Propuesta A

1A. Después de la administración por vía oral de un fármaco, la concentración de este en sangre sigue el modelo: C(t) = at^2 e^{-bt} ; donde $t \in (0\ ,\ \infty)$ es el tiempo en horas transcurridas desde la administración y $a\ ,\ b \in \Re^+$

a) Determina los valores de **a** y **b** para que el modelo de la concentración tenga un extremo relativo en el punto (2 , 8e^{-2}). (1,5 puntos)

b) Según el modelo anterior, ¿a qué valor tiende la concentración de este fármaco a largo plazo? Interpreta el resultado. (1 punto) Nota: A largo plazo se entiende como que $t \to +\infty$.

$a)$

$$C'(t) = a\left[2t \cdot e^{-bt} + (-b)\, e^{-bt} \cdot t^2\right] = a\, t \cdot e^{-bt}(2 - b \cdot t) \Rightarrow \begin{cases} C(2) = 8 \cdot e^{-2} \Rightarrow a \cdot 2^2 \cdot e^{-b \cdot 2} = 8 \cdot e^{-2} \\ C'(2) = 0 \Rightarrow a\ 2 \cdot e^{-b2}(2 - b \cdot 2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4a \cdot e^{-2b \cdot} = 8 \cdot e^{-2} \\ 4a\ e^{-b2}(1 - b) = 0 \Rightarrow 1 - b = 0 \Rightarrow b = 1 \end{cases} \Rightarrow 4a \cdot e^{-2 \cdot 1 \cdot} = 8 \cdot e^{-2} \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

$b)$

$$\lim_{t \to +\infty} C(t) = \lim_{t \to +\infty}\left(t^2 e^{-t}\right) = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2}{e^t} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{2t}{e^t} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{2}{e^t} = \frac{2}{\infty} = 0$$

La concentración tiende a ser nula al cabo del tiempo

2A. Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + a}{x - 1} & si \quad x < 0 \\ bx - 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) Calcula razonadamente los parámetros **a** y **b** para que **f(x)** sea derivable en todo R. **(1,5 puntos)**

b) Calcula razonadamente el parámetro **b** para que $\int_1^2 f(x)\, dx = 4$ **(1 punto)**

a) Para que sea derivable la función debe de ser, inicialmente, continua en el punto de discontinuidad x = 0 y después su derivada, en ese mismo punto tiene que ser igual a derecha e izquierda

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \dfrac{0^2 + a}{0 - 1} = \dfrac{a}{-1} = -a \\ f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = b \cdot 0 - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x\,(x-1) - \left(x^2 + 1\right)}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} & si \quad x < 0 \\ b \quad si \quad x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \dfrac{0^2 - 2 \cdot 0 - 1}{(0-1)^2} = \dfrac{-1}{1} = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = b \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) \Rightarrow b = -1$$

$b)$

$$\int_1^2 (bx - 1)\, dx = 4 \Rightarrow \left[\frac{b}{2}x^2 - x\right]_1^2 = 4 \Rightarrow \left(\frac{b}{2} \cdot 2^2 - 2\right) - \left(\frac{b}{2} \cdot 1^2 - 1\right) = 4 \Rightarrow 2b - 2 - \frac{b}{2} + 1 = 4 \Rightarrow \frac{3b}{2} = 5 \Rightarrow b = \frac{10}{3}$$

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \Re$

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + 2y + z = -4 \\ x - 4y - 3z = a^2 - 3 \end{cases}$$ **(1,5 puntos)**

b) Resuélvelo razonadamente para el valor **a = -3**. **(1 punto)**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Tiene\ una\ \ fila\ de\ ceros \Rightarrow$$

$$No\ será\ \ nunca\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & -3 & a^2-3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & -2 & a^2-3-1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-9 \end{array}\right) \Rightarrow a^2 - 9 = 0 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow$$

$$a = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall a \in \Re - \{-3\ ,\ 3\} \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$$Si\ a = -3 \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$Si\ a = 3 \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$b)$

$$Si\ a = 3 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & -3 & 6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 3y + 2z = -5 \Rightarrow 3y = -5 - 2z \Rightarrow y = -\frac{5+2z}{3} \Rightarrow$$

$$x + \frac{5+2z}{3} - z = 1 \Rightarrow x + \frac{5+2z-3z}{3} = 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{5-z}{3} \Rightarrow x = \frac{-2+z}{3} \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = \left(-\frac{2}{3} + \frac{z}{3}\ ,\ -\frac{5}{3} - \frac{2z}{3}\ ,\ z\right) \equiv \left(-\frac{2}{3} + \lambda\ ,\ -\frac{5}{3} - 2\lambda\ ,\ 3\lambda\right)$$

4A. Dados los puntos **A(-1 , 3 , 0)** , **B(2 , 0 , -1)** y la recta **r** intersección de los planos
$\alpha \equiv x-2y-6=0 \ y \ \beta \equiv 2y+z=0$

a) Calcula la distancia del punto **A** a la recta **r**. **(0,75 puntos)**
b) Encuentra razonadamente el punto de la recta **r** cuya distancia al punto **A** sea mínima. (0,75 puntos)
c) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por **A** y **B** sea paralelo a la recta **r**. (1 punto)

a) Hallaremos un plano π que contenga el punto **A** y sea perpendicular a la recta **r,** tendrá como vector director el de la recta **r,** que es perpendicular al vector **AG**, siendo **G** el punto genérico del plano, el producto escalar de ambos vectores es nulo y la ecuación buscada. El punto **P** es la intersección del plano hallado y la recta **r**; el módulo del vector **PA** es la distancia buscada.

$$x=6+2y \Rightarrow z=-2y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=6+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}=\overrightarrow{v_r}=(2\,,1\,,-2) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi}=(2\,,1\,,-2) \\ \overrightarrow{AG}=(x\,,\,y\,,\,z)-(-1\,,3\,,0)=(x+1\,,\,y-3\,,\,z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{AG}=0 \Rightarrow$$

$$(2\,,1\,,-2)\cdot(x+1\,,\,y-3\,,\,z)=0 \Rightarrow 2x+2+y-3-2z \Rightarrow \pi \equiv 2x+y-2z-1=0 \Rightarrow$$

$$2\cdot(6+2\lambda)+\lambda-2\cdot(-2\lambda)-1=0 \Rightarrow 12+4\lambda+\lambda+4\lambda-1=0 \Rightarrow 9\lambda+11=0 \Rightarrow 9\lambda=-11 \Rightarrow \lambda=-\frac{11}{9} \Rightarrow$$

$$P\begin{cases} x=6+2\cdot\left(-\frac{11}{9}\right) \\ y=-\frac{11}{9} \\ z=-2\cdot\left(-\frac{11}{9}\right) \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{32}{9}\,,-\frac{11}{9}\,,\frac{22}{9}\right) \Rightarrow \overrightarrow{PA}=\left(\frac{32}{9}\,,-\frac{11}{9}\,,\frac{22}{9}\right)-(-1\,,3\,,0)=\left(\frac{41}{9}\,,-\frac{38}{9}\,,\frac{22}{9}\right) \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{PA}\right|=\sqrt{\left(\frac{41}{9}\right)^2+\left(-\frac{38}{9}\right)^2+\left(\frac{22}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{1681+1444+484}{81}}=\frac{\sqrt{3609}}{9}=\frac{3\sqrt{401}}{9}=\frac{\sqrt{401}}{3}\ u$$

b) El vector director de la recta y el de **AG**, donde **G** es el punto genérico de la recta, son perpendiculares y su producto escalar es nulo, de su resolución halaremos el punto R que cumple la condición pedida

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(2\,,1\,,-2) \\ \overrightarrow{AG}=(6+2\lambda\,,\,\lambda\,,-2\lambda)-(-1\,,3\,,0)=(7+2\lambda\,,\,\lambda-3\,,-2\lambda) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{AG}=0 \Rightarrow$$

$$(2\,,1\,,-2)\cdot(7+2\lambda\,,\,\lambda-3\,,-2\lambda)=0 \Rightarrow 14+4\lambda+\lambda-3+4\lambda=0 \Rightarrow 11+9\lambda=0 \Rightarrow -11=9\lambda \Rightarrow \lambda=-\frac{11}{9}$$

$$P\begin{cases} x=6+2\cdot\left(-\frac{11}{9}\right) \\ y=-\frac{11}{9} \\ z=-2\cdot\left(-\frac{11}{9}\right) \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{32}{9}\,,-\frac{11}{9}\,,\frac{22}{9}\right) \Rightarrow Solución\ lógica$$

Continuación del Problema 4A de la Propuesta A

c) El plano γ tiene como vector director el producto vectorial de **AB** por el vector director de la recta r, dicho vector es perpendicular a ambos, y es perpendicular al vector **AG**, siendo **G** el punto genérico del plano, siendo su producto escalar nulo y la ecuación pedida.
Se podría hallar, también, como el producto mixto de los tres vectores que hemos mencionado

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2\,,1\,,-2) \\ \overrightarrow{AB} = (2\,,0\,,-1)-(-1\,,3\,,0) = (3\,,-3\,,-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\gamma} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k} - 3\vec{k} - 6\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\overrightarrow{v_\gamma} = -7\vec{i} - 4\vec{j} - 9\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_\gamma} = (-7\,,-4\,,-9) \equiv (7\,,4\,,9) \\ \overrightarrow{AG} = (x\,,y\,,z)-(-1\,,3\,,0) = (x+1\,,y-3\,,z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\gamma} \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\gamma} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Rightarrow$$

$$(7\,,4\,,9)\cdot(x+1\,,y-3\,,z) = 0 \Rightarrow 7x + 7 + 4y - 12 + 9z = 0 \Rightarrow \gamma \equiv 7x + 4y + 9z - 5 = 0$$

5A a) En una tienda de lámparas tienen tres proveedores A, B y C. A suministra el 20 %, B el 10% y C el resto. De las lámparas de A salen defectuosas el 5 %, de las de B el 4% y de las de C el 2 %. Elegida una lámpara al azar de la tienda, calcula razonadamente la probabilidad de:
a1) No salgan defectuosas. (0,75 puntos)
a2) Si resultó defectuosa, que fuera suministrada por B. (0,5 puntos)

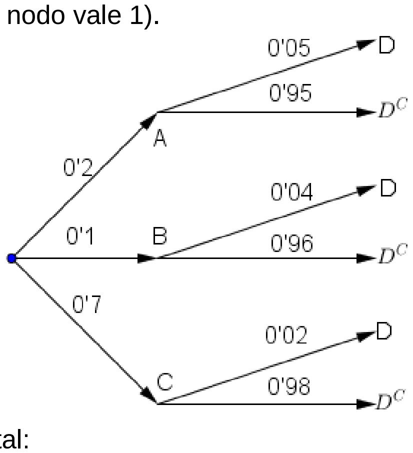
b) Una parte de un examen consta de cinco peguntas tipo test. Se aprueba dicha parte si contestas correctamente al menos tres preguntas. Calcula razonadamente la probabilidad de aprobar dicha parte, contestando al azar, cuando:
b1) Cada respuesta tiene dos items, solamente uno verdadero. (0,75 puntos)
b2) Cada respuesta tiene cuatro items, solamente uno verdadero. (0,5 puntos)

a) En una tienda de lámparas tienen tres proveedores A, B y C. A suministra el 20 %, B el 10% y C el resto. De las lámparas de A salen defectuosas el 5 %, de las de B el 4% y de las de C el 2 %. Elegida una lámpara al azar de la tienda, calcula razonadamente la probabilidad de:
a1)
No salgan defectuosas.

Llamemos A, B, C, D y D^C, a los sucesos siguientes, “proveedor A”, “proveedor B”, “proveedor C”, " lámpara defectuosa" y " lámpara no defectuosa", respectivamente.

Datos del problema: p(A) = 20% = 0’2; p(B) = 10% = 0’1; p(D/A) = 5% = 0’05; p(D/B) = 4% = 0’04, p(D/C) = 2% = 0’02.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total:

Piden **p(D^C)** = p(A).p(D^C/A) + p(B).p(D^C/B) + p(C).p(D^C/C) =
= (0’2)·(0’95) + (0’1)·(0’96) + (0’7)·(0’98) **= 243/250 = 0’972**.
a2)
Si resultó defectuosa, que fuera suministrada por B. (0,5 puntos)

Me piden **p(A/D)**.
Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(B/D) =} \frac{p(B \cap D)}{p(D)} = \frac{p(B) \cdot p(D/B)}{1 - p(D^C)} = \frac{0'1 \cdot 0'04}{1 - 0'972} \mathbf{= 1/7 \cong 0'14286}.$$

b) Una parte de un examen consta de cinco peguntas tipo test. Se aprueba dicha parte si contestas correctamente al menos tres preguntas. Calcula razonadamente la probabilidad de aprobar dicha parte, contestando al azar, cuando:
b1) Cada respuesta tiene dos items, solamente uno verdadero.
b2) Cada respuesta tiene cuatro items, solamente uno verdadero.

Vemos que nuestra variable X sigue una binomial B(n,p) donde "n" es el nº de veces que se realiza el experimento, en nuestro caso "n = 5", "p) la probabilidad de éxito; en el apartado (b1) hay dos ityems con uno verdadero luego p = 1/2 y q = 1 – 1/2 = 1/2. En el apartado (b2) hay cuatro items con uno verdadero luego p = 1/4 y q = 1 – 1/4 = 3/4.

En (b1) tenemos B(n,p) = B(5, 1/2)

Tenemos B(n,p) = B(5, 1/3)

Sabemos que la probabilidad de obtener k éxitos, que es su función de probabilidad, viene dada por:

$$p(X = k) = (n \text{ sobre } k).p^k.q^{(n-k)} = \binom{n}{k}.p^k.q^{(n-k)}.$$

En nuestro caso $p(X = k) = \binom{5}{k}.(1/2)^k.(1/2)^{5-k}$. No tendremos que hacer uso de ella porque nos han dado la tabla de la binomial, y tomaremos como p = 1/2 = 0'5

Se aprueba dicha parte si contestas correctamente al menos tres preguntas.

Me están pidiendo **p(X ≥ 3) =** p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) = {mirando en la tabla de la binomial} =
= 0'3125 + 0'1563 + 0'0313 **= 0'5001.**

En (b2) tenemos B(n,p) = B(5, 1/4)

Tenemos B(n,p) = B(5, 1/4)

Sabemos que la probabilidad de obtener k éxitos, que es su función de probabilidad, viene dada por:

$$p(X = k) = (n \text{ sobre } k).p^k.q^{(n-k)} = \binom{n}{k}.p^k.q^{(n-k)}.$$

En nuestro caso $p(X = k) = \binom{5}{k}.(1/4)^k.(3/4)^{5-k}$. No tendremos que hacer uso de ella porque nos han dado la tabla de la binomial, y tomaremos como p = 1/4 = 0'25

Se aprueba dicha parte si contestas correctamente al menos tres preguntas.

Me están pidiendo **p(X ≥ 3) =** p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) = {mirando en la tabla de la binomial} =
= 0'0879 + 0'0146 + 0'0010 **= 0'1035.**

Propuesta B

1B. a) Determina razonadamente el punto (x , y) de la parábola y = x² + 1 en el que la suma de sus coordenadas alcanza su mínimo valor. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la parábola dada en el punto de abscisa $x=-\frac{1}{2}$. **(1 punto)**

$a)$

$$S(x)=x+y=x+x^2+1 \Rightarrow S'(x)=\frac{dS(x)}{dx}=1+2x \Rightarrow S'(x)=0 \Rightarrow 1+2x=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$S''(x)=\frac{dS'(x)}{dx}=2>0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4} \end{cases}$$

$b)$

$$f'(x)=2x \Rightarrow m=f'\left(-\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \Rightarrow m \perp n \Rightarrow n=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{-1}=1 \Rightarrow \begin{cases} y\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4} \Rightarrow \\ n=1 \end{cases}$$

$$y-\frac{5}{4}=1\left(x+\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 4y-5=4x+2 \Rightarrow r_{normal} \equiv 4x-4y+7=0$$

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

$a)\ \int \frac{2x^3-x^2+2}{x^2-x}\,dx \qquad b)\ \int_1^2 (2x-3)e^{x-1}\,dx$ **(1,25 puntos por integral)**

$a)$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-x^2+2 & x^2-x \\ \hline -2x^3+2x^2 & 2x+1 \\ \quad x^2+2 & \\ \quad -x^2+x & \\ \qquad x+2 & \end{array}$$

$$\frac{2x^3-x^2+2}{x^2-x}=2x+1+\frac{x+2}{x^2-x} \Rightarrow \frac{x+2}{x^2-x}=\frac{x+2}{(x-1)x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)x} \Rightarrow A(x-1)+Bx=x+2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Si\ x=0 \Rightarrow A(0-1)+B\cdot 0=0+2 \Rightarrow -A=2 \Rightarrow A=-2 \\ Si\ x=1 \Rightarrow A(1-1)+B\cdot 1=1+2 \Rightarrow B=3 \end{cases} \Rightarrow \frac{2x^3-x^2+2}{x^2-x}=2x+1+\frac{-2}{x}+\frac{3}{x-1}$$

$$\int \frac{2x^3-x^2+2}{x^2-x}\,dx=\int\left(2x+1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x-1}\right)dx=2\int x\,dx+\int dx-2\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{dx}{x-1}=2\cdot\frac{1}{2}x^2+x-2\ln x+3\int\frac{dt}{t}$$

$$x-1=t \Rightarrow dx=dt$$

$$\int \frac{2x^3-x^2+2}{x^2-x}\,dx=x^2+x-\ln x^2+3\ln t=x^2+x-\ln x^2+\ln t^3=x^2+x+\ln\frac{t^3}{x^2}=x^2+x+\ln\frac{(x-1)^3}{x^2}+K$$

Continuación del Problema 2B de la Propuesta B

$b)$

$$\int (2x-3)\,e^{x-1}dx = (2x-3)\,e^{x-1} - \int e^{x-1}\,2\,dx = (2x-3)\,e^{x-1} - 2\int e^{x-1}\,dx = (2x-3)\,e^{x-1} - 2e^{x-1} = (2x-5)\,e^{x-1} + K$$

$$\begin{cases} 2x-3 = u \Rightarrow 2dx = du \\ e^{x-1}\,dx = dv \Rightarrow v = \int e^{x-1}\,dx = \int e^{t}\,dt = e^{t} = e^{x-1} \end{cases}$$

$$\int_1^2 (2x-3)\,e^{x-1}\,dx = \left[(2x-5)\,e^{x-1}\right]_1^2 = (2\cdot 2-5)\,e^{2-1} - (2\cdot 1-5)\,e^{1-1} = -e-(-3)\cdot 1 = 3-e$$

3B. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad e \quad$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla razonadamente dos parámetros **a** y **b** tales que **A^2 = aA + bI**. **(1,25 puntos)**

b) Calcula razonadamente todas las matrices **X** que verifican que **(A - X)(A + X) = A^2 - X^2**. **(1,25 puntos)**

$a)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -3a \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -3a \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b = 1 \\ -3a = -6 \Rightarrow a = \dfrac{-6}{-3} = 2 \end{cases} \Rightarrow 2+b = 1 \Rightarrow b = -1$$

$b)$

$$(A-X)(A+X) = A^2 + AX - XA - X^2 \Rightarrow AX - XA = 0 \Rightarrow AX = XA \Rightarrow$$

$$En\, matrices\; no\; existe\; propiedad\; conmutativa \Rightarrow Sea\; X = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} r-3t & s-3u \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & -3r+s \\ t & -3t+u \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r-3t = r \Rightarrow -3t = 0 \Rightarrow t = 0 \\ s-3u = -3r+s \Rightarrow -3u = -3r \Rightarrow u = r \\ u = -3t+u \Rightarrow -3t = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow Ejemplo \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = -5 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4B. Dados los puntos **A(-1 , 2 , 0)** , **B(1 , 0 , -4)** y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases}, \lambda \in \Re$

a) Calcula razonadamente un punto **C** de la recta **r** que forme con **A** y **B** un triángulo isósceles con el lado desigual en **AB**. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta perpendicular a la recta **r** y al vector $\overrightarrow{AB}$ y que pase por el punto A. (1 punto)
a) Los módulos de los vectores **AC** y **BC**, siendo **C** el punto genérico de la recta **r**, son iguales

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (1-\lambda , \lambda , 3+\lambda) - (-1 , 2 , 0) = (2-\lambda , \lambda - 2 , 3+\lambda) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(2-\lambda)^2 + (\lambda-2)^2 + (3+\lambda)^2} \\ \overrightarrow{BC} = (1-\lambda , \lambda , 3+\lambda) - (1 , 0 , -4) = (-\lambda , \lambda , 7+\lambda) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-\lambda)^2 + \lambda^2 + (7+\lambda)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4 - 4\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 9 + 6\lambda + \lambda^2} = \sqrt{3\lambda^2 - 2\lambda + 17} \\ \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 + 49 + 14\lambda + \lambda^2} = \sqrt{3\lambda^2 + 14\lambda + 49} \end{cases} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| \Rightarrow$$

$$\sqrt{3\lambda^2 - 2\lambda + 17} = \pm\sqrt{3\lambda^2 + 14\lambda + 49} \Rightarrow 3\lambda^2 - 2\lambda + 17 = 3\lambda^2 + 14\lambda + 49 \Rightarrow 16\lambda + 32 = 0 \Rightarrow 16\lambda = -32 \Rightarrow$$

$$\lambda = -\frac{32}{16} = -2 \Rightarrow C \begin{cases} x = 1-(-2) \\ y = -2 \\ z = 3+(-2) \end{cases} \Rightarrow C(3 , -2 , 1)$$

b) La recta **s** tendrá como vector director al que resulta de hallar el producto vectorial de $\overrightarrow{AB}$ y del vector director de la recta **r**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1 , 0 , -4) - (-1 , 2 , 0) = (2 , -2 , -4) \equiv (-1 , 1 , 2) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1 , 1 , 1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} + \vec{k} - 2\vec{i} + \vec{j} = -\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (-1 , -1 , 0) \equiv (1 , 1 , 0) \Rightarrow$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

5B. a) En una clase el 80% aprueba la asignatura de Biología, el 70% aprueba la asignatura de Matemáticas y el 60% aprueba Biología y Matemáticas.
a1) Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe alguna de las asignaturas? **(0,75 puntos)**
a2) Si se elige un estudiante y ha aprobado Biología, ¿cuál es la probabilidad de que también haya aprobado Matemáticas? **(0,5 puntos)**

b) Un dispensador de cierto refresco está regulado de manera que cada vez descargue 25 cl de media. Si la cantidad de líquido dispensado sigue una distribución normal de varianza 4:
b1) Calcula razonadamente la probabilidad de que descargue entre 22 y 28 cl. **(0,75 puntos)**
b2) Calcula razonadamente la capacidad mínima de los vasos que se usen, redondeada a cl, para que la probabilidad de que se derrame el líquido sea inferior al 2,5 %. **(0,5 puntos)**

a) En una clase el 80% aprueba la asignatura de Biología, el 70% aprueba la asignatura de Matemáticas y el 60% aprueba Biología y Matemáticas.
a1)
Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe alguna de las asignaturas?

Sean los sucesos A = "aprobar Biología" y B = "aprobar Matemáticas".

Nos dan p(A) = 80% = 0'8, p(B) = 70% = 0'7, p(aprueba ambas) = $p(A\cap B)$ = 60% = 0'6

Me están pidiendo **p(aprobar alguna) = $\mathbf{p(A\cup B)}$** = p(A) + p(B) - $p(A\cap B)$ = 0'8 + 0'7 – 0'6 **= 0'9.**
a2)
Si se elige un estudiante y ha aprobado Biología, ¿cuál es la probabilidad de que también haya aprobado Matemáticas?

Me están pidiendo **p(aprobar matemáticas sabiendo que ha aprobado biología) =**

= p(B/A) = $\dfrac{p(B\cap A)}{p(A)}$ **= 0'6/0'7 ≅ 0'857.**

b) Un dispensador de cierto refresco está regulado de manera que cada vez descargue 25 cl de media. Si la cantidad de líquido dispensado sigue una distribución normal de varianza 4:
b1)
Calcula razonadamente la probabilidad de que descargue entre 22 y 28 cl.

Tenemos una normal $N(\mu,\sigma) = N(25, \sqrt{(4)}) = N(25, 2)$

Me piden **p(descargue entre 22 y 28 cl) = p(22 ≤ X ≤ 28) =** {tipificamos} = $p\left(\dfrac{22 - 25}{2} \le Z \le \dfrac{28 - 25}{2}\right)$ =

= p(-1'5 ≤ Z ≤ 1'5) = p(Z ≤ 1'5) - p(Z ≤ -1'5) = p(Z ≤ 1'5) – [1 - p(Z ≤ 1'5)] = 2· p(Z ≤ 1'5) - 1 = {miramos en la tabla de la N(0,1)} **= 2·0'9332 – 1 = 0'8664.**
b2)
Calcula razonadamente la capacidad mínima de los vasos que se usen, redondeada a cl, para que la probabilidad de que se derrame el líquido sea inferior al 2,5 %. **(0,5 puntos)**

Me piden "k" tal que p(X > k) < 2'5%.

Calculamos z_0 tal que $p(Z \ge z_0)$ = 2'5% = 1 - $p(Z \le z_0)$, luego $p(Z \le z_0)$ = 1 – 2'5% = 1 – 0'025 = 0'975.
Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que z_0 = 1'96. Tipificando tenemos $1'96 = \dfrac{k - 25}{2}$, de donde **k =**

= 2·1'96 + 25 0'44·2'5 + 4'05 **= 28'92 ≅ 29, es decir la capacidad mínima de los vasos ha de ser de 29cl.**