EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
LOMCE – JUNIO 2019

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Considere el sistema $\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro *t*.

1) [1.5 PUNTOS] Clasifique, en función del valor de *t*, el tipo de sistema.

2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t = 1$.

Ejercicio 2

Considere la función $f(x) = (x+10)e^{2x}$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule un primitiva $F(x)$ tal que $F(0) = 0$. Use la derivada para comprobar su solución.

2) [0.5 PUNTOS] Calcule $\int_0^5 f(x)dx$.

Ejercicio 3

Tomemos el plano $\Pi \equiv 2x + ay + z = 2$ y la recta $r(t) \equiv (0,0,0) + t\overrightarrow{(2,1,1)}$.

1) [0.5 PUNTOS] Determine *a* para que *r* y Π sean ortogonales.

2) [2 PUNTOS] Determine *a* para que *r* y Π sean paralelos. Calcule la distancia entre *r* y Π en este caso.

Ejercicio 4

Una prueba rápida para detectar una enfermedad da un 2% de falsos positivos (personas sanas en las que la prueba da positivo, clasificándolas como enfermas) y un 1% de falsos negativos (personas enfermas en las que la prueba da negativo, clasificándolas como sanas). En una población hay un 4% de enfermos.

1) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que el test dé un resultado negativo.

2) [1 PUNTO] La prueba da un resultado positivo (clasificando a la persona como enferma). Calcule la probabilidad de que realmente esté sana.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Sean $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcule, razonadamente, el rango de *M*.

2) [2 PUNTOS] Determine todos los vectores *v* tales que $M^2 \cdot v = M^{-1} \cdot v$.

Ejercicio 2

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x)}{2x} & si\ x < 0 \\ \dfrac{a - x^2}{2 + x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

1) [1 PUNTOS] Determine, si existe, el valor de *a* que haga a la función continua en $x = 0$.

2) [1.5 PUNTOS] Calcule el valor de *a* para que *f* tenga un extremo relativo en $x = 2$. ¿Es este extremo un máximo o mínimo local?

3) [0.5 PUNTOS] Sea $g(x)$ una función integrable, si $\int_0^3 g(x)dx = 4$ y $\int_2^3 g(x)dx = 6$, ¿Cuánto vale $\int_0^2 g(x)dx$?

Ejercicio 3

Sean las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} y = 2 \\ 2x + z = 13 \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - z = 3 \end{cases}$ y el punto $A = (0, 0, 3)$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que pasa por *A* y es paralelo a r_1 y a r_2 .

Ejercicio 4

El peso de una población sigue una distribución normal de media 70 kg y desviación típica de 10 kg.

1) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa entre 65 y 75 kg.

2) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa al menos 85 kg.

SOLUCIONES

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Considere el sistema $\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro *t*.

1) [1.5 PUNTOS] Clasifique, en función del valor de *t*, el tipo de sistema.
2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso *t* = 1.

1) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 0 & t \end{vmatrix} = -t^2 + t + t - t^2 = -2t^2 + 2t$$

Igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow -2t^2 + 2t = 0 \Rightarrow -2t(t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

Hay tres casos distintos.

CASO 1. $t \neq 0$ y $t \neq 1$

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $t = 0$

El sistema queda

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{\text{Sumamos las ecuaciones}\} \Rightarrow 2z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$y + 0 = 0 \Rightarrow y = 0$

El sistema es compatible indeterminado. Las soluciones son x = t; y = 0; z = 0.

CASO 3. $t = 1$

El sistema queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x = -z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -z + y + z = 0 \\ -z - y + z = 0 \\ x = -z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 0 \\ -y = 0 \\ x = -z \end{matrix}\right\}$$

La solución es $x = -t;\ y = 0;\ z = t$

El sistema es compatible indeterminado.

2) Calculado en el apartado anterior. La solución es $x = -t;\ y = 0;\ z = t$

Ejercicio 2

Considere la función $f(x) = (x + 10)e^{2x}$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule un primitiva $F(x)$ tal que $F(0) = 0$. Use la derivada para comprobar su solución.

2) [0.5 PUNTOS] Calcule $\int_0^5 f(x)dx$.

1)

$$F(x)=\int f(x)dx=\int (x+10)e^{2x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integramos por partes}\\ u=x+10\rightarrow du=dx\\ dv=e^{2x}dx\rightarrow v=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right\}=$$

$$=(x+10)\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx=(x+10)\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=(x+10)\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$F(x)=\frac{e^{2x}}{2}\left(x+10-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^{2x}}{2}\left(x+\frac{19}{2}\right)+C$$

Como debe cumplir $F(0)=0\Rightarrow F(0)=\frac{e^0}{2}\left(0+\frac{19}{2}\right)+C=0\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{19}{2}\right)+C=0\Rightarrow C=-\frac{19}{4}$

La primitiva pedida es $F(x)=\frac{e^{2x}}{2}\left(x+\frac{19}{2}\right)-\frac{19}{4}$

2)

$$\int_0^5 f(x)dx=\int_0^5 (x+10)e^{2x}dx=\left[\frac{e^{2x}}{2}\left(x+\frac{19}{2}\right)\right]_0^5=$$

$$=\left[\frac{e^{10}}{2}\left(5+\frac{19}{2}\right)\right]-\left[\frac{e^0}{2}\left(0+\frac{19}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{e^{10}}{2}\cdot\frac{29}{2}-\frac{19}{4}=\boxed{\frac{29e^{10}-19}{4}}$$

Ejercicio 3

Tomemos el plano $\Pi\equiv 2x+ay+z=2$ y la recta $r(t)\equiv(0,0,0)+t\overrightarrow{(2,1,1)}$.

1) [0.5 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean ortogonales.

2) [2 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean paralelos. Calcule la distancia entre r y Π en este caso.

1) El vector normal del plano es $\vec{n}=(2,a,1)$ y el director de la recta es $\vec{v}=(2,1,1)$.

Para que sean ortogonales el vector normal y el director deben ser paralelos y sus coordenadas deben ser proporcionales.

$$\frac{2}{2}=\frac{a}{1}=\frac{1}{1}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{2}=\frac{a}{1}\Rightarrow 2=2a\Rightarrow a=1\\ \frac{a}{1}=\frac{1}{1}\Rightarrow a=1\end{array}\right.$$

Para ser ortogonales debe ser $a=1$

2) El vector normal del plano es $\vec{n}=(2,a,1)$ y el director de la recta es $\vec{v}=(2,1,1)$.

Su producto escalar vale $\vec{n}\cdot\vec{v}=(2,a,1)(2,1,1)=4+a+1=5+a$. Este producto escalar es 0 cuando a = –5. En este caso veamos si son paralelos.
El punto P(0,0,0) de la recta ¿está en el plano?

$$\left.\begin{array}{l}\Pi \equiv 2x+ay+z=2 \\ ¿(0,0,0)\in\Pi\,?\end{array}\right\} \Rightarrow ¿0+0+0=2?$$ No. La recta no está contenida en el plano, sino que es paralela cuando a = –5.

La distancia entre recta y plano (cuando son paralelos) es la distancia entre un punto cualquiera de la recta y el plano.

$$d(r,\Pi)=d((0,0,0),\Pi)=\left|\frac{0+0+0-2}{\sqrt{2^2+5^2+1^2}}\right|=\boxed{\frac{2}{\sqrt{30}}u}$$

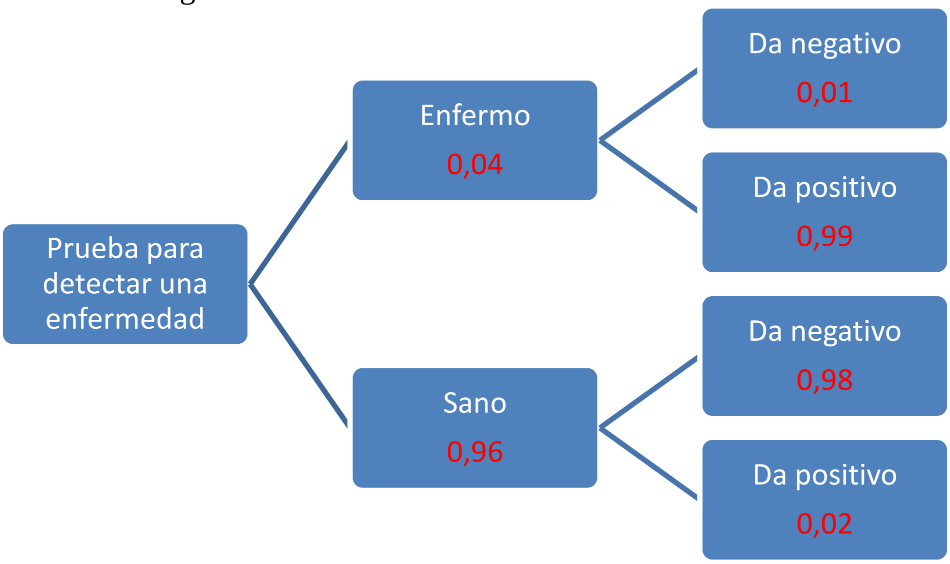
Ejercicio 4

Una prueba rápida para detectar una enfermedad da un 2% de falsos positivos (personas sanas en las que la prueba da positivo, clasificándolas como enfermas) y un 1% de falsos negativos (personas enfermas en las que la prueba da negativo, clasificándolas como sanas). En una población hay un 4% de enfermos.

1) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que el test dé un resultado negativo.

2) [1 PUNTO] La prueba da un resultado positivo (clasificando a la persona como enferma). Calcule la probabilidad de que realmente esté sana.

Realicemos un diagrama de árbol.



1) P(Dé negativo) = P(Enfermo) · P(Dé negativo / Enfermo) + P(Sano) · P(Dé negativo / Sano) = 0,04 · 0,01 + 0,96 · 0,98 = $\boxed{0{,}9412}$

2)

$$P(\text{Esté sana / Ha dado positivo})=\frac{P(\text{Esté sana }\cap\text{ Ha dado positivo})}{P(\text{Ha dado positivo})}=$$

$$=\frac{0{,}96\cdot 0{,}02}{1-0{,}9412}=\frac{0{,}0192}{0{,}0588}=0{,}3265$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Sean $M=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcule, razonadamente, el rango de *M*.

2) [2 PUNTOS] Determine todos los vectores *v* tales que $M^2\cdot v=M^{-1}\cdot v$.

1) Calculemos el determinante de la matriz M.

$|M|=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix}=-4-1+6=1\neq 0$. El rango de M es 3

2) Calculemos la inversa de M.

$$M^{-1}=\frac{Adj\left(M^t\right)}{|M|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & -3 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 1\\ 5 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$M^2=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3 & -1+2 & 1\\ 3-6-1 & -3+4 & 2+2\\ 1-2 & -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -4 & 1 & 4\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$M^2\cdot v=M^{-1}\cdot v\Rightarrow M^2\cdot v-M^{-1}\cdot v=0\Rightarrow\left(M^2-M^{-1}\right)v=0$$

$$\left[\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -4 & 1 & 4\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & -2 & 1\\ 5 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2-4 & 1+2 & 1-1\\ -4-5 & 1+2 & 4-1\\ -1-2 & -1+1 & 4-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-6 & 3 & 0\\ -9 & 3 & 3\\ -3 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz es

$$\begin{vmatrix}-6 & 3 & 0\\ -9 & 3 & 3\\ -3 & 0 & 3\end{vmatrix}=-54-27+81=0$$

Como el sistema es homogéneo, entonces es compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{l}-6x+3y=0\\-9x+3y+3z=0\\-3x+3z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación } 2^a = \text{Ecuación } 1^a + \text{Ecuación } 3^a\\\text{Elimino la ecuación } 2^a\\\text{Simplifico ecuación } 1^a \text{ y ecuación } 3^a\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-2x+y=0\\-x+z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y=2x\\z=x\end{array}\right\}$$

La solución es $x=t;\ y=2t;\ z=t$. El vector v es $(t,2t,t)$, siendo t cualquier valor real.

Ejercicio 2

Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{sen(x)}{2x} & si\ x<0\\ \dfrac{a-x^2}{2+x} & si\ x\geq 0\end{cases}$

1) [1 PUNTOS] Determine, si existe, el valor de *a* que haga a la función continua en $x = 0$.
2) [1.5 PUNTOS] Calcule el valor de *a* para que *f* tenga un extremo relativo en $x = 2$. ¿Es este extremo un máximo o mínimo local?

3) [0.5 PUNTOS] Sea $g(x)$ una función integrable, si $\int_0^3 g(x)dx=4$ y $\int_2^3 g(x)dx=6$, ¿Cuánto vale $\int_0^2 g(x)dx$?

1) Para que sea continua en x = 0 deben cumplirse:

- Existe $f(0)=\dfrac{a-0^2}{2+0}=\dfrac{a}{2}$
- Existe $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a-x^2}{2+x}=\dfrac{a}{2}$
- Existe

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{sen(x)}{2x}=\frac{0}{0}=\{\text{Indeterminación}\to\text{Aplico L´Hôpital}\}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos(x)}{2}=\frac{1}{2}$$

- Los tres valores son iguales. $\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\boxed{a=1}$

2) En el entorno de x =2 la función es $f(x)=\dfrac{a-x^2}{2+x}$. Su derivada es

$$f´(x)=\frac{-2x(2+x)-1(a-x^2)}{(2+x)^2}=\frac{-4x-2x^2-a+x^2}{(2+x)^2}=\frac{-x^2-4x-a}{(2+x)^2}.$$

Para que sea x = 2 un extremo debe anular la derivada.

$$f´(2)=0\Rightarrow\frac{-2^2-4\cdot 2-a}{(2+2)^2}=0\Rightarrow -4-8-a=0\Rightarrow a=-12$$

Si $f´(x)=\dfrac{-x^2-4x+12}{(2+x)^2}$ en un valor menor que x = 2, por ejemplo x = 1 la derivada vale

$$f´(1)=\frac{-1^2-4+12}{(2+1)^2}=\frac{7}{9}>0.$$

Si $f'(x)=\dfrac{-x^2-4x+12}{(2+x)^2}$ en un valor mayor que x = 2, por ejemplo x = 3 la derivada vale

$$f'(3)=\frac{-3^2-12+12}{(2+3)^2}=\frac{-9}{25}<0.$$

En x = 2 hay un máximo, pues antes de este valor crece y luego decrece.

3)

$$\int_0^2 g(x)dx=\int_0^3 g(x)dx-\int_2^3 g(x)dx=4-6=-2$$

Ejercicio 3

Sean las rectas $r_1\equiv\begin{cases}y=2\\2x+z=13\end{cases}$, $r_2\equiv\begin{cases}x+2y=4\\x-z=3\end{cases}$ y el punto $A=(0,\ 0,\ 3)$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que pasa por A y es paralelo a r_1 y a r_2.

El vector director de la recta $r_1\equiv\begin{cases}y=2\\2x+z=13\end{cases}$ es el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen.

$$\overrightarrow{v_{r_1}}=\begin{vmatrix}i&j&k\\0&1&0\\2&0&1\end{vmatrix}=i-2k=(1,0,-2)$$

El vector director de la recta $r_2\equiv\begin{cases}x+2y=4\\x-z=3\end{cases}$ es el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen.

$$\overrightarrow{v_{r_2}}=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&2&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=-2i-2k+j=(-2,1,-2)$$

Estos vectores no son paralelos y las rectas se cortan o cruzan.

Si el plano es paralelo a las rectas su vector normal es el producto vectorial de ambos vectores.

$$\vec{n}=\overrightarrow{v_{r_1}}\times\overrightarrow{v_{r_2}}=(1,0,-2)\times(-2,1,-2)=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&0&-2\\-2&1&-2\end{vmatrix}=4j+k+2j+2i=2i+6j+k=(2,6,1)$$

El plano tiene ecuación $2x+6y+z+D=0$. Como pasa por A(0,0,3) entonces:

$2\cdot0+6\cdot0+3+D=0\Rightarrow D=-3$

El plano buscado es $\boxed{2x+6y+z-3=0}$

Ejercicio 4

El peso de una población sigue una distribución normal de media 70 kg y desviación típica de 10 kg.

1) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa entre 65 y 75 kg.

2) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa al menos 85 kg.

X = Peso de una persona. X = N(70, 10)

1)

$$P(65 < X < 75) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{65-70}{10} < \frac{X-70}{10} < \frac{75-70}{10}\right) =$$
$$= P(-0,5 < Z < 0,5) = P(Z < 0,5) - P(Z < -0,5) =$$
$$= P(Z < 0,5) - [1 - P(Z < 0,5)] =$$
$$= 0,6915 - [1 - 0,6915] =$$
$$= 0,383$$

El porcentaje de población es de 38,3%

2)

$$P(X > 85) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-70}{10} > \frac{85-70}{10}\right) =$$
$$= P(Z > 1,5) = 1 - P(Z < 1,5) = 1 - 0,9332 = \boxed{0,0668}$$

El porcentaje de población es de 6,68 %