42. Dada la función real $f(x) = e^x - e^{-x}$, se pide calcular:

a) La función $f(x) + f(-x)$

$$f(x) - f(-x) = e^x - e^{-x} + e^{-x} - e^{-(-x)} = e^x - \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^x} - e^x = 0$$

b) La integral $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$, donde a es un número real positivo.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a}(e^x - e^{-x})\,dx = \int_{-a}^{a} e^x\,dx - \int_{-a}^{a} e^{-x}\,dx = \int_{-a}^{a} e^x\,dx + \int_{-a}^{a} -e^{-x}\,dx = \left|e^x\right|_{-a}^{a} + \left|e^{-x}\right|_{-a}^{a} =$$

$$= e^a - e^{-a} + e^{-a} - e^a = 0$$

c) El punto de inflexión de f (x).

$$f(x) = e^x - e^{-x} \rightarrow f'(x) = e^x + e^{-x} \rightarrow f''(x) = e^x - e^{-x} \rightarrow f'''(x) = e^x + e^{-x}$$

$$f''(x) = e^x - e^{-x} = 0 \rightarrow e^x = e^{-x} \rightarrow e^x = \frac{1}{e^x} \rightarrow e^x\cdot e^x = 1 \rightarrow (e^x)^2 = 1 \rightarrow e^{2x} = 1 \rightarrow 2x = \ln 1 = 0 \rightarrow x = 0$$

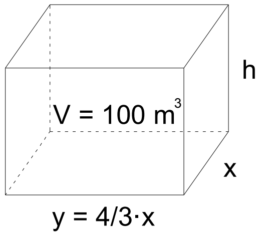
$$f'''(0) = e^0 + e^{-0} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

$$f(0) = e^0 - e^{-0} = 1 - 1 = 0$$

f (x) tiene un punto de inflexión en el origen (0 , 0).

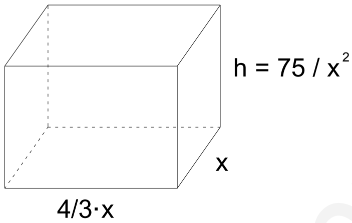
43. Se desea construir una bodega con forma de paralelepípedo rectangular de 100 m^3 de volumen de manera que el largo de su base sea $\frac{4}{3}$ de la anchura x de su base. Se sabe que los precios de un metro cuadrado de suelo, techo y de pared son, respectivamente, 225 € / m^2, 300 € / m^2 y 256 € / m^2. Determinar razonadamente:

a) El valor x de la anchura de la base que minimiza el coste.



$$V = x \cdot \frac{4}{3} \cdot x \cdot h = 100 \rightarrow \frac{4}{3} \cdot x^2 \cdot h = 100 \rightarrow$$

$$\rightarrow h = 100 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{300}{4x^2} = \frac{75}{x^2}$$



$$C(x) = \frac{4}{3} \cdot x \cdot x \cdot 225 + \frac{4}{3} \cdot x \cdot x \cdot 300 + \left(2 \cdot \frac{4}{3} \cdot x \cdot \frac{75}{x^2} + 2 \cdot x \cdot \frac{75}{x^2}\right) \cdot 256 =$$

$$= 300x^2 + 400x^2 + \left(\frac{200}{x} + \frac{150}{x}\right) \cdot 256 = 700x^2 + \frac{350}{x} \cdot 256 = 700x^2 + \frac{89600}{x} = 700x^2 + 89600x^{-1}$$

$$C'(x) = 1400x - 89600x^{-2} = 1400x - \frac{89600}{x^2} = 0 \rightarrow 1400x = \frac{89600}{x^2} \rightarrow x^3 = \frac{89600}{1400} = 64 \rightarrow$$

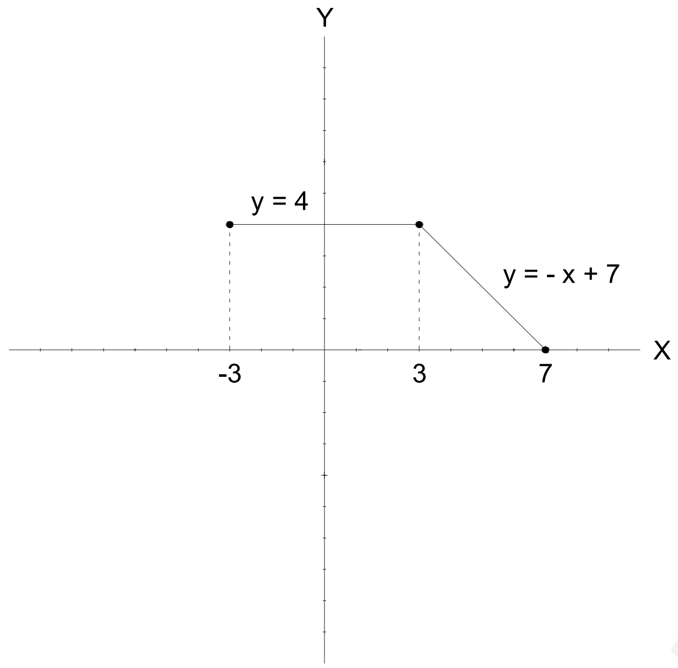
$$\rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4 \text{ m}$$

b) Dicho coste mínimo.

$$C(4) = 700 \cdot 4^2 + \frac{89600}{4} = 700 \cdot 16 + 22400 = 11200 + 22400 = 33600 \text{ €}$$

44. Sea f la función definida por $\begin{cases} f(x) = 4 & \text{si } -3 \le x \le 3 \\ f(x) = 7 - x & \text{si } 3 < x \le 7 \end{cases}$

Justificar si f es o no derivable en x = 3. ¿Cuál es el significado geométrico del resultado obtenido?



$$\left.\begin{array}{l} f(3) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} 4 = 4 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (-x+7) = -3^- + 7 = 4 \end{array}\right\} f(3) = \lim_{x\to 3} f(x) \Rightarrow \text{f es continua en } x = 3$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = 0 \\ f'(3^+) = -1 \end{array}\right\} f'(3^-) \neq f'(3^+) \Rightarrow \text{f no es derivable en } x = 3}$$

<u>El significado geométrico es que la función cambia bruscamente de pendiente en x = 3.</u>

45. Un proveedor vende un producto a un comerciante al precio de 300 euros la unidad. El comerciante incrementa la cantidad de 300 euros en un 40% para obtener el precio de venta al público. El comerciante sabe que a ese precio venderá 50 unidades cada mes y que durante el mes de rebajas por cada 3 euros de reducción en el precio de venta de la unidad conseguirá un incremento de ventas de 5 unidades. Se pide determinar el número de unidades que debe pedir al proveedor para venderlas en el mes de rebajas y el precio de venta de cada unidad, para maximizar sus beneficios durante ese periodo.

Beneficio de una unidad sin rebajas: 40% de 300 € = 120 €

Beneficio total con rebajas: $B(x) = (120 - 3x)\cdot(50 + 5x) = -15x^2 + 450x + 6000$

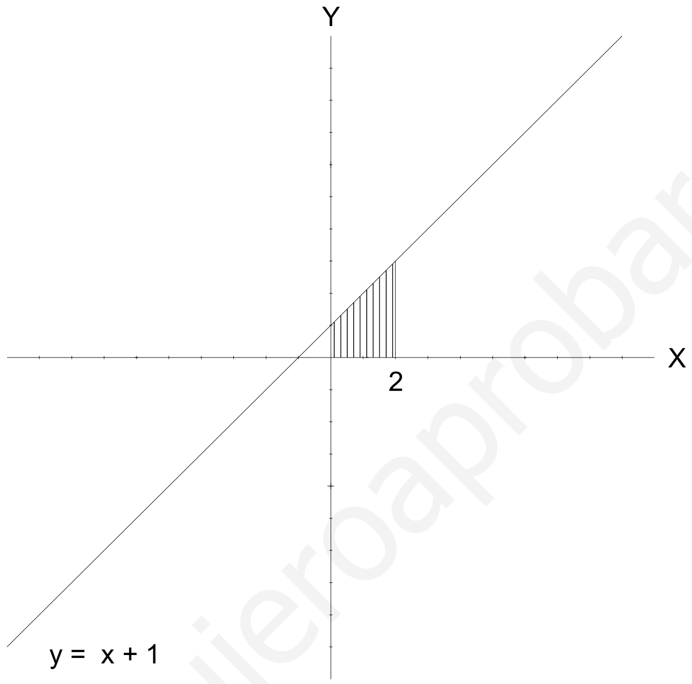
$B'(x) = -30x + 450 = 0 \rightarrow x = \frac{-450}{-30} = 15$ veces que se rebaja 3 € cada unidad (descuento de 45 €)

<u>Deberá pedir 50 + 3·15 = 50 + 75 = 125 unidades para venderlas a 420 – 3·15 = 420 – 45 = 375 €</u>

46. Hallar el valor positivo de a para que $\int_0^{a-1} (x+1)\, dx = \frac{9}{2}$

Obtener, razonadamente, la integral que da el área de la superficie comprendida entre el eje OX, la curva y = x + 1 y las rectas x = 0 y x = 2.

$$\int_0^{a-1}(x+1)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{a-1}2x\,dx+\int_0^{a-1}dx=\frac{1}{2}\cdot\left|\,x^2\right|_0^{a-1}+\left|\,x\right|_0^{a-1}=\frac{1}{2}\cdot\left[(a-1)^2-0^2\right]+\left[(a-1)-0\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(a^2-2a+1-0\right)+a-1=\frac{a^2}{2}-a+\frac{1}{2}+a-1=\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{2}=\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}\rightarrow a^2-1=9\rightarrow$$
$$\rightarrow a^2=9+1=10\rightarrow a=\sqrt{10}\approx 3'162$$



$$A=\int_0^{2}(x+1)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\left|\,x^2\right|_0^{2}+\left|\,x\right|_0^{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(2^2-0^2\right)+(2-0)=\frac{1}{2}\cdot(4-0)+2=\frac{4}{2}+2=2+2=4\ u$$

47. Sea $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Hallar a, b, c sabiendo que f alcanza un máximo en x = -4 y un mínimo en x = 0 y que f (1) = 1.

$$f'(x)=3x^2+2ax+b\rightarrow f'(-4)=3\cdot(-4)^2+2a\cdot(-4)+b=48-8a+b=0$$
$$f'(0)=3\cdot 0^2+2a\cdot 0+b=0\rightarrow b=0$$
$$f(1)=1^3+a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=1\rightarrow 1+a+b+c=1\rightarrow a+b+c=0$$

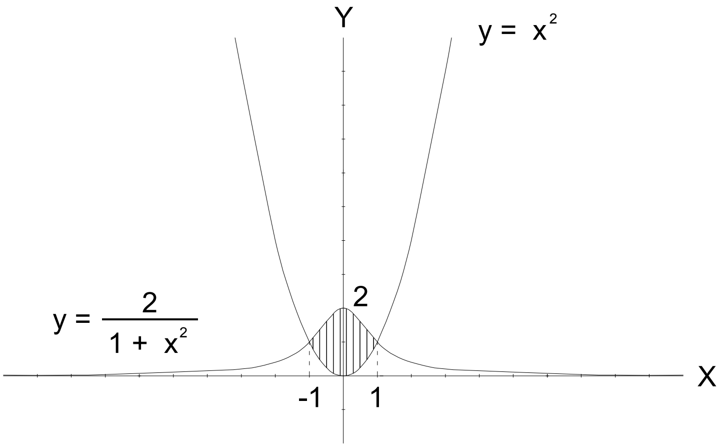
$$\begin{cases} a+b+c=0\\ -8a+b=48\\ b=0\end{cases}\xrightarrow{b=0}\begin{cases} a+c=0\xrightarrow{a=-6}c=6\\ -8a=48\rightarrow a=-6\end{cases}$$

$$\boxed{a=-6\quad;\quad b=0\quad;\quad c=6}$$

48. Calcular, razonadamente, el área de la región limitada por las curvas $y=x^2$ e $y=\dfrac{2}{1+x^2}$.

$$x^2 = \frac{2}{1+x^2} \to x^2\cdot\left(1+x^2\right) = 2 \to x^4 + x^2 - 2 = 0 \xrightarrow{x^2=z} z^2 + z - 2 = 0 \to z = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1} =$$

$$= \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm3}{2} \to \begin{cases} z_1 = \dfrac{-1+3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \to x^2 = 1 \to x = \sqrt{1} = \pm1 \\[2ex] z_2 = \dfrac{-1-3}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \to x^2 = -2 \to x = \sqrt{-2} \end{cases}$$



$$A = \int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{1+x^2} - x^2\right)dx = 2\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,dx - \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}3x^2\,dx = 2\cdot\left|\,\text{arc tg}\,x\,\right|_{-1}^{1} - \frac{1}{3}\cdot\left|\,x^3\,\right|_{-1}^{1} =$$

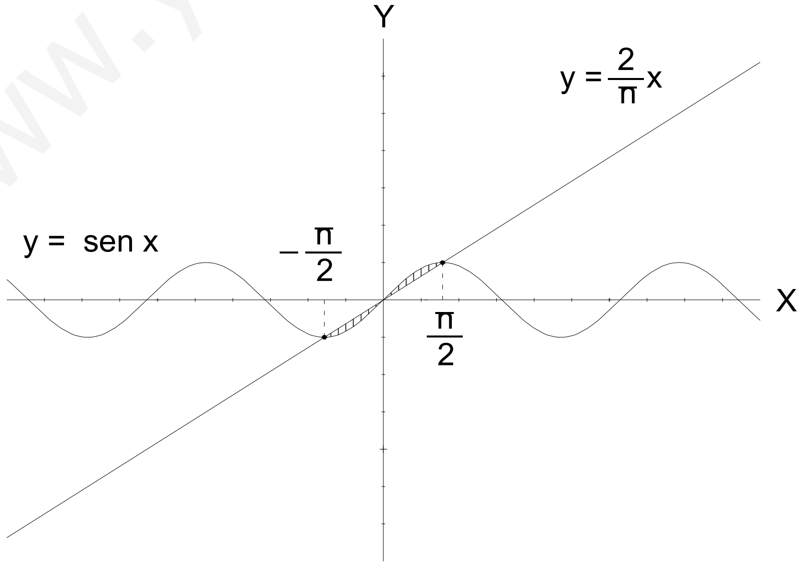
$$= 2\cdot\left[\,\text{arc tg}\,1 - \text{arc tg}(-1)\,\right] - \frac{1}{3}\cdot\left[\,1^3 - (-1)^3\right] = 2\cdot\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] - \frac{1}{3}\cdot\left[\,1-(-1)\,\right] =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3}\cdot(1+1) = 2\cdot\left(\frac{2\pi}{4}\right) - \frac{1}{3}\cdot2 = 2\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} = \pi - \frac{2}{3} \approx 2'475\ u^2$$

49. a) Dibujar la recta de ecuación $y = \frac{2}{\pi}x$ y la curva de ecuación $y = \text{sen}\,x$ cuando $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

;

obtener razonadamente por cálculo integral el área limitada entre la recta y la curva.



$$A=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{2}{\pi}x-\operatorname{sen}x\right)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{sen}x-\frac{2}{\pi}x\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{2}{\pi}x\,dx-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\operatorname{sen}x\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}x\,dx-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}x\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}2x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\operatorname{sen}x\,dx-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\operatorname{sen}x\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}2x\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\left|\,x^2\,\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\left|\,\cos x\,\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\left|\,\cos x\,\right|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{\pi}\cdot\left|\,x^2\,\right|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left[0^2-\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2\right]+\left[\cos 0-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]-\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)-\frac{1}{\pi}\cdot\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-0^2\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left(0-\frac{\pi^2}{4}\right)+(1-0)-(0-1)-\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi^2}{4}-0\right)=-\frac{\pi}{4}+1+1-\frac{\pi}{4}=2-\frac{\pi}{2}\approx 0'429\ u^2$$

b) Calcular la integral del producto de las dos funciones consideradas en el apartado anterior, es decir, $\int \frac{2}{\pi}x\operatorname{sen}x\,dx$, indicando los pasos realizados.

$$\int\frac{2}{\pi}x\operatorname{sen}x\,dx=\frac{2}{\pi}\int x\operatorname{sen}x\,dx=*$$

Por partes :

$$\int u\cdot v'\,dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\,dx$$

$$u=x\longrightarrow u'=1$$

$$v'=\operatorname{sen}x\longrightarrow v=-\cos x$$

$$*=\frac{2}{\pi}\cdot\left[-x\cdot\cos x-\int 1\cdot(-\cos x)\,dx\right]=\frac{2}{\pi}\cdot\left(-x\cdot\cos x+\int\cos x\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\left(-x\cdot\cos x+\operatorname{sen}x\right)+C$$

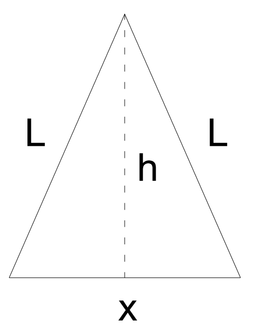
50. Sea T un triángulo de perímetro 60 cm. Uno de los lados del triángulo T mide x cm y los otros dos lados tienen la misma longitud.

a) Deducir razonadamente las expresiones de las funciones A y f tales que:

A (x) = Área del triángulo T

f (x) = { A (x) }^{2}

Indicar además entre qué valores puede variar x.



$$A=\frac{b\cdot h}{2}\quad;\quad P_T=L+L+x=60\rightarrow 2L+x=60\rightarrow$$

$$\rightarrow L=\frac{60-x}{2}=-\frac{1}{2}\cdot x+30$$

$$L^2=h^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=h^2+\frac{x^2}{4}$$

$$h=\sqrt{L^2-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{\frac{x^2}{4}-30x+900-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{-30x+900}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{-30x + 900}$$
$$f(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{-30x + 900}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot x^2 \cdot (-30x + 900) = -\frac{30}{4} \cdot x^3 + \frac{900}{4} \cdot x^2 = -\frac{15}{2} \cdot x^3 + 225 \cdot x^2$$

b) Obtener, razonadamente, el valor de x para el que f (x) alcanza el valor máximo.

$$f'(x) = -\frac{45}{2} \cdot x^2 + 450 \cdot x = 0 \rightarrow x \cdot \left(-\frac{45}{2} \cdot x + 450\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -\frac{45}{2} \cdot x + 450 = 0 \rightarrow \frac{45}{2} \cdot x = 450 \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow 45x = 450 \cdot 2 = 900 \rightarrow x = \frac{900}{45} = 20 \text{ cm}$$

_Comprobamos si f tiene un máximo para x = 0 :

$$f''(x) = -\frac{90}{2} \cdot x + 450 = -45x + 450 \rightarrow f''(0) = -45 \cdot 0 + 450 = 0 + 450 = 450 > 0 \rightarrow \text{mínimo}$$

$$f(0) = -\frac{15}{2} \cdot 0^3 + 225 \cdot 0^2 = -\frac{15}{2} \cdot 0 + 225 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

f tiene un mínimo en el punto (0, 0)

_Comprobamos que f tiene un máximo para x = 20 :

$$f''(20) = -45 \cdot 20 + 450 = -900 + 450 = -450 < 0 \rightarrow \text{Máximo}$$

$$f(20) = -\frac{15}{2} \cdot 20^3 + 225 \cdot 20^2 = -\frac{15}{2} \cdot 8000 + 225 \cdot 400 = -15 \cdot 4000 + 90000 = 90000 - 60000 = 30000$$

<u>f tiene un máximo en el punto (20, 30000)</u>