1. En una cuerda tensa de 16 m de longitud, con sus extremos fijos, se ha generado una onda de ecuación:

$$y(x,t) = 0,02 sen\left(\frac{\pi}{4}x\right)\cos(8\pi t) \quad \text{(S. I.)}$$

a) Explique de qué tipo de onda se trata y cómo podría producirse. Calcule su longitud de onda y su frecuencia.
b) Calcule la velocidad en función del tiempo de los puntos de la cuerda que se encuentran a 4 m y 6 m, respectivamente, de uno de los extremos y comente los resultados.

2. a) Describa el movimiento armónico simple y comente sus características cinemáticas y dinámicas.
b) Una masa oscila verticalmente suspendida de un muelle. Describa los tipos de energía que intervienen y sus respectivas transformaciones.

3. La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda es:

$$y\ (x,\ t) = 0{,}02\ \text{sen}\ \pi\ (100\ t - 40\ x)\ \text{(S. I.)}$$

a) Razone si es transversal o longitudinal y calcule la amplitud, la longitud de onda y el periodo.
b) Calcule la velocidad de propagación de la onda. ¿Es ésa la velocidad con la que se mueven los puntos de la cuerda? ¿Qué implicaría que el signo negativo del paréntesis fuera positivo? Razone las respuestas.

4. En una cuerda tensa, sujeta por sus extremos, se tiene una onda de ecuación:

$$y\ (x,t) = 0{,}02\ \text{sen}\ (4\pi\ x)\ \cos\ (200\pi\ t)\ \text{(S. I.)}$$

a) Indique el tipo de onda de que se trata. Explique las características de las ondas que dan lugar a la indicada y escriba sus respectivas ecuaciones.
b) Calcule razonadamente la longitud mínima de la cuerda que puede contener esa onda. ¿Podría existir esa onda en una cuerda más larga? Razone la respuesta.

5. Un bloque de 0,5 kg se encuentra sobre una superficie horizontal sin rozamiento, sujeto al extremo de un resorte de constante elástica $k = 200\ N\ m^{-1}$. Se tira del bloque hasta alargar el resorte 10 cm y se suelta.
a) Escriba la ecuación de movimiento del bloque y calcule su energía mecánica.
b) Explique cualitativamente las transformaciones energéticas durante el movimiento del bloque si existiera rozamiento con la superficie.

6. a) Explique qué son ondas estacionarias y describa sus características.
b) En una cuerda se ha generado una onda estacionaria. Explique por qué no se propaga energía a través de la cuerda.

M.A.S. Y MOV ONDULATORIO FCA 08 ANDALUCÍA

1.-a) Si observamos la ecuación que nos da el ejercicio

$$y(x,t) = 0,02sen\left(\frac{\pi}{4}x\right)\cos\left(8\pi t\right)$$

y la ecuación de las ondas estacionarias

$$y(x,t) = 2A \cdot sen\,k\,x \cdot \cos\omega t$$

advertimos que se trata de una onda estacionaria, fenómeno que se produce por superposición entre ondas idénticas que se propagan en el mismo medio en sentidos opuestos.

Comparando ambas ecuaciones obtenemos:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{4} \qquad \lambda = 8\,m$$

$$\omega = 2\pi f = 8\pi \qquad f = 4\,s^{-1}$$

b) La velocidad de vibración de los puntos de la cuerda viene dada por la expresión:

$$v = \frac{dy}{dt} = -0,16\pi sen\left(\frac{\pi}{4}x\right)sen\left(8\pi t\right)$$

Para $x = 4\,m$, como $sen\,\pi = 0$, $v = 0$ por lo tanto se trata de un nodo, punto que no oscila en ningún instante.

Para $x = 6\,m$, como $sen\frac{3\pi}{2} = -1$, $v = 0,16\pi sen(8\pi t)\,ms^{-1}$. Podemos comprobar que este punto se trata de un vientre (máxima amplitud de oscilación), sustituyendo x = 6 m en la ecuación de posición

$$y = 0,02sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cos\left(8\pi t\right) = -0,02\cos\left(8\pi t\right)$$

para los valores de t que hagan que $\cos\left(8\pi t\right)$= 1, la amplitud será máxima como ocurre en los vientres.

2.-a) Un cuerpo tiene un movimiento armónico simple (MAS) cuando oscila periódicamente bajo la acción de fuerzas elásticas restauradoras, que obedecen a la ley de Hooke y que por lo tanto son proporcionales a la distancia a la posición de equilibrio, es el caso de los cuerpos unidos a muelles ,etc.

En este movimiento, la posición del cuerpo es una función sinusoidal del tiempo (función seno o coseno dependiente del tiempo). Puesto que las funciones sinusoidales suelen denominarse armónicas, decimos que dicho cuerpo tiene un **movimiento armónico simple.**

2.-a) (continuación) En general la ecuación que representa a este movimiento puede escribirse así:

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

en la que x representa la posición del móvil y se denomina elongación, A es la máxima o mínima elongación y se denomina Amplitud, ω es la frecuencia angular y δ es la fase inicial.

La velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo, en este caso

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A sen(\omega t + \delta)$$

como vemos también varía de forma armónica (sinusoidal) y es cero en los extremos de la trayectoria y máxima ($v_{\max} = \pm\omega A$) en el centro.

La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x$$

también varía de forma armónica (sinusoidal) y es cero en el centro y máxima ($a_{\max} = \pm\omega^2 A$) en los extremos.

Para considerar el MAS desde un punto de vista dinámico nos centramos en la fuerza elástica que cumple la ley de Hooke ($F = -k\,x$) y en la segunda ley de Newton ($F = m\,a$) con lo que nos queda $-k\,x = m\,a$ y como $a = -\omega^2 x$ sustituimos y obtenemos $\omega^2 = \frac{k}{m}$ es decir que la frecuencia angular y por lo tanto la frecuencia y el periodo de un oscilador armónico dependen de sus propias características físicas, k la constante elástica del resorte y de la masa del cuerpo.

b) Inicialmente, al colgar el bloque del resorte este se estira hasta una nueva posición de equilibrio en la que queda anulada la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre el bloque, por la fuerza elástica del muelle.
Posteriormente, desplazamos el bloque verticalmente hacia abajo para que comience a oscilar, pero ya no existe fuerza gravitatoria en toda la oscilación, por lo tanto no hay tampoco energía potencial gravitatoria, es decir, es como si el bloque oscilara horizontalmente.

3.-a) La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda es:

$$y(x,t) = 0{,}02 sen\,\pi(100t - 40x) \quad (S.I.)$$

como vemos, la perturbación se produce en el eje y mientras que la onda se propaga en el eje x, es por tanto una onda transversal.

3.-a) (continuación) La ecuación general de una onda armónica es:

$$y\left(x,t\right)=Asen\left(\omega t-kx\right)$$

comparando ambas ecuaciones obtenemos:

$$A=0,02\,m$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=40 \qquad \lambda=\frac{\pi}{20}m$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=100 \qquad T=\frac{\pi}{50}s$$

b) la velocidad de propagación viene dada por la ecuación:

$$v=\frac{\lambda}{T}=\frac{\pi/20}{\pi/50}=2,5\,ms^{-1}$$

esta velocidad es la de propagación de la perturbación por el medio y se desarrolla en el eje x. La velocidad con la que se mueven los puntos de la cuerda se llama velocidad de vibración y se desarrolla en el eje y, la podemos calcular mediante la derivada de la posición con respecto al tiempo

$$v=\frac{dy}{dt}$$

Que el signo negativo del paréntesis fuera positivo implicaría que la propagación de la onda se desarrollara en sentido contrario, es decir, hacia la izquierda (X^{-}).

4.-a) Si observamos la ecuación que nos da el ejercicio

$$y(x,t)=0,02sen\left(4\pi x\right)\cos\left(200\pi t\right)$$

y la ecuación de las ondas estacionarias

$$y(x,t)=2A\cdot sen\,k\,x\cdot\cos\omega t$$

advertimos que se trata de una onda estacionaria, fenómeno que se produce por superposición entre ondas armónicas idénticas que se propagan en el mismo medio en sentidos opuestos.

Comparando ambas ecuaciones obtenemos:

$$A=0,01\,m \qquad k=4\pi\,m^{-1} \qquad \omega=200\pi\,s^{-1}$$

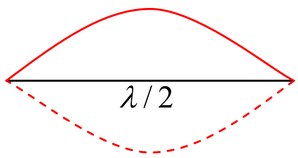
4.-a) (continuación) La ecuación general de una onda armónica es:

$$y(x,t) = A sen(kx \pm \omega t)$$

sustituyendo obtenemos las ecuaciones de las ondas que producen la onda estacionaria

$$y_1(x,t) = 0,01 sen(4\pi x - 200\pi t) \qquad y_2(x,t) = 0,01 sen(4\pi x + 200\pi t)$$

b) La longitud mínima de cuerda, es la que contiene a la onda estacionaria fundamental que es la que tiene un vientre y dos nodos y que coincide con media longitud de onda



calculamos la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{4\pi} = 0,5\,m$$

la longitud mínima de cuerda que puede contener a dicha onda es de 0,25 m.
La onda sí puede existir en una cuerda mas larga, la onda existe si su longitud cumple con la siguiente condición

$$l = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = (1,2,3,...)$$

5.-a) Como el bloque comienza a oscilar (t = 0) desde un extremo, usamos la ecuación del coseno (cos 0º = 1)

$$x = A\cos\omega t$$

Sabemos por el enunciado que A = 0,1 m, nos falta calcular la frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200\,Nm^{-1}}{0,5\,kg}} = 20\,s^{-1}$$

sustituimos en la ecuación general y obtenemos

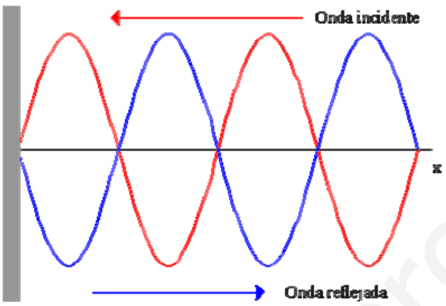
$$x = 0,1\cos 20t\,m$$

calculamos su energía mecánica

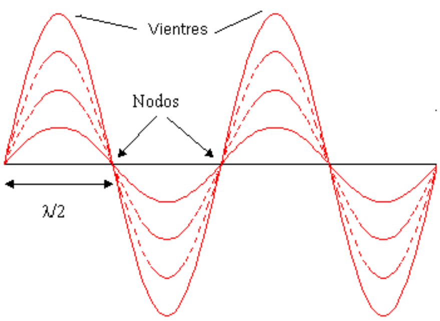
$$E_m = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}200\,Nm^{-1}\cdot 0,1^2\,m^2 = 1\,J$$

5.-b) La energía potencial elástica acumulada en el resorte, se transforma en energía cinética del bloque y viceversa, pero al haber rozamiento, la energía mecánica no se mantiene constante, parte de ella se pierde en forma de calor para vencer el trabajo de rozamiento. La amplitud y la velocidad máxima también disminuyen en cada oscilación con lo que el bloque termina parándose, se trata de una oscilación amortiguada.

6.-a) Una onda estacionaria es un fenómeno peculiar de superposición. Consideremos el caso de dos ondas iguales que se propagan en la misma dirección pero sentido contrario. (Es el caso de una onda que se encuentra con su onda reflejada)



Si la onda incidente es $y_1 = A sen(k x - \omega t)$ la reflejada será $y_2 = A sen(k x + \omega t)$, de la superposición de ambas se obtiene una onda del tipo $y = (2A sen\, k\, x)\cdot \cos \omega t$, es decir se obtiene una "onda" que no viaja, no es una onda de propagación, los puntos de la cuerda vibran con la misma frecuencia pero con distinta amplitud y hay unos puntos donde la amplitud es cero ($sen\, k\, x = 0$) que se llaman **nodos** y otros donde la amplitud es máxima que se llaman **vientres**. Por tanto las ondas estacionarias no encajan dentro de la definición general de ondas. La amplitud de la vibración en un punto cualquiera viene dada por la expresión $2A sen\, k\, x$, es decir es función de la posición y todos los puntos vibran con la frecuencia angular ω que es igual a las de las ondas armónicas que se superponen



b) La existencia de nodos o puntos que no oscilan implica que una onda estacionaria, a diferencia de las viajeras, no transporta energía de un punto a otro. Al estar la perturbación confinada entre los nodos, la energía también queda confinada entre ellos.