Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques II 2020

Model 2

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les dues opcions, A i B, proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritza l'ùs de les que puguin emmagatzemar o transmetre informació.

OPCIÓ A

1. Donat el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} x+y=1, \\ ax+z=0, \\ x+(1+a)y+az=a+1, \end{cases}$$

determina el paràmetre *a*, i resol sempre que es pugui, de manera que el sistema:

(a) tengui soluciò ùnica, (4 punts)

(b) tengui infinites solucions, (4 punts)

(c) no tengui soluciò. (2 punts)

2. Considera la funciò $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ donada per

$$y=f(x)=x^3-3x$$

(a) Calcula l'equaciò de la recta tangent a la gràfica de la funciò al punt d'abscissa $x=-1$. (2 punts)

(b) Fes un esbòs de la gràfica de $y = f(x)$ i calcula: els punts de tall amb els eixos, els extrems relatius i el comportament de la funciò a l'infinit. (4 punts)

(c) Calcula l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funciò donada i la recta y = 2. (4 punts)

3. Considera el punt $P=(2,-1,1)$ i la recta r donada per

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y+4z-1=0 \\ x+2y-3z-2=0 \end{aligned}\right\}(r)$$

(a) Calcula l'expressiò de l'equaciò contínua de la recta *r*. (2 punts)

(b) Calcula l'equaciò del pla, π, perpendicular a la recta *r* que passa pel punt P. (2 punts)

(c) Calcula el punt, Q, d'intersecciò del pla π amb la recta *r*. (3 punts)

(d) De totes les rectes que passen pel punt $P=(2,-1,1)$, calcula aquella que talla perpendicularment a la recta *r*. (3 punts)

4. El nombre d'hores de vida d'un cert bacteri (tipus A) es distribueix segons una normal de mitjana 110 hores i desviaciò típica de 0,75 hores. Calcula la probabilitat que, escollint a l'atzar un bacteri:

(a) el seu nombre d'hores de vida sobrepassi les 112,25 hores. (4 punts)

(b) el seu nombre d'hores de vida sigui inferior a 109,25 hores. (4 punts)

D'un altre bacteri (tipus B) se sap que el nombre d'hores de vida es distribueix segons una normal de mitjana 110 hores, però es desconeix la seva desviaciò típica. Experimentalment s'ha comprovat que la probabilitat que un bacteri tipus B visqui més de 125 hores és 0,1587.
Calcula la desviaciò típica de la distribuciò del nombre d'hores de vida dels bacteris tipus B.
(2 punts)

Model 2

OPCIÓ B

1. Una empresa té tres mines: A, B i C, i en cada una, el mineral extret conté els elements químics: níquel (Ni), coure (Cu) i ferro (Fe), en diferent concentraciò. Les concentracions sòn:
   - Mina A: Ni (1%), Cu (2%), Fe (3%),
   - Mina B: Ni (2%), Cu (5%), Fe (7%),
   - Mina C: Ni (1%), Cu (3%), Fe (1%).

   Per obtenir 7 tones de níquel, 18 de coure i 16 de ferro en total, quantes tones de mineral s'han d'extreure de cada mina?
   (a) Planteja un sistema d'equacions que interpreti l'enunciat. (4 punts)
   (b) Classifica el sistema. (2 punts)
   (c) Resol el sistema. (4 punts)

2. Considera la funciò $f(x)=\dfrac{3}{x^2-x}$.
   (a) Calcula el seu domini i els intervals de creixement i decreixement. (3 punts)
   (b) Calcula una primitiva qualsevol de *f(x)*. (4 punts)
   (c) Calcula l'àrea delimitada per la gràfica de la funciò $y = f(x)$, l'eix *OX* i les rectes $x=2$ i $x=3$
   (3 punts)

3. Donada la recta *r* i el pla π

$$(r)\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{-1}, \qquad (\pi)\quad 3x-my+z=1,$$

   es demana si existeix algun valor del paràmetre *m* per al qual
   (a) el pla i la recta sòn paral·lels. (4 punts)
   (b) o bé, el pla conté la recta. (3 punts)
   (c) o bé, el pla i la recta es tallen exactament en un punt. (3 punts)
   En cada cas, si existeix, cacula'l.

4. Una empresa de fabricaciò d'impressores té dos centres de producciò, la fàbrica europea (E) i la fàbrica asiàtica (A). L'1 % de les impressores de la fàbrica E i el 3% de les impressores de la fàbrica A es produeixen amb un defecte. El mercat d'un determinat país s'abasteix d'impressores procedents de la fàbrica E en un 80%, mentre que la resta prové de la fàbrica A.

   (a) Quina és la probabilitat que una impressora d'aquest país tingui el defecte? (4 punts)

   (b) Si el país té, aproximadament, dos milions d'impressores fabricades per aquesta empresa, quantes tindran el defecte? (2 punts)

   (c) Si s'escull a l'atzar una impressora d'aquest país i resulta ser una impressora defectuosa, quina és la probabilitat que provingui de la fàbrica E? (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0; 1)

SOLUCIONES

OPCIÓ A

1. Donat el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} x+y=1, \\ ax+z=0, \\ x+(1+a)y+az=a+1, \end{cases}$$

determina el paràmetre *a*, i resol sempre que es pugui, de manera que el sistema:
(a) tengui soluciò ùnica, (4 punts)
(b) tengui infinites solucions, (4 punts)
(c) no tengui soluciò. (2 punts)

Discutimos el sistema y luego respondemos a lo planteado en cada apartado.

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}=1-a^2-1-a=-a^2-a$$

Vemos cuando se anula.

$$|A|=0 \Rightarrow -a^2-a=0 \Rightarrow -a(a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a+1=0 \Rightarrow a=-1 \end{cases}$$

Se nos plantean tres situaciones distintas.

CASO 1. $a \neq 0 \ y \ a \neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas.
El sistema es **compatible determinado**.

CASO 2. $a=0$.

El determinante de A es 0 y su rango no es 3. Pero no lo vamos a discutir por rangos, dado que al sustituir el valor de *a = 0* el sistema es muy sencillo de resolver.

El sistema queda:

$$\begin{cases} x+y=1, \\ z=0, \\ x+y=1, \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Ecuación 1ª = Ecuación 3ª} \\ \text{Quito ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1, \\ z=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ z=0, \end{cases}$$

El sistema es **compatible indeterminado**.

Sus soluciones son $\boxed{x=1-t; \quad y=t; \quad z=0 \qquad t \in \mathbb{R}}$

CASO 3. $a=-1$.

El sistema queda con unas ecuaciones muy sencillas de resolver. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x+y=1, \\ -x+z=0, \\ x-z=0, \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Ecuación 2ª = } - \text{ Ecuación 3ª} \\ \text{Quitamos ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1, \\ -x+z=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-x \\ z=x \end{cases}$$

El sistema es **compatible indeterminado**.

Las soluciones son $\boxed{x = t; \quad y = 1 - t; \quad z = t \qquad t \in \mathbb{R}}$

(a) Para $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el sistema tiene solución única. Lo resolvemos por Cramer.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix} = 1 - a^2 - 1 - a = -a^2 - a \qquad A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & a & a+1 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a+1 & 1+a & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}} = \frac{0}{-a^2 - a} = 0 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}} = \frac{-a^2 - a}{-a^2 - a} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}} = \frac{0}{-a^2 - a} = 0$$

La solución es $\boxed{x = 0; \quad y = 1; \quad z = 0}$

(b) Para $a = 0$ y $a = -1$ el sistema tiene infinitas soluciones. Resuelto en la discusión del sistema.

Las soluciones para $a = 0$ son $\boxed{x = 1 - t; \quad y = t; \quad z = 0 \qquad t \in \mathbb{R}}$.

Para $a = -1$ las soluciones son $\boxed{x = t; \quad y = 1 - t; \quad z = t \qquad t \in \mathbb{R}}$.

(c) Para ningún valor de a el sistema es sin solución.

2. Considera la funciò $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ donada per

$$y = f(x) = x^3 - 3x$$

(a) Calcula l'equaciò de la recta tangent a la gràfica de la funciò al punt d'abscissa $x=-1$. (2 punts)

(b) Fes un esbòs de la gràfica de *y = f(x)* i calcula: els punts de tall amb els eixos, els extrems relatius i el comportament de la funciò a l'infinit. (4 punts)

(c) Calcula l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funciò donada i la recta y = 2. (4 punts)

(a) Calculamos el valor de la función y la derivada de la función en $x=-1$ y sustituimos en la fórmula de la ecuación de la recta tangente en $x=a$ → $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1+3 = 2 \\ f'(x) = 3x^2 - 3 \to f'(-1) = 3(-1)^2 - 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y - f(-1) = f'(-1)\left(x-(-1)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 2 = 0(x+1) \Rightarrow \boxed{y=2}$$

(b) Puntos de corte con los ejes.

$$x=0 \Rightarrow y = f(0) = 0^3 - 0 = 0$$

Un punto de corte es O(0, 0).

$$y=0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x\left(x^2-3\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

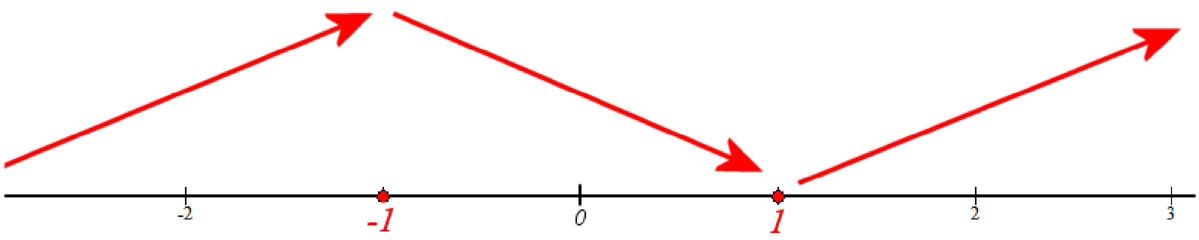
Otros dos puntos de corte con los ejes son $P\left(-\sqrt{3},0\right)$ y $Q\left(\sqrt{3},0\right)$

Extremos relativos.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

- En $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale $f'(-2) = 12-3 = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty,-1)$.
- En $(-1,+1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0) = -3 < 0$. La función decrece en $(-1,+1)$
- En $(1,+\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2) = 12-3 = 9 > 0$. La función crece en $(1,+\infty)$.



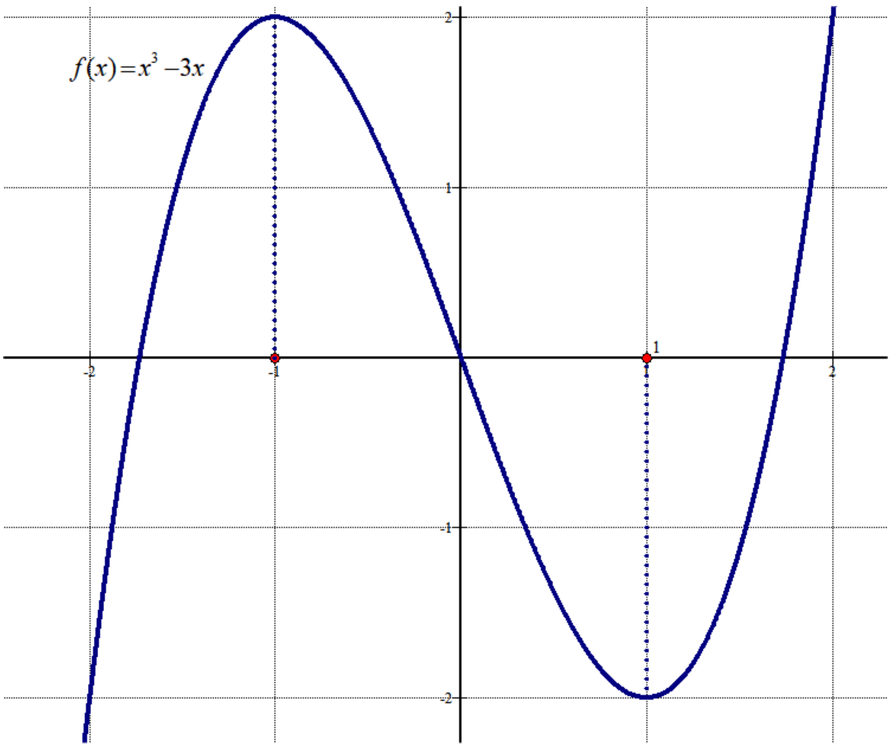
La función presenta un máximo en $x=-1$ y un mínimo en $x=1$.

Comportamiento en el infinito.

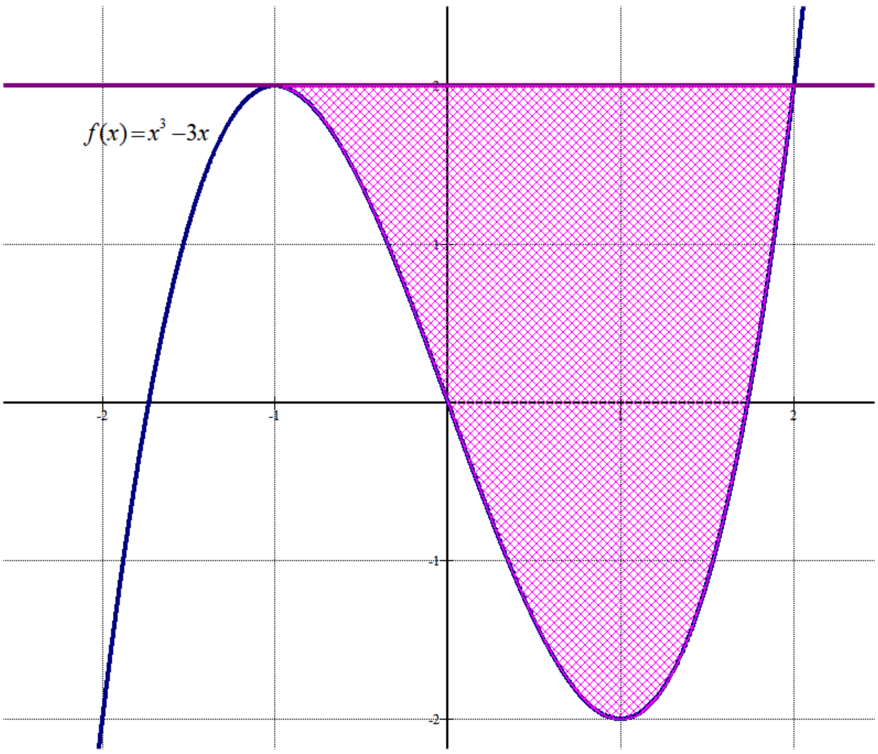
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 - 3x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 - 3x = -\infty$$

Añadimos una tabla de valores.

x	$y = f(x) = x^3 - 3x$
$-\sqrt{3}$	0
-1	2 *máximo*
0	0
1	-2 *mínimo*
$\sqrt{3}$	0



(c) Si al dibujo de la gráfica le añadimos el de la recta horizontal y = 2 determinamos el recinto del cual nos piden calcular su área.



Aunque en la gráfica se observa que se cortan en *x = –1* y en *x = 2* hallamos los puntos de corte de ambas funciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) = x^3 - 3x \\ y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 - 3x = 2 \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array} \to \boxed{x=-1} \text{ es raíz}$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} = \boxed{2 = x} \text{ es raíz} \\ \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Contando los cuadrados rayados del dibujo el área tiene un valor entre 6 y 7 u^2.
Hallamos su valor exacto con el uso de la integral definida entre –1 y 2 de *y = 2* menos $y = f(x) = x^3 - 3x$.

$$Área = \int_{-1}^{2} 2 - \left(x^3 - 3x\right) dx = \left[2x - \frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left[4 - \frac{16}{4} + 3\frac{4}{2}\right] - \left[2(-1) - \frac{(-1)^4}{4} + 3\frac{(-1)^2}{2}\right] =$$

$$= 4 - 4 + 6 + 2 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{27}{4} = \boxed{6.75\, u^2}$$

3. Considera el punt $P=(2,-1,1)$ i la recta r donada per

$$\left.\begin{array}{l}2x-3y+4z-1=0\\ x+2y-3z-2=0\end{array}\right\}(r)$$

(a) Calcula l'expressiò de l'equaciò contínua de la recta *r*. (2 punts)
(b) Calcula l'equaciò del pla, π, perpendicular a la recta *r* que passa pel punt P. (2 punts)
(c) Calcula el punt, Q, d'intersecciò del pla π amb la recta *r*. (3 punts)
(d) De totes les rectes que passen pel punt $P=(2,-1,1)$, calcula aquella que talla perpendicularment a la recta *r*. (3 punts)

(a) Hallamos el vector director de la recta *r* como el producto vectorial de los vectores normales de cada plano que define la recta.

$$r\equiv\left.\begin{array}{l}2x-3y+4z-1=0\\ x+2y-3z-2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\vec{n}=(2,-3,4)\\ \vec{n'}=(1,2,-3)\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{v_r}=\vec{n}\times\vec{n'}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 2 & -3 & 4\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=9i+4j+4k+3k+6j-8i=i+10j+7k=(1,10,7)$$

Hallamos un punto de la recta, resolviendo el sistema.

$$\left.\begin{array}{l}2x-3y+4z-1=0\\ x+2y-3z-2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2x-3y+4z-1=0\\ x=-2y+3z+2\end{array}\right\}\Rightarrow 2(-2y+3z+2)-3y+4z-1=0\Rightarrow$$

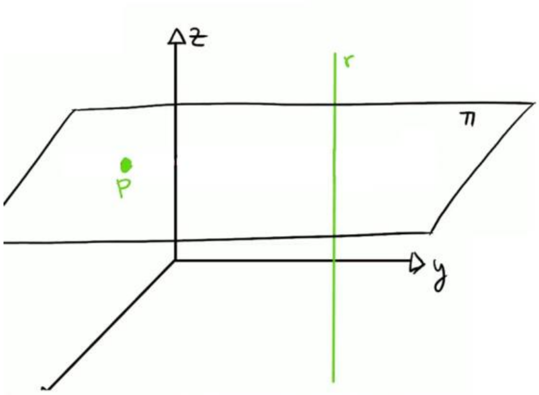
$$\Rightarrow -4y+6z+4-3y+4z-1=0\Rightarrow -7y+10z+3=0\Rightarrow\boxed{z=\frac{-3+7y}{10}}$$

Tomamos $\boxed{y=-1}\Rightarrow\boxed{z=\frac{-3-7}{10}=-1}\Rightarrow\boxed{x=2-3+2=1}$ $\boxed{P_r(1,-1,-1)}$

$$r\equiv\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=(1,10,7)\\ P_r(1,-1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{10}=\frac{z+1}{7}}$$

(b) Si el plano π es perpendicular a la recta *r* entonces el vector normal del plano es el director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\vec{v_r}=(1,10,7)\\ P=(2,-1,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow$$



$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi\equiv x+10y+7z+D=0\\ P=(2,-1,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2-10+7+D=0\Rightarrow D=1$$

$$\boxed{\pi\equiv x+10y+7z+1=0}$$

(c) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv x+10y+7z+1=0 \\ \left.\begin{array}{l}2x-3y+4z-1=0 \\ x+2y-3z-2=0\end{array}\right\}(r)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+10y+7z=-1 \\ 2x-3y+4z=1 \\ x+2y-3z=2\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrr} x & +2y & -3z & =2 \\ -x & -10y & -7z & =1 \\ \hline & -8y & -10z & =3\end{array}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 2ª} - 2\cdot\text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrr} 2x & -3y & +4z & =1 \\ -2x & -20y & -14z & =2 \\ \hline & -23y & -10z & =3\end{array}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x+10y+7z=-1 \\ -23y-10z=3 \\ -8y-10z=3\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrrr} -8y & -10z & = & 3 \\ 23y & +10z & = & -3 \\ \hline 15y & & = & 0\end{array}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x+10y+7z=-1 \\ -23y-10z=3 \\ 15y \quad =0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x+10y+7z=-1 \\ -23y-10z=3 \\ \boxed{y=0}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

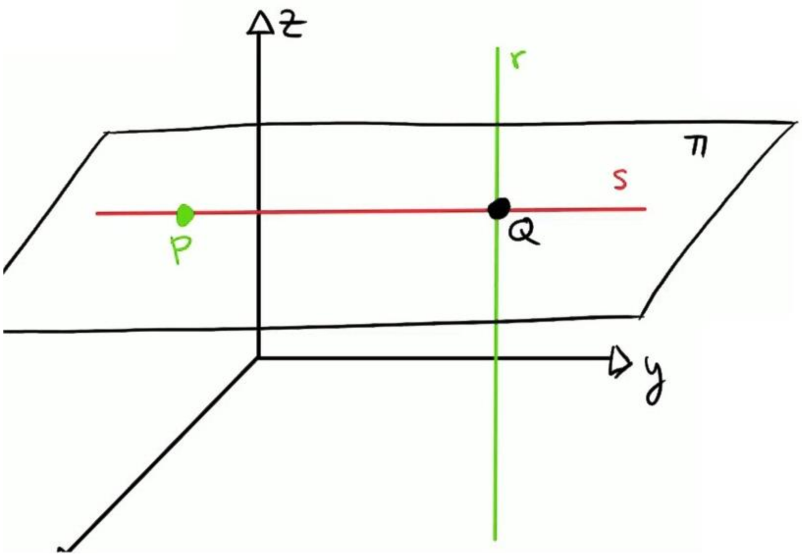
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r}x+7z=-1 \\ -10z=3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x+7z=-1 \\ \boxed{z=\dfrac{3}{-10}}\end{array}\right\} \Rightarrow x-\frac{21}{10}=-1 \Rightarrow \boxed{x=-1+\frac{21}{10}=\frac{11}{10}}$$

El punto de corte tiene coordenadas $Q\left(\frac{11}{10},0,\frac{-3}{10}\right)$

(d) La recta s perpendicular a r está contenida en el plano π. Por lo que la recta s pasa por Q punto de corte de recta y plano. Así la ecuación de la recta pedida es la ecuación de la recta que pasa por P y Q.

$$\left.\begin{array}{l}Q\left(\frac{11}{10},0,\frac{-3}{10}\right) \\ P(2,-1,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\vec{v}=\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{11}{10},0,\frac{-3}{10}\right)-(2,-1,1)=\left(\frac{-9}{10},1,\frac{-13}{10}\right) \\ P(2,-1,1)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\vec{u}=10\vec{v}=(-9,10,-13) \\ P(2,-1,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s \equiv \left.\begin{array}{l}x=2-9\lambda \\ y=-1+10\lambda \\ z=1-13\lambda\end{array}\right\}}$$



4. El nombre d'hores de vida d'un cert bacteri (tipus A) es distribueix segons una normal de mitjana 110 hores i desviaciò típica de 0,75 hores. Calcula la probabilitat que, escollint a l'atzar un bacteri:

(a) el seu nombre d'hores de vida sobrepassi les 112,25 hores. (4 punts)

(b) el seu nombre d'hores de vida sigui inferior a 109,25 hores. (4 punts)

D'un altre bacteri (tipus B) se sap que el nombre d'hores de vida es distribueix segons una normal de mitjana 110 hores, però es desconeix la seva desviaciò típica. Experimentalment s'ha comprovat que la probabilitat que un bacteri tipus B visqui més de 125 hores és 0,1587.
Calcula la desviaciò típica de la distribuciò del nombre d'hores de vida dels bacteris tipus B. (2 punts)

X = Número de horas de vida de una bacteria tipo A.
X = N(110, 0.75)

(a)

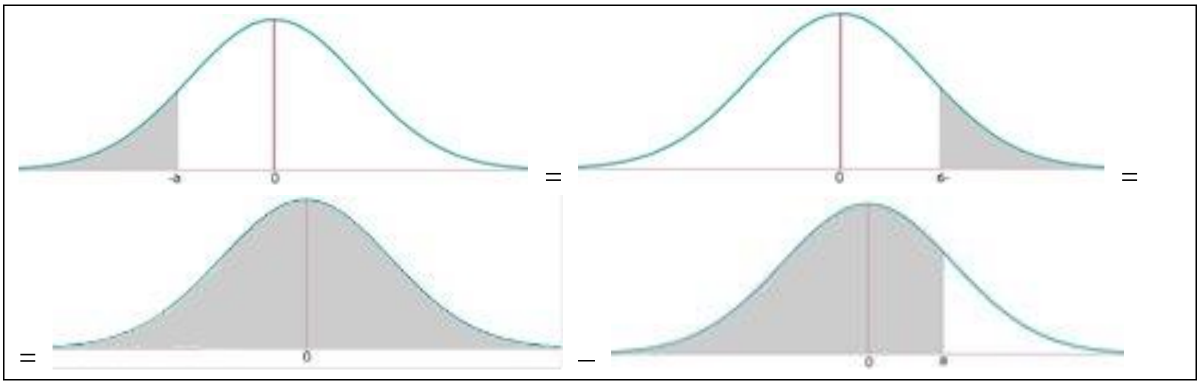
$$P(X > 112.25) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{112.25-110}{0.75}\right) = P(Z > 3) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 3) = 1 - 0.9987 = \boxed{0.0013}$$

(b)

$$P(X < 109.25) = \{Tipificamos\} = P\left(Z < \frac{109.25-110}{0.75}\right) = P(Z < -1) = P(Z > 1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$



Y = Número de horas de vida de una bacteria tipo B.
Y=N(110, σ)

$$P(Y > 125) = 0.1587$$

$$P(Y > 125) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{125-110}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{15}{\sigma}\right) = 0.1587$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{15}{\sigma}\right) = 0.1587 \Rightarrow P\left(Z < \frac{15}{\sigma}\right) = 1 - 0.1587 = 0.8413 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Miro en la tabla N(0,1)}\} \Rightarrow \frac{15}{\sigma} = 1 \Rightarrow \boxed{\sigma = 15}$$

Model 2

OPCIÓ B

1. Una empresa té tres mines: A, B i C, i en cada una, el mineral extret conté els elements químics: níquel (Ni), coure (Cu) i ferro (Fe), en diferent concentraciò. Les concentracions sòn:

- Mina A: Ni (1%), Cu (2%), Fe (3%),
- Mina B: Ni (2%), Cu (5%), Fe (7%),
- Mina C: Ni (1%), Cu (3%), Fe (1%).

Per obtenir 7 tones de níquel, 18 de coure i 16 de ferro en total, quantes tones de mineral s'han d'extreure de cada mina?

(a) Planteja un sistema d'equacions que interpreti l'enunciat. (4 punts)
(b) Classifica el sistema. (2 punts)
(c) Resol el sistema. (4 punts)

(a) Llamamos "x" a las toneladas de mineral extraído de la mina A, "y" a las toneladas de mineral extraído de la mina B y "z" a las toneladas de mineral extraído de la mina C. Hacemos una tabla con los datos.

	Níquel	Cobre	Hierro
Mina A (x)	0,01x	0,02x	0,03x
Mina B (y)	0,02y	0,05y	0,07y
Mina C (z)	0,01z	0,03z	0,01z
TOTALES	$0,01x+0,02y+0,01z$	$0,02x+0,05y+0,03z$	$0,03x+0,07y+0,01z$

Como hay que obtener 7 toneladas de níquel, 18 de cobre y 16 de hierro el sistema es:

$$\left.\begin{array}{l} 0,01x+0,02y+0,01z=7 \\ 0,02x+0,05y+0,03z=18 \\ 0,03x+0,07y+0,01z=16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+z=700 \\ 2x+5y+3z=1800 \\ 3x+7y+z=1600 \end{array}\right\}$$

(b) La matriz de coeficientes del sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 5+18+14-15-4-21=37-40=-3\neq 0 .$$

El rango de la matriz A = 3 = Rango de A/B = número de incógnitas.

El sistema tiene una única solución.

(c) Lo resolvemos utilizando Cramer.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 700 \\ 2 & 5 & 3 & 1800 \\ 3 & 7 & 1 & 1600 \end{pmatrix}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}700 & 2 & 1\\1800 & 5 & 3\\1600 & 7 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 5 & 3\\3 & 7 & 1\end{vmatrix}}=\frac{3500+9600+12600-8000-3600-14700}{-3}=\frac{-600}{-3}=200$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 700 & 1\\2 & 1800 & 3\\3 & 1600 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 5 & 3\\3 & 7 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1800+6300+3200-5400-1400-4800}{-3}=\frac{-300}{-3}=100$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 700\\2 & 5 & 1800\\3 & 7 & 1600\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 5 & 3\\3 & 7 & 1\end{vmatrix}}=\frac{8000+10800+9800-10500-6400-12600}{-3}=\frac{-900}{-3}=300$$

Debe extraer 200 toneladas de mineral de la mina A, 100 toneladas de la mina B y 300 toneladas de la mina C.

2. Considera la funciò $f(x)=\dfrac{3}{x^2-x}$.

(a) Calcula el seu domini i els intervals de creixement i decreixement. (3 punts)

(b) Calcula una primitiva qualsevol de *f(x)*. (4 punts)

(c) Calcula l'àrea delimitada per la gràfica de la funciò *y = f(x)*, l'eix *OX* i les rectes $x=2$ i $x=3$ (3 punts)

(a) El dominio de la función son todos los valores reales menos los que anulen el denominador.

$$x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

$Dominio=\mathbb{R}-\{0,1\}$

Para estudiar el crecimiento o decrecimiento utilizamos la derivada.

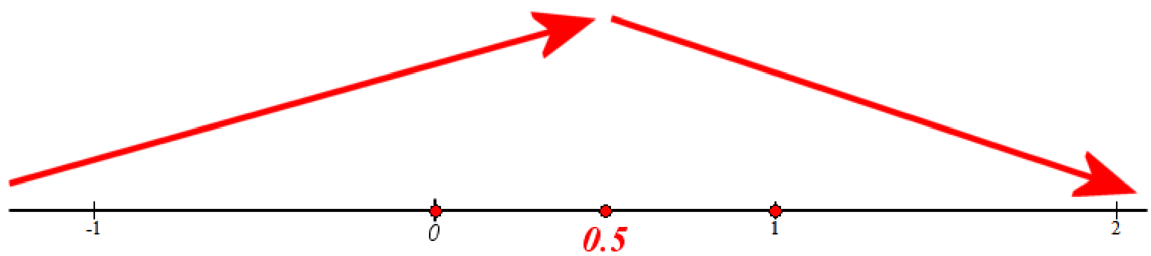
$$f(x)=\frac{3}{x^2-x} \Rightarrow f'(x)=\frac{0-3(2x-1)}{(x^2-x)^2}=\frac{-6x+3}{(x^2-x)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-6x+3}{(x^2-x)^2}=0 \Rightarrow -6x+3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{6}=0.5$$

Tenemos a *x = 0.5* como punto crítico, además tenemos *x = 0* y *x = 1* como excluidos del dominio. La recta real se divide en cuatro zonas. Vamos comprobando la monotonía en cada zona.

- En $(-\infty,0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f'(-1)=\dfrac{9}{(1+1)^2}>0$. La función crece en $(-\infty,0)$.
- En $(0,0.5)$ tomamos *x = 0.25* y la derivada vale $f'(0.25)=\dfrac{-1.5+3}{(1+1)^2}>0$. La función crece en $(0,0.5)$.
- En $(0.5,1)$ tomamos *x = 0.75* y la derivada vale $f'(0.75)=\dfrac{-4.5+3}{(1+1)^2}<0$. La función decrece en $(0.5,1)$.
- En $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{-12+3}{(2^2-2)^2}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,0)\cup(0,0.5)$ y decrece en $(0.5,1)\cup(1,+\infty)$



(b)

$$F(x)=\int f(x)dx=\int \frac{3}{x^2-x}dx=$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{3}{x^2-x}=\frac{3}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}$$

$$3=A(x-1)+Bx$$

$$x=0\rightarrow 3=-A\rightarrow A=-3$$

$$x=1\rightarrow 3=B$$

$$\frac{3}{x^2-x}=\frac{-3}{x}+\frac{3}{x-1}$$

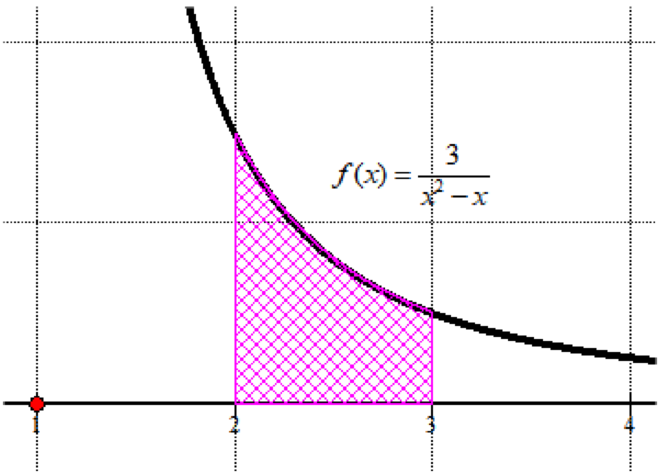
$$=\int \frac{-3}{x}+\frac{3}{x-1}dx=-3\ln|x|+3\ln|x-1|+C$$

(c) La función $f(x)=\dfrac{3}{x^2-x}$ no corta el eje de abscisas, por lo que el área de la región pedida es:

$$\int_2^3 \frac{3}{x^2-x}dx=\left[-3\ln|x|+3\ln|x-1|\right]_2^3=$$

$$=\left[-3\ln 3+3\ln|3-1|\right]-\left[-3\ln 2+3\ln|2-1|\right]=$$

$$=-3\ln 3+3\ln 2+3\ln 2=\boxed{6\ln 2-3\ln 3=0.86\,u^2}$$



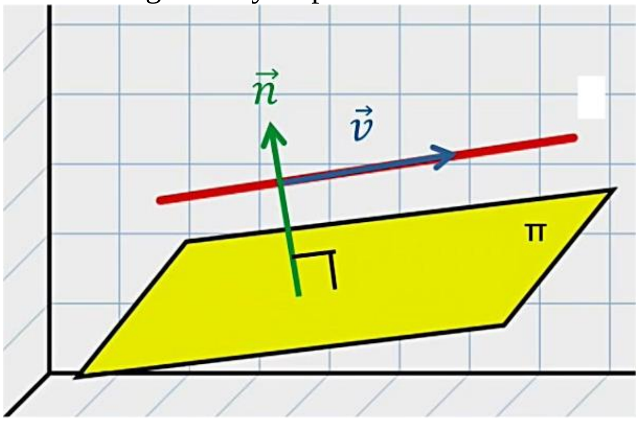
El área de la zona rayada no llega a ser un cuadradito.

3. Donada la recta r i el pla π

$$(r)\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{-1},\quad (\pi)\quad 3x-my+z=1,$$

es demana si existeix algun valor del paràmetre m per al qual
(a) el pla i la recta sòn paral·lels. (4 punts)
(b) o bé, el pla conté la recta. (3 punts)
(c) o bé, el pla i la recta es tallen exactament en un punt. (3 punts)
En cada cas, si existeix, cacula'l.

(a) Deseamos que plano y recta sean paralelos, por lo que el vector director de recta y el normal del plano deben ser ortogonales y su producto escalar debe ser cero.



$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=(3,-m,1)\\ \vec{v}=(2,3,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{v}=(3,-m,1)(2,3,-1)=0\Rightarrow 6-3m-1=0\Rightarrow -3m=-5\Rightarrow \boxed{m=\frac{5}{3}}$$

Comprobamos que la recta no está contenida en el plano.

$$\left.\begin{array}{l}P_r(1,-1,-2)\in r\\ ¿P_r\in\pi?\\ \pi\equiv 3x-\frac{5}{3}y+z=1\end{array}\right\}\Rightarrow ¿3-\frac{5}{3}(-1)-2=1?\Rightarrow ¿3+\frac{5}{3}-2-1=0?\Rightarrow ¿\frac{5}{3}=0?$$

Evidentemente el punto de la recta no está en el plano y por tanto no lo está ningún punto de la recta. Y plano y recta son paralelos.

(b) La recta nunca está contenida en el plano, pues para el único valor de m que hace que vector director de recta y normal del plano sean ortogonales incluye el hecho de que plano y recta son paralelos.

(c) Plano y recta se cortan en un punto para cualquier valor de m distinto de 5/3.

Hallamos el punto de corte resolviendo el sistema para $m\neq\frac{5}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l}r\equiv\left.\begin{array}{l}P_r(1,-1,-2)\\ \vec{v}=(2,3,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\ y=-1+3\lambda\\ z=-2-\lambda\end{array}\right\}\\ (\pi)\quad 3x-my+z=1,\end{array}\right\}\Rightarrow 3(1+2\lambda)-m(-1+3\lambda)-2-\lambda=1\Rightarrow$$

$\Rightarrow 3+6\lambda+m-3m\lambda-2-\lambda=1 \Rightarrow 5\lambda-3m\lambda=-m \Rightarrow (5-3m)\lambda=-m \Rightarrow$

Como $5-3m \neq 0$, entonces puedo despejar λ

$\Rightarrow \lambda=\dfrac{-m}{5-3m}$ sustituimos en las ecuaciones del principio.

$$\left.\begin{array}{l} x=1+2\dfrac{-m}{5-3m}=\dfrac{5-3m-2m}{5-3m}=\dfrac{5-5m}{5-3m} \\ y=-1+3\dfrac{-m}{5-3m}=\dfrac{-5+3m-3m}{5-3m}=\dfrac{-5}{5-3m} \\ z=-2-\dfrac{-m}{5-3m}=\dfrac{-10+6m+m}{5-3m}=\dfrac{-10+7m}{5-3m} \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(\dfrac{5-5m}{5-3m}, \dfrac{-5}{5-3m}, \dfrac{-10+7m}{5-3m}\right)$$

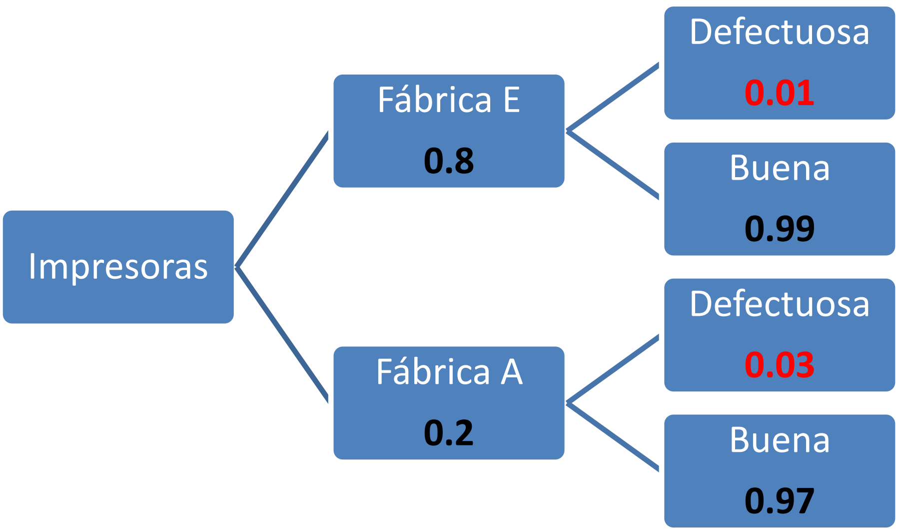
4. Una empresa de fabricaciò d'impressores té dos centres de producciò, la fàbrica europea (E) i la fàbrica asiàtica (A). L'1 % de les impressores de la fàbrica E i el 3% de les impressores de la fàbrica A es produeixen amb un defecte. El mercat d'un determinat país s'abasteix d'impressores procedents de la fàbrica E en un 80%, mentre que la resta prové de la fàbrica A.

(a) Quina és la probabilitat que una impressora d'aquest país tingui el defecte? (4 punts)

(b) Si el país té, aproximadament, dos milions d'impressores fabricades per aquesta empresa, quantes tindran el defecte? (2 punts)

(c) Si s'escull a l'atzar una impressora d'aquest país i resulta ser una impressora defectuosa, quina és la probabilitat que provingui de la fàbrica E? (4 punts)

Realizamos un diagrama de árbol.



(a) Mirando en el diagrama de árbol superior tenemos:

$P(\text{Una impresora sea defectuosa})=0.8\cdot 0.01+0.2\cdot 0.03=0.008+0.006=\boxed{0.014}$

(b) 2000 000 · 0.014 = 28 000 impresoras serán defectuosas.

(c) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea de fábrica E / Es defectuosa})=\dfrac{P(\text{Sea de fábrica E } \cap \text{ Es defectuosa})}{P(\text{Sea defectuosa})}=$$

$$=\dfrac{0.8\cdot 0.01}{0.014}=\dfrac{8}{14}=\boxed{\dfrac{4}{7}=0.571}$$