OPCIÓN A

19_mod4_sep_EJERCICIO 1 (A)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

1) $A\cdot A^t$ es una matriz simétrica.

2) $A\cdot A^t + B$ posee inversa.

b) (1'5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $B\cdot X + A = C$.

Solución

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$

a)

Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

1) $A\cdot A^t$ es una matriz simétrica.

Sabemos que una matriz cuadrada D es simétrica y solo si $D = D^t$.

Como $\mathbf{D = A\cdot A^t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **$= D^t$, $A\cdot A^t$ es una matriz simétrica.**

2) $A\cdot A^t + B$ posee inversa.

Sabemos que una matriz cuadrada $E = A\cdot A^t + B$, posee matriz inversa $E^{-1} = \frac{1}{|E|}\cdot Adj(E^t)$ si y solo si $det(E) = |E| \neq 0$.

Tenemos $E = A\cdot A^t + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Como $det(E) = |E| = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 12 - (12) = 0$, **la matriz $E = A\cdot A^t + B$, no posee matriz inversa.**

b)

Resuelva la ecuación matricial $B\cdot X + A = C$.

Como $det(B) = |B| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (6) = -6 \neq 0$, posee matriz inversa $B^{-1} = \frac{1}{|B|}\cdot Adj(B^t)$.

$B^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $Adj(B^t) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{|B|}\cdot Adj(B^t) = (-1/6)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

De $B\cdot X + A = C \rightarrow B\cdot X = C - A$. Multiplicando la expresión $B\cdot X = C - A$, por la izquierda por B^{-1} tenemos $B^{-1}\cdot B\cdot X = B^{-1}\cdot(C - A) \rightarrow I_2\cdot X = B^{-1}\cdot(C - A) \rightarrow X = B^{-1}\cdot(C - A)$, es decir:

$$\mathbf{X = B^{-1}\cdot(C - A)} = \frac{-1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{-1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & -12 & 18 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

19_mod4_sep_EJERCICIO 2 (A)

El coste de producción de un bien en una fábrica viene dado por $C(x) = 2(2x - 1)^2 + 1$, con $0 \le x \le 2$, donde x es la cantidad producida en millones de kilogramos.

a) (1 punto) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función C(x).

b) (0'75 puntos) Determine la cantidad a producir para que el coste de producción sea mínimo. ¿Cuál es dicho coste?

c) (0'75 puntos) Realice un esbozo de la gráfica de la función C(x).

Solución

El coste de producción de un bien en una fábrica viene dado por $C(x) = 2(2x - 1)^2 + 1$, con $0 \le x \le 2$, donde x es la cantidad producida en millones de kilogramos.

a)

Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función C(x).

Nos están pidiendo la monotonía, que es el estudio de la 1ª derivada. Observamos que la función C(x) está definida en el intervalo cerrado [0, 2]

Calculamos C '(x) y resolvemos la ecuación C '(x) = 0

Tenemos $C(x) = 2(2x - 1)^2 + 1$ y $C'(x) = 2\cdot 2\cdot (2x - 1)\cdot 2 = 8\cdot (2x - 1) = 16x - 8$.

De $C'(x) = 0 \rightarrow 16x - 8 = 0 \rightarrow x = 1/2 = 0'5$, que será el posible extremo relativo.

Como $C'(0'1) = 16\cdot(0'1) - 8 = -6'4 < 0$, **C es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (0, 0'5).**

Como $C'(1) = 16\cdot(1) - 8 = 8 > 0$, **C es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (0'5, 2).**

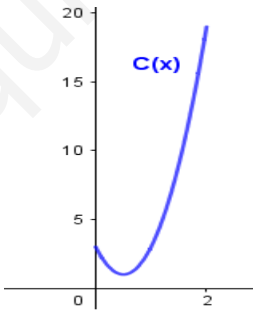
Por definición *x = 0'5 es un mínimo relativo de C(x)* y *vale C(0'5)* $= 2(2(0'5) - 1)^2 + 1 = 1$.
b)
Determine la cantidad a producir para que el coste de producción sea mínimo. ¿Cuál es dicho coste?

Como C(x) está definida en [0, 2] nos piden el mínimo absoluto, que estará en los extremos del intervalo x = 0, x = 2 y en el mínimo relativo x = 0'5. Sustituimos estos tres valores en C(x) y el menor es el mínimo absoluto.

$C(0) = 2(2(0) - 1)^2 + 1 = 3$.
C(0'5) $= 2(2(0'5) - 1)^2 + 1$ **= 1.**
$C(2) = 2(2(2) - 1)^2 + 1 = 19$.

El coste es mínimo con una producción de x = 0'5 en millones de kilogramos
c)
Realice un esbozo de la gráfica de la función C(x).

Si observamos detenidamente tenemos un trozo de parábola, de la forma $\cup$ (el nº que multiplica a x^2 es positivo, vértice y mínimo en (0'5, 1), y otros puntos son (0, 3) y (2, 19).
Un esbozo de la gráfica sería:



19_mod4_sep_EJERCICIO 3 (A)
Una marca de patinetes eléctricos fabrica tres modelos distintos A, B y C. El modelo A supone el 25 % de su producción, el B el 40 % y el resto de la producción corresponde al modelo C. Transcurridos tres meses desde su venta, se comprobó que el 15% de patinetes del modelo A, el 10% del B y el 12% del C había presentado alguna avería. Se elige al azar un patinete de esta marca.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que dicho patinete haya presentado alguna avería.
b) (0'5 puntos) Si sabemos que el patinete elegido es del modelo A, ¿cuál es la probabilidad de que no haya presentado avería?
c) (1 punto) Calcule la probabilidad de que haya presentado avería o sea del modelo C?

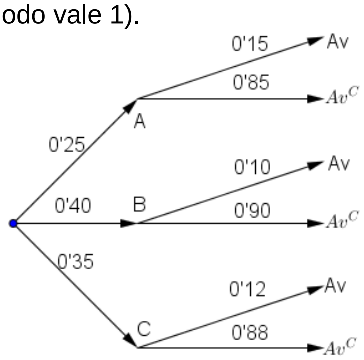
Solución

Una marca de patinetes eléctricos fabrica tres modelos distintos A, B y C. El modelo A supone el 25 % de su producción, el B el 40 % y el resto de la producción corresponde al modelo C. Transcurridos tres meses desde su venta, se comprobó que el 15% de patinetes del modelo A, el 10% del B y el 12% del C había presentado alguna avería. Se elige al azar un patinete de esta marca.

Llamemos A, B, C, Av y Av^C, a los sucesos siguientes, "modelo A", "modelo B", "modelo C", "avería" y " no avería", respectivamente.

Datos del problema: p(A) = 25% = 0'25; p(B) = 40% = 0'40; p(Av/A) = 15% = 0'15; p(V/B) = 10% = 0'1, p(Av/C) = 12% = 0'12, …

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



a)
Calcule la probabilidad de que dicho patinete haya presentado alguna avería.

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Piden **p(Av)** = p(A).p(Av/A) + p(B).p(Av/B) + p(C).p(Av/C) =
= (0'25)·(0'15) + (0'40)·(0'10) + (0'35)·(0'12) **= 239/2000 = 0'1195**.
b)
Si sabemos que el patinete elegido es del modelo A, ¿cuál es la probabilidad de que no haya presentado avería?

Me piden **p(Av^C/A) = 0'85**. Directamente sé ve la probabilidad de no avería en los modelos A.
c)
Calcule la probabilidad de que haya presentado avería o sea del modelo C?

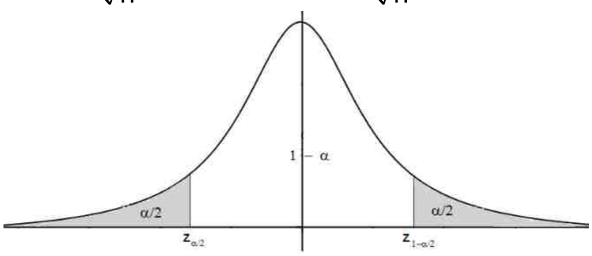
Piden **p(Av ó C)** = **p(Av∪C)** = p(Av) + p(C) – p(C∩Av) = 0'1195 + 0'35 - (0'35)·(0'12) **= 171/400 = 0'4276**.

19_mod4_sep_EJERCICIO 4 (A)
Las puntuaciones obtenidas por los participantes en un concurso se distribuyen siguiendo una ley Normal de varianza 36 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria de 64 concursantes, cuya puntuación media es 35 puntos.
a) (1'5 puntos) Obtenga un intervalo, con un 92% de confianza para la puntuación media de los participantes en dicho concurso
b) (1 punto) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98 %.

Solución

Las puntuaciones obtenidas por los participantes en un concurso se distribuyen siguiendo una ley Normal de varianza 36 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria de 64 concursantes, cuya puntuación media es 35 puntos.

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

I.C. (μ) = $\left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ = (a,b)

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *son los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

a)
Obtenga un intervalo, con un 92% de confianza para la puntuación media de los participantes en dicho concurso

Datos del problema: media muestral $\bar{x} = 35$; $\sigma^2 = 36$; $\sigma = 6$; $n = 64$; nivel de confianza = 92% = 0'92 = 1 - α, de donde α = 0'08, con la cual $\alpha/2$ = (0'08)/2 = 0'04.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'04 = 0'96$, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'96 no viene, y la más próxima es 0'9599 y corresponde a 1'75, luego $z_{1-\alpha/2}$ = 1'75 (*si interpoláramos entre 0'9599 y 0'9608 tendríamos $z_{1-\alpha/2}$ = 1'751*), por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(μ) = $\left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(35 - 1'75\cdot\frac{6}{\sqrt{64}}, 35 + 1'75\cdot\frac{6}{\sqrt{64}}\right)$ **= (33'6895, 36'3125)**

b)
Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98 %.

Datos del problema: σ = 6; error = E < 2; nivel de confianza = 98% = 0'98 = 1 - α, de donde α = 1 – 0'98 = = 0'02, con la cual $\alpha/2$ = 0'02/2 = 0'01.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'01 = 0'99$, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0'99 vemos que no viene, y la mas próxima es 0'9901 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'33.

De el error $E \le z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2$, tenemos $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'33\cdot 6}{2}\right)^2$ = 48'8601, tenemos que **el tamaño mínimo de la muestra es de n = 49 participantes.**

OPCION B

19_mod4_sep_EJERCICIO 1 (B)

Una empresa comercializa dos tipos de concéntrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar, 1 kg de concentrado A se necesitan 4'5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7'5 kg de grano de Colombia y 1'5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B. Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67'5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía, y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.
a) (1'75 puntos) Represente la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.
b) (0'25 puntos) Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.
c) (0'5 puntos) Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo del tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

Solución

Una empresa comercializa dos tipos de concéntrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar, 1 kg de concentrado A se necesitan 4'5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7'5 kg de grano de Colombia y 1'5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B. Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67'5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía, y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la

mitad de los kilogramos de concentrado B.
a) y c)
Represente la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.
Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo del tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

Es un problema de programación lineal.

Sea x = nº de kilogramos del concentrado A de café.
Sea y = nº de kilogramos del concentrado B de café.

	Colombia	Etiopía	Costa Rica	Relación	Beneficio
Concentrado A (x)	4'5 kg	3 kg	0 kg	$x \ge y/2$	2 €
Concentrado B (y)	7'5 kg	0 kg	1'5 kg		4 €
Total	67'5 kg	30 kg	9 kg		

De "**para A**, 4'5 kg de Colombia y **para B**, 7'5 kg de Colombia" → $4'5x + 7'5y \le 67'5$.

De "**para A**, 3 kg de Etiopía" → $3x \le 30$.

De "**Para B**, 1'5 kg de Costa Rica" → $1'5y \le 9$.

De "el nº de kg para A debe ser mayor o igual que la mitad de los kg de concentrado B" → $x \ge 2y$.

De "se necesita fabricar algún kg de concentrado A y de concentrado B" → $x \ge 0$. $y \ge 0$

De "la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo del tipo B es 4 euros", tenemos que la función beneficio a optimizar es $F(x,y) = 2x + 4y$.

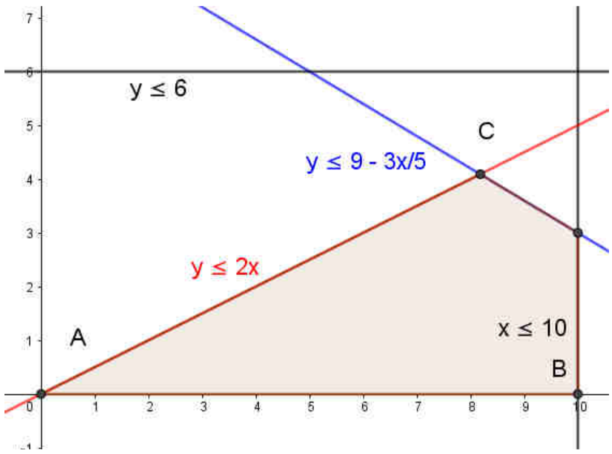
Resumiendo:
Función a optimizar es $F(x,y) = 2x + 4y$.
Restricciones: $4'5x + 7'5y \le 67'5$; $3x \le 30$; $1'5y \le 9$; $x \ge 2y$; $x \ge 0$; $y \ge 0$.

Las desigualdades $45x + 75y \le 675$; $x \le 10$; $y \le 6$; $y \le x/2$; $x \ge 0$, $x \ge 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $3x + 5y = 45$; $x = 10$; $y = 6$; $y = x/2$; $x = 0$, $x = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
$y = 9 - 3x/5$; $x = 10$; $y = 6$; $y = x/2$; $x = 0$, $x = 0$.

Representamos gráficamente el recinto cerrado convexo delimitado por las desigualdades, y observamos que los vértices de dicho recinto son el A, B y C.

Calculamos dichos vértices A, B, C resolviendo las ecuaciones de dos en dos.



Calculamos los vértices A y B válidos.

De x = 0 e y = 0, tenemos el vértice es A(0,0).
De x = 10 e y = 0, tenemos el vértice es B(10,0).
De y = x/2 e y = 9 - 3x/5, tenemos x/2 = 9 - 3x/5 $\rightarrow$ 5x = 90 - 6x $\rightarrow$ 11x = 90 con lo cual x = 90/11 e y = 45/11, y el vértice es C(90/11, 45/11).

b)
Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A(x) y 5 kg del concentrado B(y).

Si nos fijamos en la gráfica, en la región factible y no llega a 5, por tanto se podrían producir 7 kg de concentrado A (x llega a 10) pero no 5 de concentrado B (y no llega a 5)

Veamos el máximo de la función **F(x,y) = 2x + 4y** en el recinto anterior, así como el punto donde se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa de limitada por las restricciones, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos *F* en los puntos anteriores A(0,0), B(10,0) y C(90/11, 45/11). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F_A(0, 0) = 2(0) + 4(0) = 0; F_B(10,10) = 2(10) + 4(0) = 20; **F_C(90/11, 45/11) =** 2(90/11) + 4(45/11) =
= 360/11 ≅ 32'727273.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 360/11** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(90/11, 45/11), es decir el máximo beneficio es de 360/11 € ≅ 32'727273€ y se obtiene vendiendo 90/11 kg ≅ 8'1818182 kg del concentrado A y 45/11 kg ≅ 4'0909091 kg del concentrado B.**

19_mod4_sep_EJERCICIO 2 (B)
De una cierta función f, sabemos que su función derivada es f '(x) = $3x^2$ - 3.
a) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, y calcule la abscisa de sus extremos relativos.
b) (0'75 puntos) Determine la curvatura de f y halle la abscisa de su punto de inflexión.
c) (0'75 puntos) Calcule la función f, sabiendo que su gráfica pasa por el punto (-1, 3).

Solución

De una cierta función f, sabemos que su función derivada es f '(x) = $3x^2$ - 3.
a)
Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, y calcule la abscisa de sus extremos relativos.

Sabemos que la monotonía (crecimiento y decrecimiento de f) es el estudio de la 1ª derivada de f.

Nos dan f '(x) = $3x^2$ - 3 y resolvemos la ecuación f '(x) = 0

De f '(x) = 0 $\rightarrow$ $3x^2$ - 3 = 0 $\rightarrow$ x^2 = 1, de donde x = ± 1 que serán los posibles extremos relativos.

Como f '(-2) = $3(-2)^2$ - 3 = 9 > 0, **f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (-∞, -1).**

Como f '(0) = $3(0)^2$ - 3 = -3 < 0, **f es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (-1, 1).**

Como f '(2) = $3(2)^2$ - 3 = 9 > 0, **f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (1, +∞).**

Por definición **x = -1 es un máximo relativo de f.**
Por definición **x = 1 es un mínimo relativo de f.**
b)
Determine la curvatura de f y halle la abscisa de su punto de inflexión.

Sabemos que la curvatura el estudio de la 2ª derivada de f.

Calculamos f ''(x) y resolvemos la ecuación f ''(x) = 0

Para x < 0 tenemos f ''(x) = $2/(x - 1)^3$.

De f ''(x) = $3x^2$ - 3 tenemos f ''(x) = 6x.

De f ''(x) = 0 $\rightarrow$ 6x = 0 $\rightarrow$ x = 0, que será el posible punto de inflexión.

Como f '(-1) = 6(-1) = -6 < 0, **f es cóncava ($\cap$) en (-∞, 0).**
Como f '(1) = 6(1) = 6 > 0, **f es convexa ($\cup$) en (0, +∞).**
Por definición **x = 0 es el punto de inflexión de f.**
c)
Calcule la función f, sabiendo que su gráfica pasa por el punto (-1, 3).

Sabemos que f(x) = $\int f'(x)dx$, luego f(x) = $\int f'(x)dx = \int(3x^2 - 3)dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} - 3x + K = x^3 - 3x + K$. Como nos dicen que f(x) = $x^3 - 3x + K$ pasa por el punto (-1, 3) $\rightarrow$ f(-1) = 3 $\rightarrow$ $(-1)^3 - 3(-1) + K = 3$ $\rightarrow$ K = 1, y **la función pedida es que f(x) = $x^3 - 3x + 1$.**

19_mod4_sep_EJERCICIO 3 (B)

De dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que: p(A$\cap$B)= 0'2, p(A$\cup$B) = 0'4, p(A/B) = 0'8.
a) (1'2 puntos) Calcule p(B) y p(A).
b) (0'5 puntos) ¿Son los sucesos A y B independientes? Razone la respuesta.
c) (0'8 puntos) Calcule p($A^C \cup B^C$).

Solución

De dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que: p(A$\cap$B)= 0'2, p(A$\cup$B) = 0'4, p(A/B) = 0'8.
a)
Calcule p(B) y p(A).

Sabemos que p(A$\cup$B) = p(A) + p(B) - p(A$\cap$B) y que p(A/B) **=** $\frac{p(B\cap A)}{p(B)}$. Sustituyendo tenemos:

0'4 = p(A) + p(B) - 0'2 y 0'8 = $\frac{0'2}{p(B)}$, de donde **p(B) =** (0'2)/(0'8) = 1/4 **= 0'25.**

Entrando en 0'4 = p(A) + p(B) - 0'2 con p(B) = (0'2)/(0'8) = 1/4 = 0'25 $\rightarrow$ 0'6 = p(A) + 0'25, de donde tenemos **p(A) = 0'35.**
b)
¿Son los sucesos A y B independientes? Razone la respuesta.

Sabemos que A y B son independientes si p(A$\cap$B) = p(A)·p(B)

Tenemos p(A$\cap$B) = 0'2 y p(A)·p(B) = (0'25)·(0'35) = 0'0875, **por tanto A y B no son independientes.**
c)
Calcule p($A^C \cup B^C$).

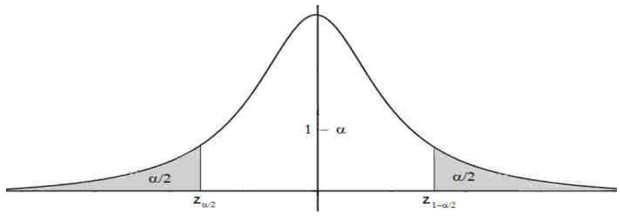
Tenemos **p($A^C \cup B^C$) =** {Ley de Morgan} = p(A$\cap$B)^C = {suceso contrario} = 1 - p(A$\cap$B) = 1 – 0'2 **= 0'8.**

19_mod4_sep_EJERCICIO 4 (B)

Se quiere estimar la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco. Para ello se escoge aleatoriamente una muestra de 50 expedientes sanitarios de enfermos hospitalizados, resultando que el 22% de ellos revelan que la enfermedad fue causada por el tabaco.
a) (1'5 puntos) Para un nivel de confianza del 92%, calcule un intervalo de confianza para la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco.
b) (1 punto) Determine cuántos expedientes hay que elegir como mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de los enfermos hospitalizarlos por causas debidas al tabaco sea inferior al 3 %.

Solución

Sabemos que para la proporción poblacional **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$, sigue una N($\hat{p}$, $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$), y generalmente escribimos $\hat{p} \approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})$ o $\hat{p} \rightarrow N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que en la proporción es $\hat{p} = (a + b)/2$, el error máximo de la estimación es E =

$= z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, para el intervalo de la proporción. Pero la amplitud del intervalo es b - a = $2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ =

= 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} =$

$= \frac{2\cdot(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{(b-a)^2}$.

Se quiere estimar la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco. Para ello se escoge aleatoriamente una muestra de 50 expedientes sanitarios de enfermos hospitalizados, resultando que el 22% de ellos revelan que la enfermedad fue causada por el tabaco.

a)

Para un nivel de confianza del 92%, calcule un intervalo de confianza para la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco.

Datos del problema: n = 50, $\hat{p}$ = 22% = 0’22, $\hat{q}$ = 1 - $\hat{p}$ = 1 – 0’22 = 0’78, nivel de confianza = 92% = 0’92 = 1 - α, de donde α = 0’08, con la cual α/2 = (0’08)/2 = 0’04.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0’04 = 0’96, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’96 no viene, y la más próxima es 0’9599 y corresponde a 1’75, luego $z_{1-\alpha/2}$ = 1’75 (*si interpoláramos entre 0’9599 y 0’9608 tendríamos $z_{1-\alpha/2}$ = 1’751*), por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0'22 - 1'75\cdot\sqrt{\frac{0'22\cdot 0'78}{50}}, 0'22 + 1'75\cdot\sqrt{\frac{0'22\cdot 0'78}{50}}\right) \cong$$

$\cong$ **(0’117479; 0’322507)**

b)

Determine cuántos expedientes hay que elegir como mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de los enfermos hospitalizarlos por causas debidas al tabaco sea inferior al 3 %.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 0’22, $\hat{q}$ = 0’78, error = E ≤ 3% = 0’03, nivel de confianza = el mismo 92%, por tanto $z_{1-\alpha/2}$ = 2’17.

De $E \le z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, tenemos $n \ge \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{(1'75)^2\cdot 0'22\cdot 0'78}{(0'03)^2} \cong 583'91667$, por tanto **el tamaño mínimo de expedientes que sería preciso seleccionar es de n = 584.**