Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2020

Model 3

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les dues opcions, A i B, proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritza l'ùs de les que puguin emmagatzemar o transmetre informació.

OPCIÓ A

1. Donada l'equació matricial

$$M \cdot X + N = P,$$

on X és la matriu incógnita i

$$M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Per a quins valors del parámetre a existeix la matriu inversa de M? (1 punt)

(b) Calcula la matriu inversa de M. (3 punts)

(c) Per a a = 2, resol l'equació matricial, si és possible. (3 punts)

(d) Per als valors de a per als quals existeix la matriu inversa de M, resol l'equació matricial. (3 punts)

2. Considera la funció

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

(a) Determina: el domini, els de creixement i decreixement, les coordenades dels máxims i mínims i el $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. (2 punts)

(b) Fes un esbòs de la gràfica. (1 punt)

(c) Obté els valors de A i B per als quals (3 punts)

$$f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

(d) Calcula l'área de la regió limitada per la gráfica de la funció, l'eix OX i les rectes d'equacions $x = -2$ i $x = 2$. (4 punts)

3. Donades les rectes

$$(I)\begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases} \qquad (II)\begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases}$$

(a) Calcula un vector posició i un vector director de cada una. (4 punts)

(b) Calcula l'equaciò vectorial de cada una. (2 punts)

(c) Calcula el rang de la matriu formada pels dos vectors directors i el vector diferéncia, o vector resta, dels dos vectors posició obtinguts. (2 punts)

(d) De l'anterior rang, dedueix la posició relativa d'ambdues rectes. (2 punts)

4. Tenim tres urnes, la primera conté 2 bolles blaves; la segona, 1 bolla blava i 1 de vermella; la tercera, 2 bolles vermelles. Fem l'experiment aleatori

"Triam una urna a l'atzar i extraiem una bolla"

Suposa que totes les urnes tenen la mateixa probabilitat de ser escollides.

(a) Calcula la probabilitat del succés R = "bolla extreta vermella" (5 punts).

(b) Si la bolla extreta resulta que és vermella, quina és la probabilitat que l'urna escollida hagi estat la tercera? (5 punts).

Model 3

OPCIÓ B

1. Donades les matrius A i B,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & x\\ 4 & 6 & 8\\ 6 & 9 & 12\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

(a) calcula A · B i $(A \cdot B)^t$, on la "t" indica matriu transposada. (4 punts)

(b) és possible calcular B^2? Si ho és, calcula-la. (1 punt)

(c) per als diferents valors de *x*, calcula el rang de la matriu A. (5 punts)

2. En un aquari, l'estudi de l'evolució de la població de peixos s'ha modelat segons la funció $t \to P(t)$,

$$P(t)=\sqrt{t+1}-\sqrt{t}\ ,$$

on la variable *t*, que és un nombre real major o igual que zero, mesura el nombre d'anys transcorreguts des de l'1 de gener de l'any 2000 i *P(t)* indica nombre d'individus, en milers, en l'instant de temps *t*. Segons el model, calcula:

(a) La població que hi havia l'1 de gener de l'any 2000 i la població que hi haurá a la fi de l'any 2020. (1 punt)

(b) La mida de la població (en nombre d'individus) a llarg termini. (3 punts)

(c) L'any en el qual s'arriba a la població mínima i quants individus hi haurá. (4 punts)

(d) Fes un esbós de la gráfica de l'evolució poblacional $t \to P(t)$. (2 punts)

3. Donats els plans

(I) $3x-ay+2z-(a-1)=0$; (II) $2x-5y+3z-1=0$; (III) $x+3y-(a-1)z=0$;

(a) Demostra que, per a qualsevol valor del parámetre *a*, no n'hi ha cap parell que siguin paral·lels. (4 punts)

(b) Estudia la seva posició relativa, segons els diferents valors del parámetre *a*. (6 punts)

4. El pes d'un grup de persones segueix una distribució normal de mitjana 54,3 kg i desviació típica de 6,5 kg.

(a) Quin és el percentatge de persones amb pes superior a 57 kg? (3 punts)

(b) Quin percentatge de persones pesen entre 50 i 57 kg? (4 punts)

(c) Si s'escull una persona a l'atzar que está dins del 70% de les persones que menys pesen, com a máxim, quants quilos hauria de pesar? (3 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0; 1)

SOLUCIONES

OPCIÓ A

1. Donada l'equació matricial

$$M \cdot X + N = P,$$

on X és la matriu incógnita i

$$M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Per a quins valors del parámetre *a* existeix la matriu inversa de M? (1 punt)
(b) Calcula la matriu inversa de M. (3 punts)
(c) Per a a = 2, resol l'equació matricial, si és possible. (3 punts)
(d) Per als valors de *a* per als quals existeix la matriu inversa de M, resol l'equació matricial. (3 punts)

(a)

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & a \\ a & a \end{vmatrix} = -a - a^2 = 0 \Rightarrow -a(1+a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

Para $a \neq 0 \ y \ a \neq -1$ la matriz M tiene inversa.

(b)

$$M^{-1} = \frac{Adj\left(M^t\right)}{|M|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}}{-a - a^2} = \frac{-1}{a + a^2}\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a + a^2}\begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \ siendo \ a \neq 0 \ y \ a \neq -1$$

(c) Para *a = 2* la matriz M y su inversa son $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y

$$M^{-1} = \frac{1}{2+4}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot X + N = P \Rightarrow M \cdot X = P - N \Rightarrow X = M^{-1}(P - N)$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right]$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

(d) Siendo $a \neq 0 \ y \ a \neq -1$

$$X = M^{-1}(P - N) \Rightarrow X = \frac{1}{a + a^2}\begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right]$$

$$X = \frac{1}{a + a^2}\begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{a + a^2}\begin{pmatrix} -2a & -2a \\ 2a & 2a \end{pmatrix} = \frac{1}{a(1+a)}(2a)\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{1+a}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Considera la funciò

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

(a) Determina: el domini, els de creixement i decreixement, les coordenades dels máxims i mínims i el $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. (2 punts)

(b) Fes un esbòs de la gràfica. (1 punt)

(c) Obté els valors de A i B per als quals (3 punts)

$$f(x)=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}$$

(d) Calcula l'área de la regió limitada per la gráfica de la funció, l'eix OX i les rectes d'equacions $x=-2$ i $x=2$. (4 punts)

(a) El dominio de la función son todos los valores reales excepto los que anulan el denominador.

Dominio = $\mathbb{R}-\{-3,3\}$

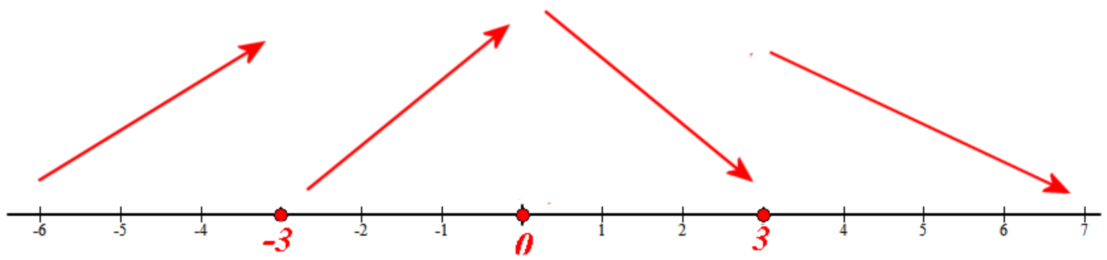
Para estudiar máximos, mínimos y como varía la función utilizamos la derivada.

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{x^2-9}\Rightarrow f'(x)=\frac{-2x}{\left(x^2-9\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-2x}{\left(x^2-9\right)^2}=0\Rightarrow x=0$$

Vemos cómo evoluciona la función antes, entre y después de *x* = *–3*, *x* = *0*, *x* = *3*.

- En $(-\infty,-3)$ tomamos *x* = *–4* y la derivada vale $f'(-4)=\frac{8}{\left((-4)^2-9\right)^2}=\frac{8}{49}>0$. La función crece en $(-\infty,-3)$.
- En $(-3,0)$ tomamos *x* = *–1* y la derivada vale $f'(-1)=\frac{2}{\left((-1)^2-9\right)^2}=\frac{2}{64}>0$. La función crece en $(-3,0)$.
- En $(0,3)$ tomamos *x* = *1* y la derivada vale $f'(1)=\frac{-2}{\left(1^2-9\right)^2}=\frac{-2}{64}<0$. La función decrece en $(0,3)$.
- En $(3,+\infty)$ tomamos *x* = *4* y la derivada vale $f'(4)=\frac{-8}{\left(4^2-9\right)^2}=-\frac{8}{+}<0$. La función decrece en $(3,+\infty)$.



La función crece en $(-\infty,-3)\cup(-3,0)$ y decrece en $(0,3)\cup(3,+\infty)$.

Presenta un máximo relativo en *x = 0*. $f(0)=\dfrac{1}{(0-3)(0+3)}=-\dfrac{1}{9}$.

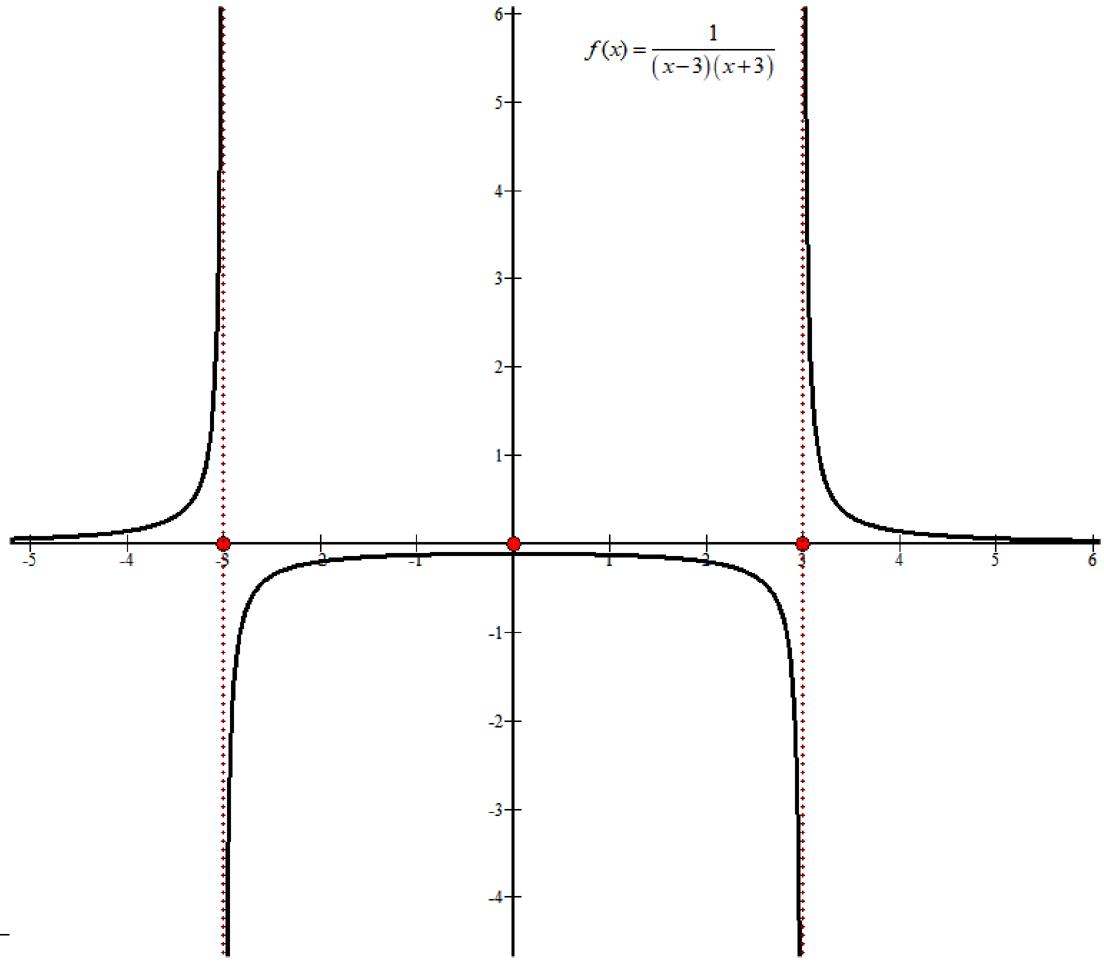
El máximo relativo es el punto $M\left(0,-\dfrac{1}{9}\right)$

No presenta mínimos relativos, pues *x = –3* y *x = 3* no pertenecen al dominio de la función. Y serán posibles asíntotas verticales.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{+\infty}=0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

(b) Añadimos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$y=\dfrac{1}{x^2-9}$
–10	0.01
–4	0.142
–2	–0.2
0	–0.1
2	–0.2
4	0.14



(c)

$$f(x)=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}\Rightarrow\frac{1}{(x-3)(x+3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$1=A(x+3)+B(x-3)$$

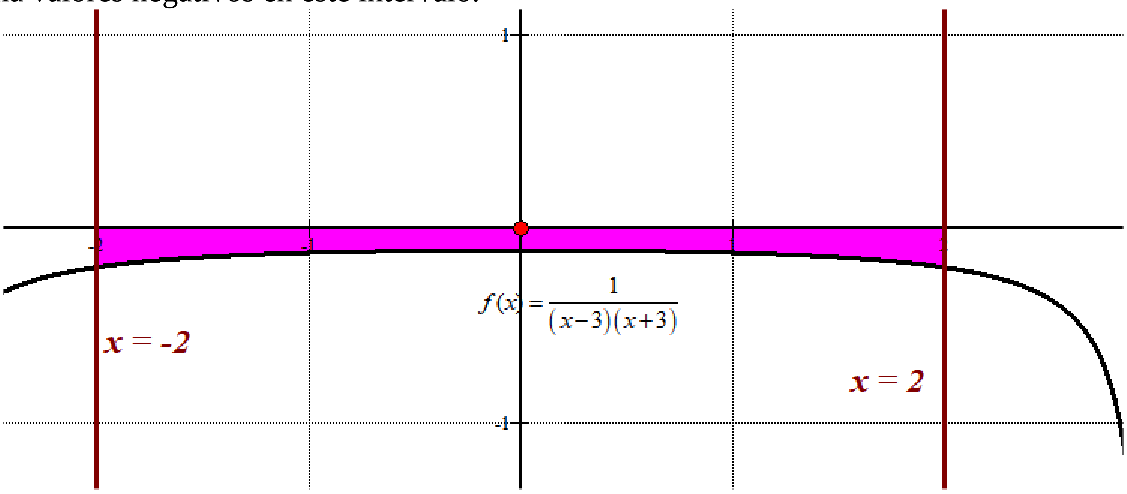
$$x=-3\rightarrow 1=-6B\rightarrow B=-\frac{1}{6}$$

$$x=3\rightarrow 1=6A\rightarrow A=\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)}=\frac{1/6}{x-3}+\frac{-1/6}{x+3}$$

(d)

El área pedida es el valor absoluto de la integral definida entre –2 y 2 de la función, pues toma valores negativos en este intervalo.



El área toma un valor pequeño como se observa en el dibujo superior.

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-2}^{2}\frac{1}{(x-3)(x+3)}dx=\int_{-2}^{2}\frac{1/6}{x-3}+\frac{-1/6}{x+3}dx=\int_{-2}^{2}\frac{1/6}{x-3}dx-\int_{-2}^{2}\frac{1/6}{x+3}dx=$$

$$=\left[\frac{1}{6}\ln|x-3|-\frac{1}{6}\ln|x+3|\right]_{-2}^{2}=\left[\frac{1}{6}\ln|2-3|-\frac{1}{6}\ln|2+3|\right]-\left[\frac{1}{6}\ln|-2-3|-\frac{1}{6}\ln|-2+3|\right]=$$

$$=\left[\frac{1}{6}\ln 1-\frac{1}{6}\ln 5\right]-\left[\frac{1}{6}\ln 5-\frac{1}{6}\ln 1\right]=-\frac{2}{6}\ln 5=-\frac{1}{3}\ln 5$$

El área es el valor absoluto de esta integral definida.

$$Área=\left|\int_{-2}^{2} f(x)dx\right|=\boxed{\frac{1}{3}\ln 5=0.36\,u^2}$$

3. Donades les rectes

$$(I)\begin{cases}15x+12y-14z=-17\\8x-y-5z=23\end{cases}\qquad(II)\begin{cases}9x+5y-2z=5\\24x-2y-13z=67\end{cases}$$

(a) Calcula un vector posició i un vector director de cada una. (4 punts)
(b) Calcula l'equaciò vectorial de cada una. (2 punts)
(c) Calcula el rang de la matriu formada pels dos vectors directors i el vector diferéncia, o vector resta, dels dos vectors posició obtinguts. (2 punts)
(d) De l'anterior rang, dedueix la posició relativa d'ambdues rectes. (2 punts)

(a) Calculamos los vectores directores realizando el producto vectorial de los vectores normales de los planos que definen las rectas.

$$(I)\begin{cases}15x+12y-14z=-17\\8x-y-5z=23\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{v_I}=(15,12,-14)\times(8,-1,-5)=\begin{vmatrix}i&j&k\\15&12&-14\\8&-1&-5\end{vmatrix}=$$

$$=-60i-112j-15k-96k+75j-14i=-74i-37j-111k=(-74,-37,-111)$$

$$\overrightarrow{v_I}=(-74,-37,-111)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Divido las coordenadas entre }-37\\\text{y obtenemos un vector director con}\\\text{coordenadas más manejables.}\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{u_I}=(2,1,3)$$

$$(II)\begin{cases}9x+5y-2z=5\\24x-2y-13z=67\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{v_{II}}=(9,5,-2)\times(24,-2,-13)=\begin{vmatrix}i&j&k\\9&5&-2\\24&-2&-13\end{vmatrix}=$$

$$=-65i-48j-18k-120k+117j-4i=-69i+69j-138k$$

$$\overrightarrow{v_{II}}=(-69,69,-138)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Divido las coordenadas entre }-69\\\text{y obtenemos un vector director con}\\\text{coordenadas más manejables.}\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{u_{II}}=(1,-1,2)$$

Obtenemos un punto de cada recta dando un valor concreto a la incógnita z.

$$(I)\begin{cases}15x+12y-14z=-17\\8x-y-5z=23\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}15x+12y=-17+14z\\8x-y=23+5z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}15x+12y=-17+14z\\96x-12y=276+60z\end{cases}$$

$$\overline{111x\qquad=259+74z}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x=7+2z\Rightarrow\left.\begin{array}{c}x=\dfrac{7+2z}{3}\\\boxed{z=1}\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{x=\frac{9}{3}=3}\Rightarrow 24-y-5=23\Rightarrow 24-23-5=y\Rightarrow\boxed{y=-4}$$

$$(II)\begin{cases}9x+5y-2z=5\\24x-2y-13z=67\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9x+5y=5+2z\\24x-2y=67+13z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}18x+10y=10+4z\\120x-10y=335+65z\end{cases}$$

$$\overline{138x\qquad=345+69z}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x=5+z\Rightarrow\left.\begin{array}{c}x=\dfrac{5+z}{2}\\\boxed{z=-5}\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{x=\frac{0}{3}=0}\Rightarrow 0-2y+65=67\Rightarrow 65-67=2y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2=2y\Rightarrow\boxed{y=-1}$$

Los vectores y los puntos de cada recta son $\overrightarrow{u_I}=(2,1,3)$; $\overrightarrow{u_{II}}=(1,-1,2)$; $P_I(3,-4,1)$; $P_{II}(0,-1,-5)$

(b)

$$(I)\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=-4+\lambda \\ z=1+3\lambda \end{cases} \qquad (II)\begin{cases} x=\alpha \\ y=-1-\alpha \\ z=-5+2\alpha \end{cases}$$

(c)

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{u_I}=(2,1,3) \\ \overrightarrow{u_{II}}=(1,-1,2) \\ \overrightarrow{P_IP_{II}}=(0,-1,-5)-(3,-4,1)=(-3,3,-6) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

¿Esta matriz tiene rango 3?

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{vmatrix}=12-6+9-9+6-12=0$$

No tiene rango 3.

¿Tiene rango 2?

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª →

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2-1=-3\neq 0$.

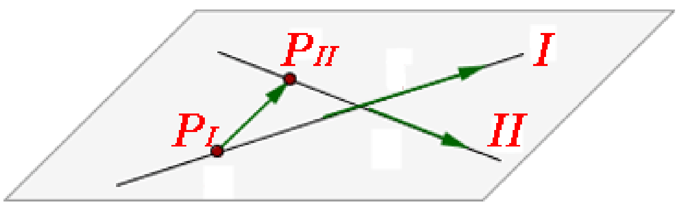
El rango de la matriz es 2.

(d) Al ser 2 el rango de la matriz de los vectores directores de las rectas y el del vector que une un punto de una recta con un punto de la otra se deduce que las rectas están en un mismo plano.

Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales:

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{u_I}=(2,1,3) \\ \overrightarrow{u_{II}}=(1,-1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{1}\neq\frac{1}{-1}\neq\frac{3}{2}$$

por lo que no son paralelas y entonces deben cortarse en un punto. Las rectas son secantes.



4. Tenim tres urnes, la primera conté 2 bolles blaves; la segona, 1 bolla blava i 1 de vermella; la tercera, 2 bolles vermelles. Fem l'experiment aleatori

"Triam una urna a l'atzar i extraiem una bolla"

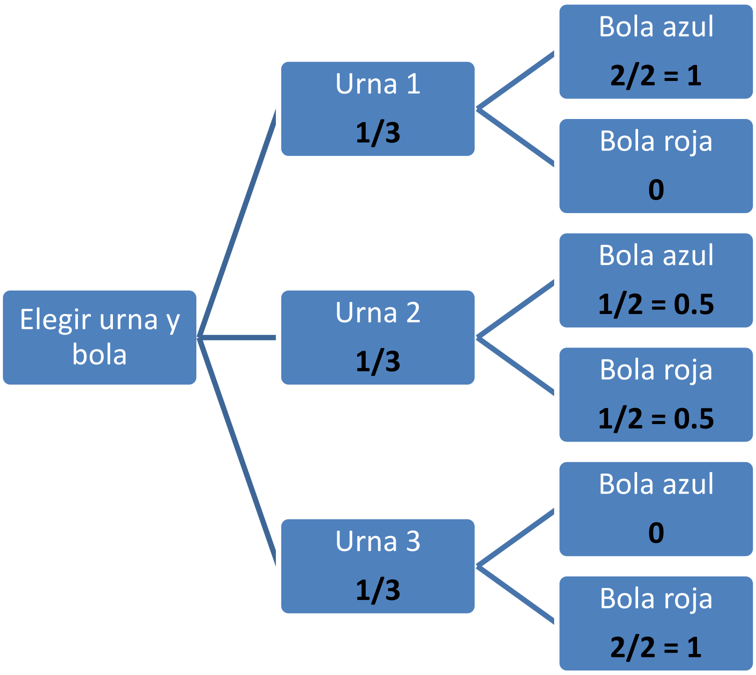
Suposa que totes les urnes tenen la mateixa probabilitat de ser escollides.

(a) Calcula la probabilitat del succés R = "bolla extreta vermella" (5 punts).

(b) Si la bolla extreta resulta que és vermella, quina és la probabilitat que l'urna escollida hagi estat la tercera? (5 punts).

Si tenemos la misma probabilidad de elegir a cualquiera de las urnas, la probabilidad de elegir la urna es 1/3.

Realizamos un diagrama de árbol.



(a) Este suceso se cumple en tres ramas del árbol con las probabilidades que ahora sumamos.

$$P(R) = P(\text{Elegir urna 1})P(\text{Sacar bola roja / Elegir urna 1}) +$$
$$+P(\text{Elegir urna 2})P(\text{Sacar bola roja / Elegir urna 2}) +$$
$$+P(\text{Elegir urna 3})P(\text{Sacar bola roja / Elegir urna 3}) =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 0.5 + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1.5}{3} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

(b) Es una probabilidad a posteriori, utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Haber elegido urna 3ª / Hemos sacado bola roja}) =$$
$$= \frac{P(\text{Haber elegido urna 3ª } \cap \text{ Hemos sacado bola roja})}{P(\text{Sacar bola roja})} =$$
$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{0.5} = \boxed{\frac{2}{3} = 0.66}$$

OPCIÓ B

1. Donades les matrius A i B,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & x\\ 4 & 6 & 8\\ 6 & 9 & 12\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

(a) calcula A · B i $(A\cdot B)^t$, on la “t” indica matriu transposada. (4 punts)
(b) és possible calcular B^2? Si ho és, calcula-la. (1 punt)
(c) per als diferents valors de *x*, calcula el rang de la matriu A. (5 punts)

(a)

$$AB=\begin{pmatrix}2 & 3 & x\\ 4 & 6 & 8\\ 6 & 9 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0+x & 4+3+0\\ 4+0+8 & 8+6+0\\ 6+0+12 & 12+9+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+x & 7\\ 12 & 14\\ 18 & 21\end{pmatrix}$$

$$(AB)^t=\begin{pmatrix}2+x & 12 & 18\\ 7 & 14 & 21\end{pmatrix}$$

(b)

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=¿\text{Es posible}?$$

$$\xrightarrow{3\times\boxed{2\quad\cdot\quad 3}\times 2}\text{¡No es posible!}$$

Para que una matriz se pueda multiplicar por ella misma debe de tener el mismo número de filas que de columnas (debe ser cuadrada).

(c) La matriz A es de dimensión 3x3. Su rango es 3 o menor.

Calculamos su determinante y vemos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 3 & x\\ 4 & 6 & 8\\ 6 & 9 & 12\end{vmatrix}=144+144+36x-36x-144-144=0$$

El determinante siempre es 0 y el rango de A nunca es 3, independientemente del valor de “*x*”.

¿El rango de A es 2?

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª (es proporcional a la 2ª) y columna 1ª (es proporcional a la 2ª) $\rightarrow \begin{pmatrix}3 & x\\ 6 & 8\end{pmatrix}$ con determinante

$$\begin{vmatrix}3 & x\\ 6 & 8\end{vmatrix}=24-6x=0\Rightarrow x=4.$$

Este menor tiene determinante nulo cuando $x = 4$.
Cuando $x = 4$ el rango de A es 1.
Cuando $x\neq 4$ el determinante del menor anterior es no nulo y el rango de A es 2.

2. En un aquari, l'estudi de l'evolució de la població de peixos s'ha modelat segons la funció $t \to P(t)$,

$$P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t} \ ,$$

on la variable *t*, que és un nombre real major o igual que zero, mesura el nombre d'anys transcorreguts des de l'1 de gener de l'any 2000 i *P(t)* indica nombre d'individus, en milers, en l'instant de temps *t*. Segons el model, calcula:

(a) La població que hi havia l'1 de gener de l'any 2000 i la població que hi haurá a la fi de l'any 2020. (1 punt)

(b) La mida de la població (en nombre d'individus) a llarg termini. (3 punts)

(c) L'any en el qual s'arriba a la població mínima i quants individus hi haurá. (4 punts)

(d) Fes un esbós de la gráfica de l'evolució poblacional *t* → *P(t).* (2 punts)

(a) Nos piden el valor de *P(0)* y el valor de *P(20).*

$P(0) = \sqrt{0+1} - \sqrt{0} = 1$. Significa que había 1000 peces al inicio del año 2000.

$P(20) = \sqrt{20+1} - \sqrt{20} = 0{,}1104$. Significa que había 110 peces a final del año 2020.

(b) A largo plazo es determinar el límite de la función *P(t)* cuando *t* se acerca a +∞.

$\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \sqrt{t+1} - \sqrt{t} = \infty - \infty =$ Indeterminación=

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{t+1}-\sqrt{t}\right)\left(\sqrt{t+1}+\sqrt{t}\right)}{\left(\sqrt{t+1}+\sqrt{t}\right)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{t+1}\right)^2 - \left(\sqrt{t}\right)^2}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t+1-t}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t}} = \frac{1}{+\infty+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La población de peces tiende a ser cero. Tiende a desaparecer.

(c) Utilizamos la derivada.

$$P'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t}-\sqrt{t+1}}{2\sqrt{t}\sqrt{t+1}} = \frac{\sqrt{t}-\sqrt{t+1}}{2\sqrt{t^2+t}}$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{t}-\sqrt{t+1}}{2\sqrt{t^2+t}} = 0 \Rightarrow \sqrt{t} - \sqrt{t+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{t} = \sqrt{t+1} \Rightarrow \left(\sqrt{t}\right)^2 = \left(\sqrt{t+1}\right)^2 \Rightarrow t = t+1 \Rightarrow 0 = 1 \text{ No es posible.}$$

No hay ningún punto crítico y por tanto no hay máximo ni mínimo relativo de la función.

Vemos el signo de la derivada en un punto cualquiera y la derivada tendrá el mismo signo en cualquier otro punto. t = 9 → $P'(9) = \dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{9+1}}{2\sqrt{9^2+9}} = -0.08 < 0$.

Esta función siempre es decreciente, empezando con 1000 peces y decreciendo su número hasta acabar en 0 peces.

(d) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

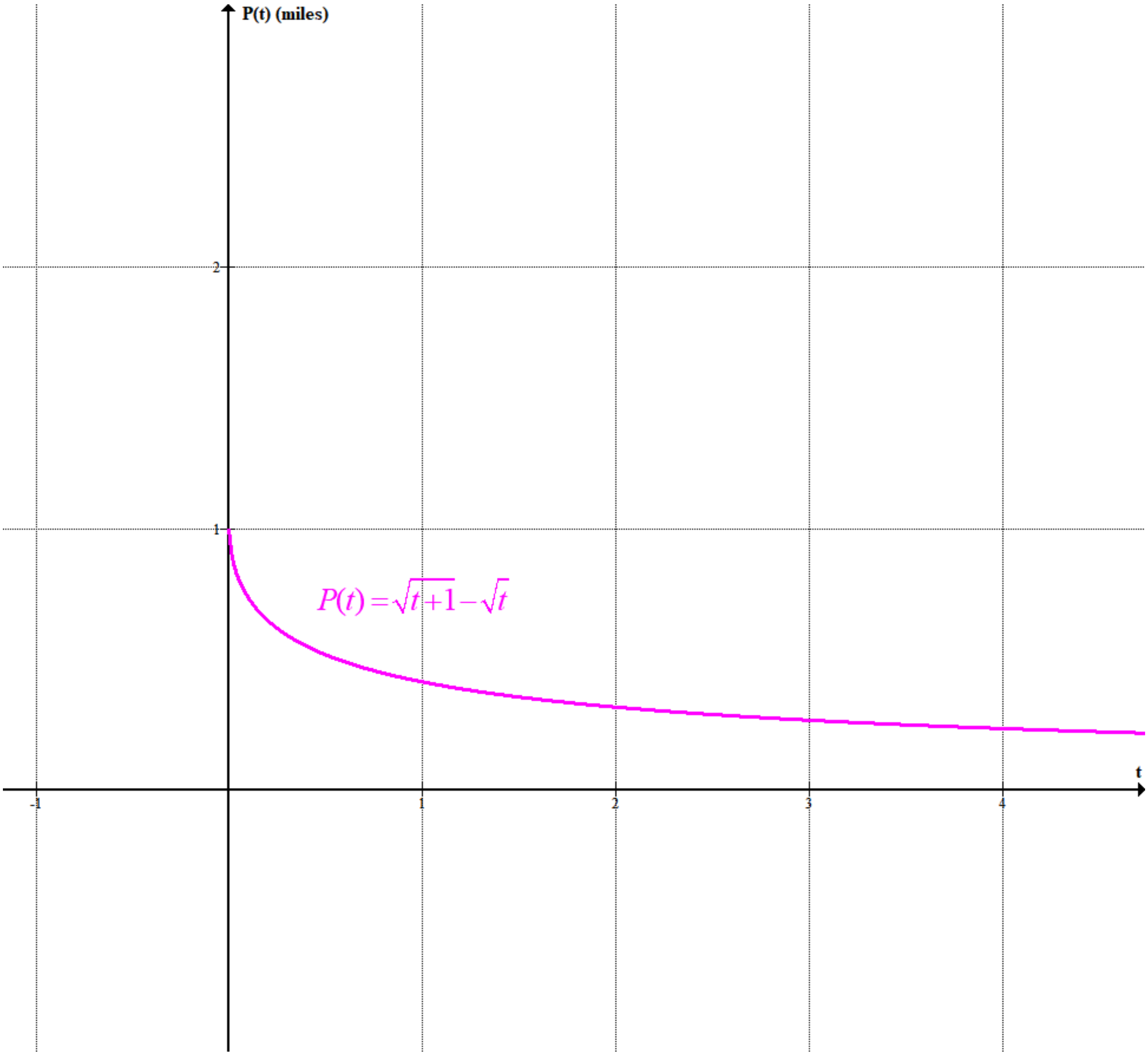
Dominio = $[0, +\infty)$

$\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = 0$

No tiene máximos ni mínimos relativos.

La función siempre decrece.

t	$P(t)=\sqrt{t+1}-\sqrt{t}$
0	1
1	$\sqrt{2}-1=0.414$
3	$2-\sqrt{3}=0.268$
8	$3-\sqrt{8}=0.171$
99	$10-\sqrt{99}=0.05$



3. Donats els plans
(I) $3x-ay+2z-(a-1)=0$; (II) $2x-5y+3z-1=0$; (III) $x+3y-(a-1)z=0$;
(a) Demostra que, per a qualsevol valor del parámetre *a*, no n'hi ha cap parell que siguin paral·lels. (4 punts)
(b) Estudia la seva posició relativa, segons els diferents valors del parámetre *a*. (6 punts)

(a) Para que sean paralelos deben tener los vectores normales con coordenadas proporcionales y por tanto, tener la misma dirección.

$$\left.\begin{array}{l} (I)\equiv 3x-ay+2z-(a-1)=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_I}=(3,-a,2) \\ (II)\equiv 2x-5y+3z-1=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_{II}}=(2,-5,3) \\ (III)\equiv x+3y-(a-1)z=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_{III}}=(1,3,-a+1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$¿\mathrm{I}//\mathrm{II}? \Rightarrow ¿\frac{3}{2}=\frac{-a}{-5}=\frac{2}{3}? \to ¿\frac{3}{2}=\frac{2}{3}? \Rightarrow ¡\text{Imposible!}$$

$$¿\mathrm{II}//\mathrm{III}? \Rightarrow \frac{2}{1}\neq\frac{-5}{3}=\frac{3}{-a+1} \Rightarrow ¡\text{Imposible!}$$

$$¿\mathrm{I}//\mathrm{III}? \Rightarrow ¿\frac{3}{1}=\frac{-a}{3}=\frac{3}{-a+1}? \to \left\{\begin{array}{l} \frac{3}{1}=\frac{-a}{3} \to 9=-a \\ \frac{3}{1}=\frac{3}{-a+1} \to -3a+3=3 \to a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow ¡\text{Imposible!}$$

Los planos nunca pueden ser paralelos entre si, pues plano (I) no es paralelo a (II), el plano (II) nunca es paralelo a (III) y tampoco es paralelo el (I) con el (III)..

(b) Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

$$\left.\begin{array}{l} 3x-ay+2z-(a-1)=0 \\ 2x-5y+3z-1=0 \\ x+3y-(a-1)z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x-ay+2z=a-1 \\ 2x-5y+3z=1 \\ x+3y-(a-1)z=0 \end{array}\right\}$$

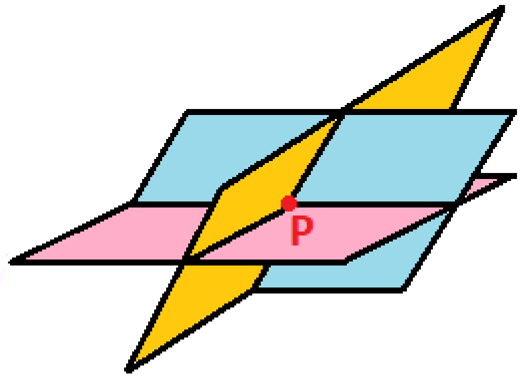
$$A=\begin{pmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -a+1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -a+1 \end{vmatrix}=15a-15-3a+12+10-2a^2+2a-27=-2a^2+14a-20$$

$$|A|=0 \Rightarrow -2a^2+14a-20=0 \Rightarrow a^2-7a+10=0 \Rightarrow a=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\pm 3}{2}=\left\{\begin{array}{l} \frac{7+3}{2}=5=a \\ \frac{7-3}{2}=2=a \end{array}\right.$$

Primer caso. $a\neq 2$ *y* $a\neq 5$.

En este caso el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y el rango es 3, al igual que el rango de la ampliada y el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado. Tiene una solución única. Esta solución única son las coordenadas de un punto *P* donde coinciden los tres planos.



Segundo caso. $a=2$.

En esta situación el determinante es nulo y el rango de A no es 3.

¿El rango de A es 2?

$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ 2 & -5 & 3\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$ Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª

→ $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -5\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -5\end{vmatrix}=-15+4=-11\neq 0$.

El rango de A es 2.

$A/B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2 & 1\\ 2 & -5 & 3 & 1\\ 1 & 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$ ¿Tiene rango 3?

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª → $\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ -5 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$ con

determinante $\begin{vmatrix}-2 & 2 & 1\\ -5 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{vmatrix}=0+6+5-9-0-2=0$.

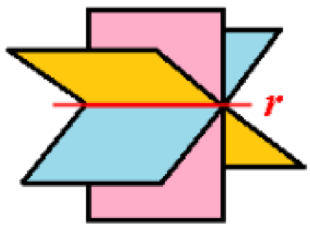
El rango de A/B no es 3, por lo que es igual al rango de A, que es 2.

Rango de A = 2 = Rango de A/B < 3 = número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones. Estas soluciones son la recta en la que coinciden los tres planos.

$$\left.\begin{matrix}3x-2y+2z=1\\ 2x-5y+3z=1\\ x+3y-z=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Ecuación 2ª + Ecuación 3ª = Ecuación 1ª}\\ \text{Quitamos la ecuación 1ª}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2x-5y+3z=1\\ x+3y-z=0\end{matrix}\right\}$$

Coinciden en la recta de ecuación $r:\left.\begin{matrix}2x-5y+3z=1\\ x+3y-z=0\end{matrix}\right\}$



Tercer caso. $a=5$.
En esta situación el determinante es nulo y el rango de A no es 3.
¿El rango de A es 2?

$A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\ 2 & -5 & 3\\ 1 & 3 & -4\end{pmatrix}$ Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª

→ $\begin{pmatrix}3 & -5\\ 2 & -5\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}3 & -5\\ 2 & -5\end{vmatrix}=-15+10=-5\neq 0$.

El rango de A es 2.

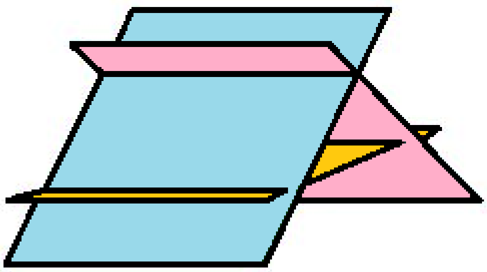
$A/B=\begin{pmatrix}3 & -5 & 2 & 4\\ 2 & -5 & 3 & 1\\ 1 & 3 & -4 & 0\end{pmatrix}$ ¿Tiene rango 3?

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª → $\begin{pmatrix}-5 & 2 & 4\\ -5 & 3 & 1\\ 3 & -4 & 0\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}-5 & 2 & 4\\ -5 & 3 & 1\\ 3 & -4 & 0\end{vmatrix}=0+6+80-36-0-20=30\neq 0$.

El rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 ≠ 3 = Rango de A/B.

El sistema es incompatible. No tiene solución. Como entre ellos dos a dos no son paralelos la situación debe ser la del dibujo, definen rectas paralelas dos a dos.

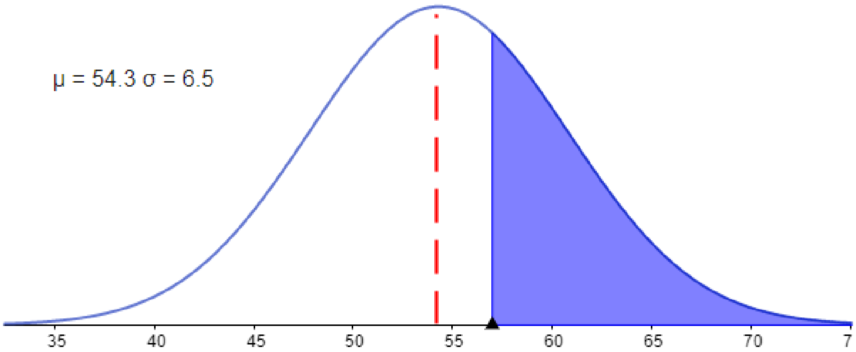


4. El pes d'un grup de persones segueix una distribució normal de mitjana 54,3 kg i desviació típica de 6,5 kg.
(a) Quin és el percentatge de persones amb pes superior a 57 kg? (3 punts)
(b) Quin percentatge de persones pesen entre 50 i 57 kg? (4 punts)
(c) Si s'escull una persona a l'atzar que está dins del 70% de les persones que menys pesen, com a máxim, quants quilos hauria de pesar? (3 punts)

X = Peso de una persona en kg.
X = N(54.3, 6.5)

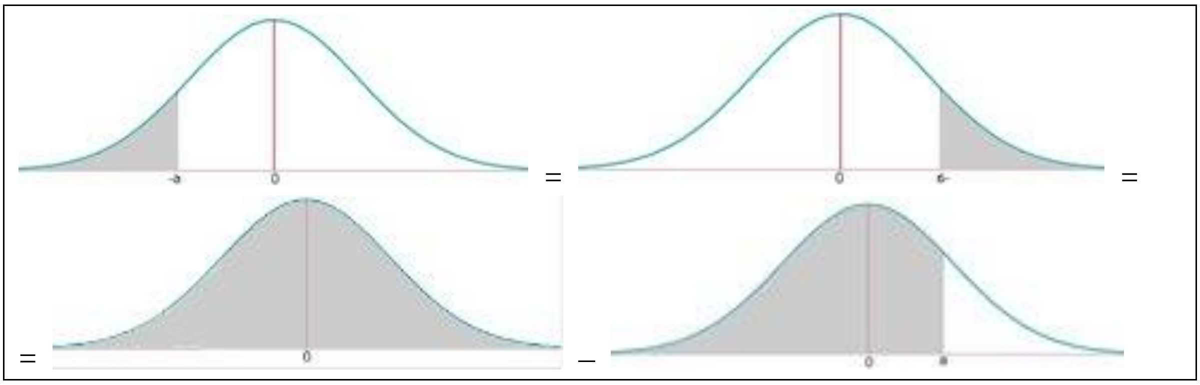
(a)

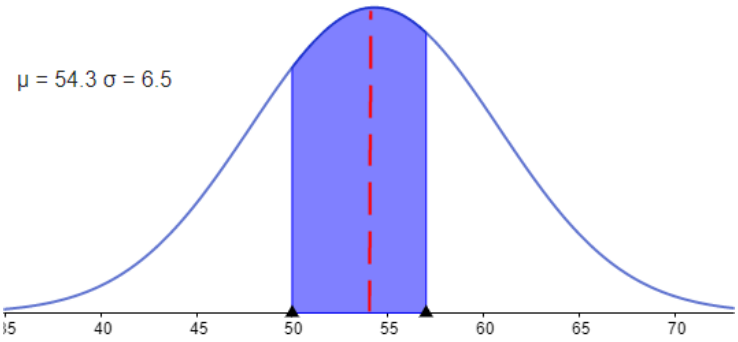
$$P(X>57)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{57-54.3}{6.5}\right)=P(Z>0.415)=$$
$$=1-P(Z\leq 0.415)=\{\text{Buscamos en la tabla N(0,1)}\}=$$
$$=1-\frac{0.6591+0.6628}{2}=1-0.66095=\boxed{0.33905}$$



(b)

$$P(50<X<57)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{50-54.3}{6.5}<Z<\frac{57-54.3}{6.5}\right)=P(-0.66<Z<0.415)=$$
$$=P(Z\leq 0.415)-P(Z\leq -0.66)=P(Z\leq 0.415)-P(Z\geq 0.66)=P(Z\leq 0.415)-(1-P(Z\leq 0.66))=$$
$$=0.66095-1+0.7454=\boxed{0.40635}$$





(c) Averiguamos el peso "a" tal que $P(X \leq a) = 0.7$

$$P(X \leq a) = 0.7$$

$$P(X \leq a) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \leq \frac{a-54.3}{6.5}\right) = 0.7$$

Buscamos en la tabla esta probabilidad 0.7

$$\frac{0.52+0.53}{2} = \frac{a-54.3}{6.5} \Rightarrow 0.525 \cdot 6.5 = a - 54.3 \Rightarrow \boxed{a = 57.7125}$$

Debe pesar como mucho 57.7 kilos.