UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – SEPTIEMBRE 2018

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Considere el sistema dependiente del parámetro m:

$$\begin{pmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1) [1 PUNTO] Clasifique el sistema en función del parámetro m.
2) [2,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en los casos en los que el sistema sea compatible.

Ejercicio 2

1) [2.5 PUNTOS] Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\left(2x^2\right)+x}{\ln\left(x+1\right)+x}$. (ln denota el logaritmo neperiano)

2) [1 PUNTO] ¿Para qué valor de d tiene la función $\dfrac{x^d+1}{x-2}$ una asíntota oblicua en $+\infty$? Calcule dicha asíntota.

Ejercicio 3 Sean A y B los planos:

$$\begin{array}{c} A:\left(0,1,0\right)+t\overrightarrow{\left(1,-1,2\right)}+s\overrightarrow{\left(0,0,1\right)}\; t,s\in\mathbb{R} \\ B: x+2y+2z=1 \end{array}.$$

1) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano A.
2) [1 PUNTO] Calcule un punto y el vector director de la recta intersección de A y B.
3) [1,25 PUNTOS] Calcule el ángulo formado por los dos planos A y B.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Sean $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & 1 \end{pmatrix}$ con $x, y \in \mathbb{R}$

1) [1,25 PUNTOS] Determine los valores de x e y para los cuales $AB = BA$.
2) [1,5 PUNTOS] Determine un valor x para el que $A^2 = 6A$ ¿Tiene A inversa en este caso?
3) [0,5 PUNTOS] Sean N, R, S, X matrices 2x2 que tienen todas matriz inversa. Despeje la matriz X de la expresión $N \cdot X \cdot R = S$.

Ejercicio 2 Sea

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & si \quad x \le -2 \\ x^2+ax & si \quad -2 < x < 0 \\ 2sen(x)+b & si \quad 0 \le x \end{cases}$$

1) [1 PUNTO] Determine a y b para que la función f sea continua en todo R.
2) [1,5 PUNTOS] Si $a = 3$, $b = 0$ clasifique la discontinuidad en $x = -2$.
3) [1 PUNTO] Si $a = 2$, $b = 0$, calcule el área encerrada por la gráfica de f entre las rectas $y = 0$, $x = -5$ y $x = -3$.

Ejercicio 3

Sean el punto A = (4, 0, 1) y la recta $r:\begin{cases} x-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$

1) [1,75 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a r que pasa por el punto A.
2) [1,5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que contiene a r y a A.

SOLUCIONES

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Considere el sistema dependiente del parámetro m:

$$\begin{pmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1) [1 PUNTO] Clasifique el sistema en función del parámetro m.
2) [2,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en los casos en los que el sistema sea compatible.

1) Estudiamos el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & m & 0 \\ m & 1 & m \\ 1 & -2m & 0 \end{vmatrix} = 0 + m^2 + 0 - \left(0 + 0 + 2m^2\right) = -m^2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$$

Distinguimos dos casos distintos en función del valor de m.

CASO 1. $m \neq 0$.

El determinante de A es no nulo y el rango de A es 3. El rango de la matriz ampliada también es 3 al igual que el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $m = 0$.

El determinante de A es cero y el rango de A no es 3.

La matriz A queda:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿El rango de A es 2?

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

El rango de A es 2.

Veamos el rango de la matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

Como la 3ª columna son todo ceros calculamos el valor del menor de orden 3 que resulta de quitar esta columna → $\begin{vmatrix}-1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}=-3+2=-1\neq 0$.

El rango de A/B es 3.

Como rango de A/B = 3 ≠ 2 = rango de A **el sistema es incompatible**.

Resumiendo: Si $m\neq 0$ el sistema es compatible determinado y si $m=0$ el sistema es incompatible.

2) Para $m\neq 0$ el sistema es compatible determinado. Hallamos la solución utilizando Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-2 & m & 0\\ 0 & 1 & m\\ 3 & -2m & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1 & m & 0\\ m & 1 & m\\ 1 & -2m & 0\end{vmatrix}}=\frac{0+3m^2+0-0-0-4m^2}{-m^2}=\frac{-m^2}{-m^2}=1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}-1 & -2 & 0\\ m & 0 & m\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1 & m & 0\\ m & 1 & m\\ 1 & -2m & 0\end{vmatrix}}=\frac{0-2m+0-0-0+3m}{-m^2}=\frac{m}{-m^2}=-\frac{1}{m}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}-1 & m & -2\\ m & 1 & 0\\ 1 & -2m & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1 & m & 0\\ m & 1 & m\\ 1 & -2m & 0\end{vmatrix}}=\frac{-3+0+4m^2+2-3m^2-0}{-m^2}=\frac{-1+m^2}{-m^2}=\frac{1-m^2}{m^2}$$

La solución del sistema es $x=1;\ y=\frac{-1}{m};\ z=\frac{1-m^2}{m^2}$

Ejercicio 2

1) [2.5 PUNTOS] Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{sen\left(2x^2\right)+x}{\ln\left(x+1\right)+x}$. (ln denota el logaritmo neperiano)

2) [1 PUNTO] ¿Para qué valor de *d* tiene la función $\frac{x^d+1}{x-2}$ una asíntota oblicua en +∞? Calcule dicha asíntota.

1)

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\left(2x^2\right)+x}{\ln\left(x+1\right)+x} = \frac{sen\left(0\right)+0}{\ln\left(1\right)+0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L´Hôpital)=}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos\left(2x^2\right) \cdot 4x+1}{\frac{1}{x+1}+1} = \frac{\cos(0) \cdot 0+1}{1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

2) Si $f(x) = \frac{x^d+1}{x-2}$ la asíntota oblicua tiene ecuación $y = mx+n$ donde el valor de *m* se calcula mediante el límite:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^d+1}{x-2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^d+1}{x\left(x-2\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^d+1}{x^2-2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^d+1}{x^2-2x}$$

Para que este límite exista y no sea cero debe ser el valor de *d = 2.*

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2-2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

En cuyo caso hallamos el valor de *n* mediante el límite:

$$n = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-2} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+2x}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

La asíntota oblicua existe cuando *d =2* y dicha asíntota tiene ecuación $y = x+2$

Ejercicio 3 Sean *A* y *B* los planos:

$$A:(0,1,0)+t\overrightarrow{(1,-1,2)}+s\overrightarrow{(0,0,1)}\ t,s\in\mathbb{R}$$
$$B: x+2y+2z=1$$

1) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano *A*.
2) [1 PUNTO] Calcule un punto y el vector director de la recta intersección de *A* y *B*.
3) [1,25 PUNTOS] Calcule el ángulo formado por los dos planos *A* y *B*.

1) $A:(0,1,0)+t\overrightarrow{(1,-1,2)}+s\overrightarrow{(0,0,1)}\ t,s\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} P(0,1,0)\in A \\ \vec{u}=(1,-1,2) \\ \vec{v}=(0,0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow A:\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -x-(y-1)=0\Rightarrow -x-y+1=0$$

$$A: x+y-1=0$$

2)

$$\left.\begin{array}{r} A: x+y-1=0 \\ B: x+2y+2z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_A}=(1,1,0) \\ \overrightarrow{n_B}=(1,2,2)\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{1}\neq\frac{1}{2}\neq\frac{0}{2}$$

Al no tener las coordenadas proporcionales los vectores normales de los planos no son paralelos y por tanto los planos A y B no son paralelos y se cortan en una recta.

Obtenemos la ecuación de la recta intersección:

$$\left.\begin{array}{r} A: x+y-1=0 \\ B: x+2y+2z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r} x=1-y \\ x+2y+2z=1\end{array}\right\}\Rightarrow 1-y+2y+2z=1\Rightarrow y+2z=0\Rightarrow \underline{y=-2z}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underline{x=1+2z}\Rightarrow r:\begin{cases} x=1+2z \\ y=-2z \\ z=z\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases} P_r(1,0,0) \\ \overrightarrow{v_r}=(2,-2,1)\end{cases}$$

3) El ángulo entre los planos es el mismo que el ángulo entre los vectores normales y para hallar dicho ángulo utilizamos el producto escalar.

$$\left.\begin{array}{r} A: x+y-1=0 \\ B: x+2y+2z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_A}=(1,1,0) \\ \overrightarrow{n_B}=(1,2,2)\end{cases}\Rightarrow\cos(A,B)=\cos\left(\overrightarrow{n_A},\overrightarrow{n_B}\right)=\frac{\overrightarrow{n_A}\cdot\overrightarrow{n_B}}{\left|\overrightarrow{n_A}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_B}\right|}$$

$$\cos(A,B)=\frac{(1,1,0)(1,2,2)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{1+2}{\sqrt{2}\sqrt{9}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\acute{a}ngulo(A,B)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=45^{\circ}}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Sean $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ x & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ y & 1\end{pmatrix}$ con $x, y \in \mathbb{R}$

1) [1,25 PUNTOS] Determine los valores de x e y para los cuales $AB = BA$.
2) [1,5 PUNTOS] Determine un valor x para el que $A^2 = 6A$ ¿Tiene A inversa en este caso?
3) [0,5 PUNTOS] Sean N, R, S, X matrices 2x2 que tienen todas matriz inversa. Despeje la matriz X de la expresión $N \cdot X \cdot R = S$.

1)

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix}3 & 1\\ x & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ y & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ x & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}3+y & 3+1\\ x+3y & x+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+x & 1+3\\ 3y+x & y+3\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}3+y=3+x\\ 4=4\\ x+3y=3y+x\\ x+3=y+3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=x\\ 0=0\\ x=y\end{cases} \Rightarrow \boxed{y=x}$$

Se cumple cuando $y = x$.

2)

$$A^2 = 6A \Rightarrow A \cdot A = 6A \Rightarrow \begin{pmatrix}3 & 1\\ x & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ x & 3\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}3 & 1\\ x & 3\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}9+x & 3+3\\ 3x+3x & x+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 6\\ 6x & 18\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}9+x=18\\ 6=6\\ 6x=6x\\ x+9=18\end{cases} \Rightarrow \boxed{x=9}$$

Para que tenga inversa comprobamos si su determinante es no nulo cuando $x = 9$**.**

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 9 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 9 & 3\end{vmatrix}=9-9=0$$

La matriz A no tiene inversa cuando $x = 9$.

3)

$$\left.\begin{matrix}N \cdot X \cdot R = S\\ Existe\ N^{-1}\\ Existe\ R^{-1}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}N^{-1} \cdot N \cdot X \cdot R \cdot R^{-1} = N^{-1} \cdot S \cdot R^{-1}\\ N^{-1} \cdot N = Id\\ R^{-1} \cdot R = Id\end{matrix}\right\} \Rightarrow Id \cdot X \cdot Id = N^{-1} \cdot S \cdot R^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X = N^{-1} \cdot S \cdot R^{-1}}$$

Ejercicio 2 Sea

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & si \quad x\le -2 \\ x^2+ax & si \quad -2<x<0 \\ 2sen(x)+b & si \quad 0\le x \end{cases}$$

1) [1 PUNTO] Determine a y b para que la función f sea continua en todo R.
2) [1,5 PUNTOS] Si $a = 3$, $b = 0$ clasifique la discontinuidad en $x = –2$.
3) [1 PUNTO] Si $a = 2$, $b = 0$, calcule el área encerrada por la gráfica de f entre las rectas $y = 0$, $x=-5$ y $x = –3$.

1)

Para que sea continua debe serlo en $x = 0$ y en $x = –2$.

En $x = 0$ debe cumplirse:

- Existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ para ello deben ser iguales los límites laterales:

$$\left.\begin{cases} \lim_{x\to 0^-}\left(x^2+ax\right)=0 \\ \lim_{x\to 0^+} 2sen(x)+b=2sen0+b=b \end{cases}\right\}\Rightarrow b=0$$

- Existe $f(0)=2sen(0)+b=b$
- Son iguales → $b = 0$.

En $x = –2$ debe cumplirse:

- Existe $\lim_{x\to -2} f(x)$ y para ello deben ser iguales los límites laterales:

$$\left.\begin{cases} \lim_{x\to -2^-}(x+2)=0 \\ \lim_{x\to -2^+}\left(x^2+ax\right)=(-2)^2+a(-2)=-2a+4 \end{cases}\right\}\Rightarrow -2a+4=0\Rightarrow a=2$$

- Existe $f(-2)=-2+2=0$
- Son iguales $f(-2)=\lim_{x\to -2} f(x)=0$ → $a = 2$.

Necesitamos que sea $a = 2$ y $b = 0$.

3) Si $a = 3$, $b = 0$ la función es $f(x)=\begin{cases} x+2 & si \quad x\le -2 \\ x^2+3x & si \quad -2<x<0 \\ 2sen(x) & si \quad 0\le x \end{cases}$

Estudiemos la discontinuidad en $x = –2$:

- Existe $\lim_{x\to -2} f(x)$ y para ello deben ser iguales los límites laterales:

$$\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-}(x+2)=0\\ \lim\limits_{x\to -2^+}(x^2+3x)=(-2)^2+3(-2)=4-6=-2\end{cases}\right\}\Rightarrow 0\neq -2\Rightarrow \text{No existe } \lim_{x\to -2} f(x)$$

En $x = -2$ hay una discontinuidad inevitable de salto finito.

4) Entre $x=-5$ y $x = -3$ la función es $f(x)=x+2$ que corta al eje X ($y = 0$) en $x = -2$ que está fuera del intervalo (–5, –3).

Calculamos la integral definida de la función entre –5 y –3:

$$\int_{-5}^{-3} x+2dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-5}^{-3}=\left[\frac{(-3)^2}{2}+2(-3)\right]-\left[\frac{(-5)^2}{2}+2(-5)\right]=\frac{9}{2}-6-\frac{25}{2}+10=-4$$

El área es el valor absoluto de esta integral definida →*Área = 4 u^2*.

Ejercicio 3

Sean el punto A = (4, 0, 1) y la recta $r:\begin{cases} x-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$

1) [1,75 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a *r* que pasa por el punto A.

2) [1,5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que contiene a *r* y a A.

1) Obtenemos el vector director de la recta *r*.

$$r:\begin{cases} x-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \vec{n}\times\vec{n'} = (1,0,0)\times(0,1,-1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = k + j = j + k = (0,1,1)$$

El vector normal del plano perpendicular a la recta *r* es el vector director de la recta → $\vec{n} = \overrightarrow{v_r} = (0,1,1)$. Obtenemos la ecuación general del plano:

$$\left.\begin{array}{l} A = (4,\ 0,\ 1) \in plano \\ \vec{n} = \overrightarrow{v_r} = (0,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = (4,\ 0,\ 1) \in plano \\ plano: y+z+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0+1+D=0 \Rightarrow D=-1$$

$$\boxed{Plano: y+z-1=0}$$

2) Necesitamos dos vectores directores para hallar el plano pedido y para ello obtengo el vector director de la recta *r* y un punto de la misma.

$$r:\begin{cases} x-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (0,1,1)$$

$$r:\begin{cases} x-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=2} \\ y=z+2 \end{cases} \Rightarrow Tomo\ \boxed{z=0} \Rightarrow \boxed{y=2} \Rightarrow P_r(2,2,0)$$

El plano que nos piden tiene como vectores directores $\overrightarrow{v_r} = (0,1,1)$ y $\overrightarrow{P_rA} = (4,0,1)-(2,2,0) = (2,-2,1)$ y uno de sus puntos es A = (4, 0, 1) por lo que su ecuación es:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{P_rA} = (2,-2,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{v_r} = (0,1,1) \\ A(4,0,1) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-4+2y-2(z-1)+2(x-4)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-4+2y-2z+2+2x-8=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 3x+2y-2z-10=0}$$