GEOMETRÍA ANALÍTICA

En cierto sistema de referencia, $R=\{P;\ \vec{u},\vec{v}\}$, los vectores de posición de tres puntos A, B y C son, respectivamente: $\vec{a}=(1,3)$; $\vec{b}=(-2,2)$ y $\vec{c}=(4,-1)$

1. Expresa $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinaciones lineales de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. *(2 puntos).*
2. Calcula el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$. *(3 puntos).*
3. Si $\left[\overrightarrow{AB}\right]=\left[\overrightarrow{CD}\right]$ Halla, razonadamente las coordenadas del punto D. *(5 puntos)*

1. $\vec{a}=(1,3)$; $\vec{b}=(-2,2)$ y $\vec{c}=(4,-1)$ en $R=\{P;\ \vec{u},\vec{v}\}$ por lo tanto, por definición:

$$\boxed{\vec{a}=\left[\overrightarrow{PA}\right]=(1,3)=1\vec{u}+3\vec{v}}\qquad \boxed{\vec{b}=\left[\overrightarrow{PB}\right]=(-2,2)=-2\vec{u}+2\vec{v}}\quad \text{y}\quad \boxed{\vec{c}=\left[\overrightarrow{PC}\right]=(4,-1)=4\vec{u}-1\vec{v}}$$

2. El ángulo α que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ lo calculamos a partir de su producto escalar.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\vec{a}=1\vec{u}+3\vec{v}\\ \vec{b}=-2\vec{u}+2\vec{v}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\left(1\vec{u}+3\vec{v}\right)\cdot\left(-2\vec{u}+2\vec{v}\right)=-2\left(\vec{u}\cdot\vec{u}\right)+2\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)-6\left(\vec{v}\cdot\vec{u}\right)+6\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)=$$

$$=-2\,|\vec{u}|^2-4\cdot|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})+6\,|\vec{v}|^2$$

Como no conocemos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no podemos saber cual es el producto escalar de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, ni tampoco cuáles serían los valores de sus módulos porque estos valores dependen de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y estos no nos los especifican.

Es más, ni siquiera podríamos dibujar los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ si no conocemos $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tuviesen de módulo, 1 y fuesen perpendiculares entre sí, es decir, si fuesen ortonormales,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\overset{\text{Si la base es ortonormal}}{=}\frac{(1,3)\cdot(-2,2)}{\sqrt{1^2+3^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+2^2}}=\frac{1\cdot(-2)+3\cdot 2}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{8}}=\frac{4}{4\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\boxed{\alpha = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5} = 63{,}435^{\circ}}$$

3. Las coordenadas del punto D en $R = \left\{P;\ \vec{u}, \vec{v}\right\}$ son las componentes del vector $\vec{d} = [\overrightarrow{PD}]$ en la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ por lo tanto:

$$\vec{d} = [\overrightarrow{PD}] = [\overrightarrow{PC}] + [\overrightarrow{CD}] = \vec{c} + [\overrightarrow{AB}] = \vec{c} + \left([\overrightarrow{PB}] - [\overrightarrow{PA}]\right) = \vec{c} + \left(\vec{b} - \vec{a}\right) =$$
$$= (4, -1) + (-2, 2) - (1, 3) = \left((4-2-1), (-1+2-3)\right) = (1, -2)$$

Respuesta:

$$\boxed{\text{Las coordenadas de } D \text{ en } R = \left\{P;\ \vec{u}, \vec{v}\right\} \text{ son: } (1, -2)}$$

$$D(1, -2) \Leftrightarrow [\overrightarrow{PD}] = (1, -2) \Leftrightarrow [\overrightarrow{PD}] = \vec{u} - 2\vec{v}$$