

## TRIGONOMETRÍA

1. Deduce las fórmulas que expresan  $\operatorname{sen} \alpha$ ,  $\cos \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$  en función de, únicamente,  $\cos 2\alpha$ .
2. Resuelve la ecuación:  $4 \cdot \operatorname{sen}^2(5x + 30^\circ) = 3$  con  $x \in [0, 360^\circ)$ .
3. Resuelve la ecuación:  $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} 4x$  con  $x \in [0, 360^\circ)$ .

1.  $\operatorname{sen} \alpha$ ,  $\cos \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$  en función de  $\cos 2\alpha$

Teniendo en cuenta que  $\alpha$  es la mitad de  $2\alpha$ , el resultado es inmediato  $\left(x = 2\alpha \Rightarrow \frac{x}{2} = \alpha\right)$ :

Las fórmulas del ángulo mitad:

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}; \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

Se convierten en

$\operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$	$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$	$\operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}$
---	---	---

que nos permiten obtener las razones trigonométricas de  $\alpha$  en función de  $\cos 2\alpha$ .

También las podríamos haber obtenido a partir de de la ecuación fundamental de la trigonometría (E1) y de la fórmula del coseno del ángulo doble (E2) ya que constituyen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas si consideramos que las incógnitas son  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\cos \alpha$  y que  $\cos 2\alpha$  es un valor conocido:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \quad (\text{E1}) \\ \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos 2\alpha \quad (\text{E2}) \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} (\text{E1}-\text{E2}) \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \\ (\text{E1}+\text{E2}) \Rightarrow 2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \end{array} \right.$$

La  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$  la obtenemos dividiendo miembro a miembro las dos expresiones anteriores.

$$2. \quad 4 \cdot \sin^2(5x + 30^\circ) = 3 \Rightarrow \sin^2(5x + 30^\circ) = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin(5x + 30^\circ) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

Los ángulos del primer giro cuyo seno vale  $+\sqrt{3}/2$  son el de  $60^\circ$  (1) y el de  $120^\circ$  (2) y los que su seno es  $-\sqrt{3}/2$  son el de  $240^\circ$  (3) y el de  $300^\circ$  (4): por lo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} (1). \quad 5x + 30^\circ = 60^\circ + 360^\circ \cdot k \Rightarrow x = 6^\circ + 72^\circ \cdot k \Rightarrow x = 6^\circ, 78^\circ, 150^\circ, 222^\circ, 294^\circ \\ (2). \quad 5x + 30^\circ = 120^\circ + 360^\circ \cdot k \Rightarrow x = 18^\circ + 72^\circ \cdot k \Rightarrow x = 18^\circ, 90^\circ, 162^\circ, 234^\circ, 306^\circ \\ (3). \quad 5x + 30^\circ = 240^\circ + 360^\circ \cdot k \Rightarrow x = 42^\circ + 72^\circ \cdot k \Rightarrow x = 42^\circ, 114^\circ, 186^\circ, 258^\circ, 330^\circ \\ (4). \quad 5x + 30^\circ = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \Rightarrow x = 54^\circ + 72^\circ \cdot k \Rightarrow x = 54^\circ, 126^\circ, 198^\circ, 270^\circ, 342^\circ \end{array} \right\}$$

Resultados que hemos obtenido dándole a  $k$  los valores  $0, 1, 2, 3$  y  $4$  para los cuales  $x \in [0, 360)$ .

La ecuación tiene, por tanto, 20 soluciones que, de menor a mayor, son:

$x = 6^\circ, 18^\circ, 42^\circ, 54^\circ, 78^\circ, 90^\circ, 114^\circ, 126^\circ, 150^\circ, 162^\circ, 186^\circ, 198^\circ, 222^\circ, 234^\circ, 258^\circ, 270^\circ, 294^\circ, 306^\circ, 330^\circ$ y $342^\circ$
--

$$3. \quad \sin 3x = \sin 4x \Rightarrow \sin 4x - \sin 3x = 0 \quad \text{Transformamos en producto el primer miembro de la ecuación aplicando la fórmula } \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \text{ resultando:}$$

$$2 \cos \frac{7x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2} = 0 \quad \text{para que esto se cumpla, alguno de los factores tiene que anularse,}$$

por lo tanto hay dos posibilidades (1) y (2) que analizamos:

$$(1). \quad \cos \frac{7x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{7x}{2} = 90^\circ + 180^\circ \cdot k \Rightarrow x = \frac{180^\circ + 360^\circ \cdot k}{7} \Rightarrow \text{Dándole a } k \text{ los valores } 0, 1, 2, \dots, 6$$

obtenemos siete valores de  $x$  que pertenecen al intervalo  $[0, 360^\circ)$  que son solución de la ecuación

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{180^\circ}{7} \cong 25'71''; \quad k = 1 \Rightarrow x = \frac{540^\circ}{7} \cong 77'14''; \quad k = 2 \Rightarrow x = \frac{900^\circ}{7} \cong 128'57''$$

$$k = 3 \Rightarrow x = \frac{1260^\circ}{7} = 180^\circ; \quad k = 4 \Rightarrow x = \frac{1620^\circ}{7} \cong 231'43''; \quad k = 5 \Rightarrow x = \frac{1980^\circ}{7} \cong 282'86''$$

$$k = 6 \Rightarrow x = \frac{2340^\circ}{7} \cong 334'29''$$

$$(2). \quad \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = 0^\circ + 180^\circ \cdot k \Rightarrow x = 360^\circ \cdot k$$

el único valor que pertenece al intervalo  $[0, 360^\circ)$  lo obtenemos para  $k = 0 \Rightarrow x = 0^\circ$

Hay, por lo tanto, ocho valores de  $x$  en el intervalo  $[0, 360^\circ)$  que son solución de la ecuación:

$0^\circ, \frac{180^\circ}{7} \cong 25'71'', \frac{540^\circ}{7} \cong 77'14'', \frac{900^\circ}{7} \cong 128'57'', 180^\circ, \frac{1620^\circ}{7} \cong 231'43'', \frac{1980^\circ}{7} \cong 282'86''$ y $\frac{2340^\circ}{7} \cong 334'29''$
--