

## Ecuaciones, inecuaciones y sistemas.

1º Resuelve:

a)  $2\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+1} = 2$

b)  $12x^4 - 7x^3 - 31x^2 - 8x + 4 = 0$

c)  $\log_3(x+1) - 2\log_3(1-x) = 1$

d)  $3^{-x+1} + 9 = 3^{x-1}$  (redondea la solución a la 2ª cifra decimal)

e)  $\frac{1-2x}{x^2+3x} \leq 0$

2º Estudia el número de soluciones de la ecuación  $x^2 + mx + 2m - 3 = 0$  según los valores de **m**.

*La puntuación máxima de cada uno de los ejercicios será 10 puntos el 1º y 2 puntos el 2º.*

1°

$$\text{a) } \boxed{2\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+1} = 2}$$

$$2\sqrt{x+4} = 2 + \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow (2\sqrt{x+4})^2 = (2 + \sqrt{3x+1})^2 \Leftrightarrow 4(x+4) = 4 + 4\sqrt{3x+1} + 3x+1$$

$$\Leftrightarrow x+11 = 4\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow (x+11)^2 = (4\sqrt{3x+1})^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 22x + 121 = 16(3x+1) \Leftrightarrow x^2 - 26x + 105 = 0, \text{ resolviendo } x = 5, x = 21.$$

Comprobación:

$$x = 5 \Rightarrow 2\sqrt{5+4} - \sqrt{3 \cdot 5 + 1} = 2, \text{ válida}$$

$$x = 21 \Rightarrow 2\sqrt{21+4} - \sqrt{3 \cdot 21 + 1} = 2, \text{ válida}$$

$$\text{b) } \boxed{12x^4 - 7x^3 - 31x^2 - 8x + 4 = 0}$$

Se descompone el polinomio  $P(x) = 12x^4 - 7x^3 - 31x^2 - 8x + 4$ , las raíces del polinomio serán las soluciones de la ecuación

Los divisores del término independiente  $4: \pm 1, \pm 2, \pm 4$ , aplicando el teorema del resto se encuentran dos raíces enteras:

$$P(-1) = 12(-1)^4 - 7(-1)^3 - 31(-1)^2 - 8(-1) + 4 = 0$$

$$P(2) = 12(2)^4 - 7(-2)^3 - 31(2)^2 - 8(2) + 4 = 0$$

-1 y 2 son raíces de  $P(x)$ , dividiendo mediante la regla de Ruffini se obtiene

$$P(x) = (x+1)(x-2)(12x^2 + 5x - 2)$$

La solución de la ecuación de 2° grado  $12x^2 + 5x - 2 = 0$  proporciona el resto de raíces:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{24 - 4 \cdot 12 \cdot (-2)}}{24} = \begin{cases} \frac{-5+11}{24} = \frac{1}{4} \\ \frac{-5-11}{24} = \frac{-3}{4} \end{cases}$$

Descomposición:  $P(x) = 12(x+1)(x-2)(x-1/4)(x+3/4)$

Soluciones:  $-1, 2, 1/4$  y  $-3/4$ .

$$\text{c) } \boxed{\log_3(x+1) - 2\log_3(1-x) = 1}$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{(x+1)}{(1-x)^2} = \log_3 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)}{(1-x)^2} = 3 \Leftrightarrow x+1 = 3(1-x)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \begin{cases} 2 \\ 1/3 \end{cases}$$

Comprobación de las soluciones en la ecuación problema:

$x = 2 \Rightarrow \log_3(2+1) - 2\log_3(1-2) = 2$ , tenemos el logaritmo de un número negativo, por lo que **no es válida** la solución

$$x = 1/3 \Rightarrow \log_3(1/3+1) - 2\log_3(1-1/3) = \log_3(4/3) - 2\log_3(2/3) = \log_3(4/3) - \log_3(4/9)$$

$$= \log_3 \frac{4/3}{4/9} = \log_3 3 = 1 \Rightarrow$$

solución válida.

$$\text{d) } \boxed{3^{-x+1} + 9 = 3^{x-1}}$$

Se define una nueva variable  $3^x = y \Leftrightarrow x = \log_3 y$

$$\Leftrightarrow \frac{3+9y}{y} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{3^x} + 9 = \frac{3^x}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{y} + 9 = \frac{y}{3} \quad y^2 = 9 + 27y \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot (-9)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{27 \pm \sqrt{765}}{2} = \begin{cases} \frac{27 + \sqrt{765}}{2} \Rightarrow 3^x = \frac{27 + \sqrt{765}}{2} \approx 27,33 \Rightarrow x = \log_3 27,33 \approx 3,01 \\ \frac{27 - \sqrt{765}}{2} \Rightarrow 3^x = \frac{27 - \sqrt{765}}{2} \approx -0,33 \Rightarrow \text{no válida} \end{cases}$$

$$e) \frac{1-2x}{x^2+3x} \leq 0$$

Se descompone en factores el numerador y el denominador; se estudia el signo de cada factor y el signo de la fracción.

Numerador:  $(1-2x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - x\right)$ , raíz:  $x=1/2$ .

Denominador:  $x^2+3x = x \cdot (x+3)$ , raíces:  $x=0, x=-3$ .

	$x \in (-\infty, -3)$	$x = -3$	$x \in (-3, 0)$	$x = 0$	$x \in (0, 1/2)$	$x = 1/2$	$x \in (1/2, \infty)$
$1-2x$	+		+		+	0	-
$x$	-		-	0	+		+
$x+3$	-	0	+		+		+
$\frac{1-2x}{x^2+3x}$	+	<b>No existe</b>	-	<b>No existe</b>	+	<b>0</b>	-

La solución será  $x \in (-3, 0) \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

2º El número de soluciones de una ecuación de 2º grado depende del signo del discriminante.

Soluciones  $x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4(2m-3)}}{2}$ , siendo  $\Delta = m^2 - 4(2m-3)$  el discriminante.

$\Delta < 0 \Rightarrow 0$  soluciones reales

$\Delta = 0 \Rightarrow 1$  solución real (doble)

$\Delta > 0 \Rightarrow 2$  soluciones reales

El problema se reduce a estudiar el signo de  $m^2 - 4(2m-3)$

$\Leftrightarrow m^2 - 8m + 12$ , resolviendo la ecuación de 2º grado  $m^2 - 8m + 12 = 0$ ,

$$m = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow m^2 - 4(2m-3) = (m-2)(m-6)$$

El signo del discriminante viene dado por la siguiente tabla, junto con la interpretación del número de soluciones de la ecuación problema.

	$m \in (-\infty, 2)$	$m = 2$	$m \in (2, 6)$	$m = 6$	$m \in (6, +\infty)$
$(m-2)$	-	0	+	4	+
$(m-6)$	-	-4	-	0	+
$(m-2)(m-6)$	+	0	-	0	+
Interpretación (número de soluciones reales)	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>