Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

**Matemàtiques II** 2019

Model 2

*Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.*

*Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualifiació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemátic i no matemátic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de cálcul.*

*Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gráfica o programable, peró no s'autoritzará l'us de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.*

## OPCIÓ A

**1.** a) Discutiu per a quins valors de *m* el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{aligned} 4x+3y+2z&=0 \\ 2x+y\quad -z&=m \\ 6x+6y+m^2z&=-9 \end{aligned}\right\} ;$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en qué sigui compatible indeterminat. (3 punts)

**2.** Calculau els màxims i mínims relatius de la funció $f(x)=x^3-3x-2$ (3 punts), els intervals de creixement i decreixement (3 punts) i feu un esbós de la seva gràfica per x entre –3 i 3. (4 punts)

**3**. Determinau un pla que, passant per l'origen de coordenades, sigui paral·lel a la recta d'equacions

$$\left.\begin{aligned} x+y&=1 \\ y+z&=2 \end{aligned}\right\}$$

i també paral·lel a la recta que passa pels punts de coordenades (1, 1, 0) i (0, 1, 1): (10 punts)

**4.** El pes dels adults de 40 anys d'una certa comunitat es modela amb una distribució normal de mitjana $\mu = 85$ kg i desviació típica $\sigma = 15$ kg. Ens demanen:

a) Quin percentatge de la població té sobrepès? Entenem que una persona adulta de 40 anys té sobrepés si pesa més de 100 kg. (4 punts)

b) Consideram el col·lectiu dels individus més prims de la comunitat. Si ens diuen que aquest col·lectiu representa el 40% de tots els individus de la comunitat, quin és el pes màxim d'un individu del col·lectiu? (6 punts)

Model 2

# OPCIÓ B

**1.** Considerem la matriu i els vectors següents:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\ d=\begin{pmatrix}z\\ z\\ z\end{pmatrix}$$

Trobau x, y i z perquè es satisfaci:

$$A\cdot b-2c=d$$

(10 punts)

**2.** Considerem la regió delimitada per la funció $f\left(x\right)=\dfrac{x}{1+x^2}$, l'eix d'abscisses o eix OX i les rectes verticals $x=-1$ i $x=1$. Feu un esbós de la regió demanada (6 punts) i calculau l'área de la regió. (4 punts)

**3.** Considerem els punts A(0, 0, 0), B(1, 1, 0) i C(0, 1, 1): Calculau l'_area del triangle que formen els punts A, B i C (5 punts) i determinau l'angle que formen els vectors AB i AC:
(5 punts)

**4.** S'ha fet un estudi sobre la por de volar i el nivell d'estrés en una certa comunitat. Ens diuen que el 60% dels individus no tenen por de volar, el 50% té un nivell baix d'estrés, el 25%, un nivell mitjá, i el 5% té un nivell alt d'estrés i por de volar. Sabent, a més a més, que el 5% dels individus té un nivell mitjá d'estrés i no té por de volar, es demana:

a) Probabilitat que un individu de la comunitat tingui un nivell d'estrés mitjá i por de volar. (3 punts)
b) Sabent que un individu té por de volar, quina és la probabilitat que tingui un nivell baix d'estrés? (3 punts)
c) Són independents els esdeveniments “nivell d'estrés baix" i “por de volar"? Raonau la resposta. (4 punts)

# SOLUCIONES

## OPCIÓ A

**1.** a) Discutiu per a quins valors de $m$ el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{l} 4x+3y+2z=0 \\ 2x+y \quad -z=m \\ 6x+6y+m^2z=-9 \end{array}\right\} ;$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en qué sigui compatible indeterminat. (3 punts)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es

$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & m^2 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & m^2 \end{vmatrix}=4m^2-18+24-12-6m^2+24=-2m^2+18$$

Lo igualamos a cero.

$|A|=0 \Rightarrow -2m^2+18=0 \Rightarrow 2m^2=18 \Rightarrow m^2=9 \Rightarrow m=\sqrt{9}=\pm 3$

Hay tres casos distintos.

CASO 1. $m\neq 3 \text{ y } m\neq -3$

En este caso la matriz de coeficientes tiene rango 3 al igual que la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $m=3$

La matriz A queda

$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ tiene determinante nulo, por lo que su rango no es 3. Tiene un menor de orden 2 con determinante no nulo (quitando la fila y columna 3ª).

$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0$. El rango de A es 2.

$A/B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 6 & 9 & -9 \end{pmatrix}$ tomamos el menor de orden 3 quitando la columna 1ª y su determinante es $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & -9 \end{vmatrix}=27+36+18-81=0$ . El rango de A/B no es 3.

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la 2ª y 3ª columna y la 3ª fila.

$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0$. El rango de A/B es 2

Como rango A = rango A/B = 2 ≠ nº incógnitas el sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $m=-3$

La matriz A queda

$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ tiene determinante nulo, por lo que su rango no es 3. Tiene un menor de orden 2 con determinante no nulo (quitando la fila y columna 3ª).

$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0$. El rango de A es 2.

$A/B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 6 & 6 & 9 & -9 \end{pmatrix}$ tomamos el menor de orden 3 quitando la columna 1ª y su determinante es $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 6 & 9 & -9 \end{vmatrix}=27-36+18+81=89\neq 0$. El rango de A/B es 3.

Como rango A ≠ rango A/B el sistema es incompatible.

b) Es compatible indeterminado para m = 3 y el sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} 4x+3y+2z=0 \\ 2x+y\quad -z=3 \\ 6x+6y+9z=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow \{\text{Divido entre 3 la ecuación 3ª}\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+3y+2z=0 \\ 2x+y\quad -z=3 \\ 2x+2y+3z=-3 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrrr} 2x & +2y & +3z & =-3 \\ -2x & -y & +z & =-3 \\ \hline & y & +4z & =-6 \end{array} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} 2\cdot\text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrr} 4x & +2y & -2z & =6 \\ -4x & -3y & -2z & =0 \\ \hline & -y & -4z & =6 \end{array} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y+2z=0 \\ -y-4z=6 \\ y+4z=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrr} y & +4z & =-6 \\ -y & -4z & =6 \\ \hline & 0 & =0 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3y+2z=0 \\ -y-4z=6 \\ 0=0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y=-2z \\ -y=4z+6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3y=-2z \\ \boxed{y=-4z-6} \end{array}\right\} \Rightarrow 4x+3(-4z-6)=-2z \Rightarrow 4x-12z-18=-2z$$

$$4x=10z+18 \Rightarrow \boxed{x=\frac{10z+18}{4}=\frac{5z+9}{2}}$$

La solución es $x=\dfrac{9+5t}{2}$; $y=-6-4t$; $z=t$

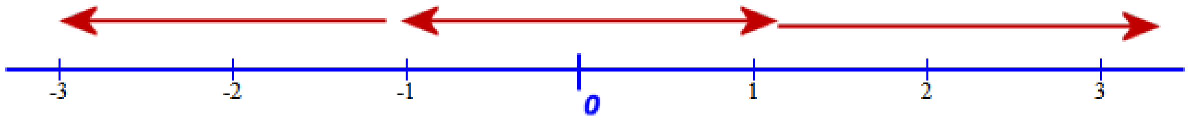
**2.** Calculau els màxims i mínims relatius de la funció $f(x)=x^3-3x-2$ (3 punts), els intervals de creixement i decreixement (3 punts) i feu un esbós de la seva gràfica per x entre –3 i 3. (4 punts)

Calculamos la derivada de la función $f(x)=x^3-3x-2 \Rightarrow f'(x)=3x^2-3$

Igualamos a cero la derivada.

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$

Estudiemos los cambios de signo de la derivada antes, entre y después de esos valores.

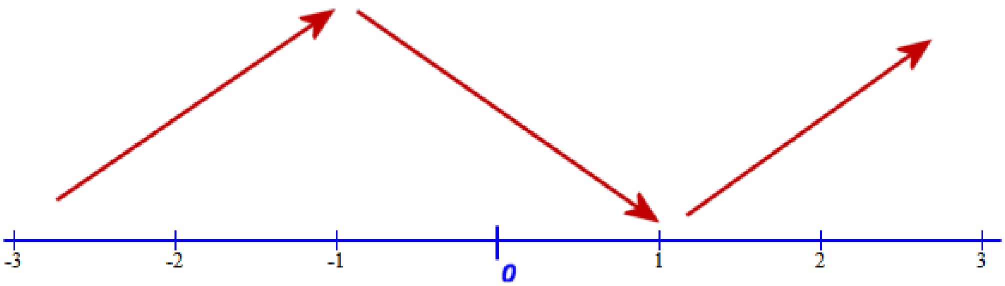



En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos el valor x = –2 y la derivada vale $f'(-2)=3(-2)^2-3=9>0$. La función crece.

En el intervalo $(-1,1)$ tomamos el valor x = 0 y la derivada vale $f'(0)=3(0)^2-3=-3<0$. La función decrece.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos el valor x = 2 y la derivada vale $f'(2)=3(2)^2-3=9>0$. La función crece.

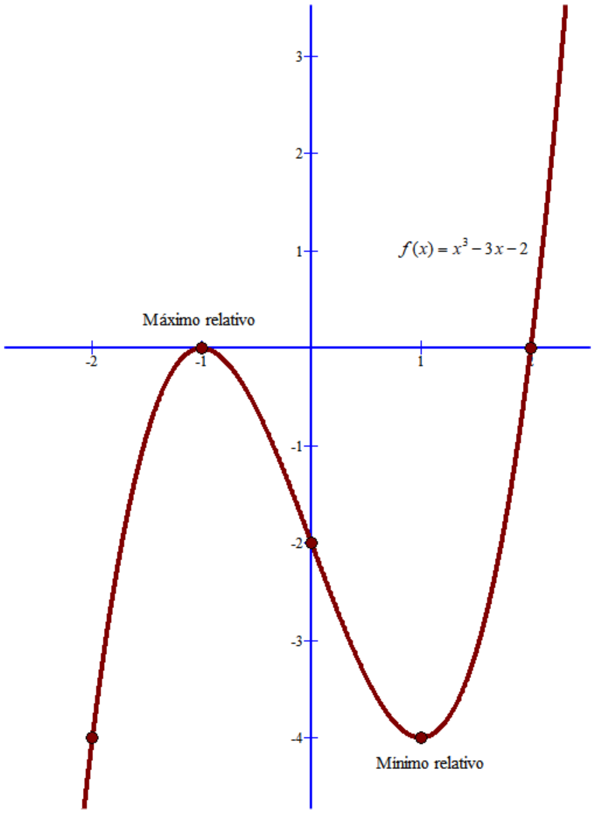
La función crece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $(-1,1)$.




La función presenta un máximo relativo en x = –1 y un mínimo relativo en x = 1.

Para dibujarla hacemos una tabla de valores.

| $x$ | $y=x^3-3x-2$ |
|---|---|
| $-2$ | $-8+6-2=-4$ |
| $-1$ | $-1+3-2=0$ |
| $0$ | $-2$ |
| $1$ | $1-3-2=-4$ |
| $2$ | $8-6-2=0$ |




**3**. Determinau un pla que, passant per l'origen de coordenades, sigui paral·lel a la recta d'equacions

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=2 \end{array}\right\}$$

i també paral·lel a la recta que passa pels punts de coordenades (1, 1, 0) i (0, 1, 1): (10 punts)

Calculamos el vector de la recta dada, despejando y pasando a la ecuación paramétrica de la recta.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1-y \\ z=2-y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1-y \\ y=y \\ z=2-y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1-t \\ y=t \\ z=2-t \end{array}\right\}$$

El vector director de la recta es $\vec{v}=(-1,1,-1)$

El vector director de la otra recta es $\vec{u}=(1,1,0)-(0,1,1)=(1,0,-1)$

El plano pedido pasa por el punto P(0,0,0) y tiene vectores directores $\vec{v}=(-1,1,-1)$ y $\vec{u}=(1,0,-1)$, por lo que su ecuación es:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x-y-z-y=0$$

$$-x-2y-z=0$$

$$\boxed{\pi: x+2y+z=0}$$

**4.** El pes dels adults de 40 anys d'una certa comunitat es modela amb una distribució normal de mitjana μ = 85 kg i desviació típica σ = 15 kg. Ens demanen:

a) Quin percentatge de la població té sobrepès? Entenem que una persona adulta de 40 anys té sobrepés si pesa més de 100 kg. (4 punts)
b) Consideram el col·lectiu dels individus més prims de la comunitat. Si ens diuen que aquest col·lectiu representa el 40% de tots els individus de la comunitat, quin és el pes màxim d'un individu del col·lectiu? (6 punts)

X = Peso de un adulto de 40 años. X = N (85, 15)

a)

$$P(X>100)=1-P(X<100)=\{Tipificamos\}=1-P\left(\frac{X-85}{15}<\frac{100-85}{15}\right)=$$

$$=1-P(Z<1)=1-0{,}8413=0{,}1587$$

El porcentaje de población de 40 años con sobrepeso es de 15,87%

b) Llamamos p al peso máximo del colectivo.

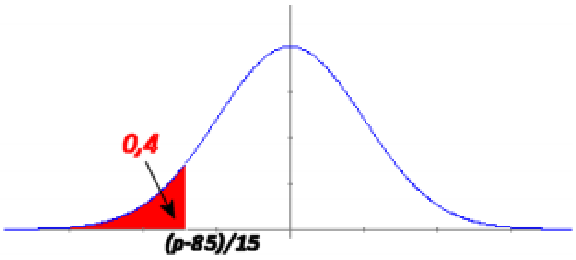
$$P(X<p)=0{,}4$$

*Tipificamos*

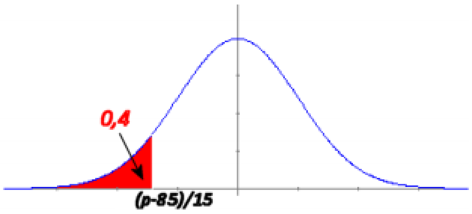
$$P\left(\frac{X-85}{15}<\frac{p-85}{15}\right)=0{,}4$$

$$P\left(Z<\frac{p-85}{15}\right)=0{,}4$$

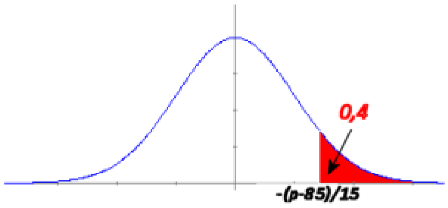
Como es menor de 0,5 la situación es



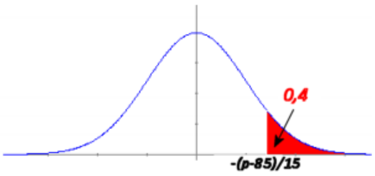

Se cumple




=




$$P\left(Z<\frac{p-85}{15}\right)=0,4 \Rightarrow P\left(Z>-\frac{p-85}{15}\right)=0,4$$




=


−


$$P\left(Z>-\frac{p-85}{15}\right)=0,4 \Rightarrow 1-P\left(Z<-\frac{p-85}{15}\right)=0,4 \Rightarrow P\left(Z<-\frac{p-85}{15}\right)=0,6$$

Buscamos en la tabla

$$-\frac{p-85}{15}=\frac{0,25+0,26}{2} \Rightarrow p-85=-15\frac{0,25+0,26}{2}$$

$$p=85-15\cdot 0,266=81,175\ kg$$

Model 2

## OPCIÓ B

**1.** Considerem la matriu i els vectors següents:

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\\1&0\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ d=\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}$$

Trobau x, y i z perquè es satisfaci:

$$A\cdot b-2c=d$$ (10 punts)

$$A\cdot b-2c=d\Rightarrow A\cdot b=2c+d$$

$$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2x+y\\x+2y\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+z\\2+z\\z\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x+y=2+z\\x+2y=2+z\\x=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2z+y=2+z\\z+2y=2+z\\x=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2-z\\2y=2\\x=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2-z\\y=1\\x=z\end{cases}\Rightarrow$$

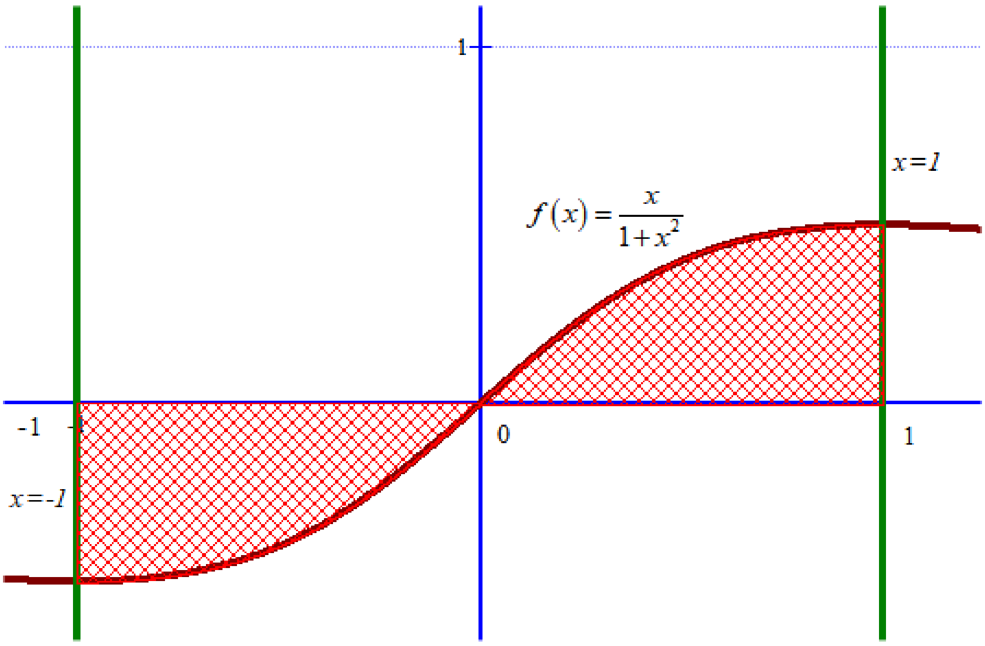
$$\Rightarrow\begin{cases}1=2-z\\y=1\\x=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=1\\y=1\\x=1\end{cases}$$

La solución es $x=y=z=1$

**2.** Considerem la regió delimitada per la funció $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$, l'eix d'abscisses o eix OX i les rectes verticals $x=-1$ i $x=1$. Feu un esbós de la regió demanada (6 punts) i calculau l'área de la regió. (4 punts)

Para hacer un dibujo de la gráfica entre –1 y 1, realizamos una tabla de valores

| $x$ | $y=\frac{x}{1+x^2}$ |
|---|---|
| $-1$ | $-0,5$ |
| $-0,5$ | $-0,4$ |
| $0$ | $0$ |
| $0,5$ | $0,4$ |
| $1$ | $0,5$ |



Para calcular el área de la región coloreada hay que hacer la integral definida de 0 a 1 de la función $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ y el área pedida será el doble de lo obtenido (por la simetría de la función).

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\left(\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1\right)=\frac{1}{2}\left(\left[\ln\left(1+1^2\right)\right]-\left[\ln\left(1+0^2\right)\right]\right)=\frac{1}{2}(\ln 2)$$

$Área=2\cdot\frac{1}{2}(\ln 2)=\ln 2=0,69\,u^2$ , que coincide aproximadamente con lo que se observa en el dibujo de la gráfica.

**3.** Considerem els punts A(0, 0, 0), B(1, 1, 0) i C(0, 1, 1): Calculau l'_area del triangle que formen els punts A, B i C (5 punts) i determinau l'angle que formen els vectors AB i AC:
(5 punts)

El área del triángulo definido por los puntos dados es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores que unen dichos vértices.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,1,0)-(0,0,0)=(1,1,0)\\ \overrightarrow{AC}=(0,1,1)-(0,0,0)=(0,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=i+k-j=i-j+k=(1,-1,1)$$

$$Área=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{|(1,-1,1)|}{2}=\frac{\sqrt{1+1+1}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,u$$

El ángulo que forman los vectores AB i AC lo calculamos con la fórmula

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,1,0)\\ \overrightarrow{AC}=(0,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$

$$(1,1,0)(0,1,1)=\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+1}\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$

$$1=2\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=60^{\circ}$$

El ángulo es de 60º

**4.** S'ha fet un estudi sobre la por de volar i el nivell d'estrés en una certa comunitat. Ens diuen que el 60% dels individus no tenen por de volar, el 50% té un nivell baix d'estrés, el 25%, un nivell mitjá, i el 5% té un nivell alt d'estrés i por de volar. Sabent, a més a més, que el 5% dels individus té un nivell mitjá d'estrés i no té por de volar, es demana:

a) Probabilitat que un individu de la comunitat tingui un nivell d'estrés mitjá i por de volar. (3 punts)
b) Sabent que un individu té por de volar, quina és la probabilitat que tingui un nivell baix d'estrés? (3 punts)
c) Són independents els esdeveniments "nivell d'estrés baix" i "por de volar"? Raonau la resposta. (4 punts)

Realizamos una tabla de contingencia donde se organicen y visualicen mejor los datos dados.

| | Estrés bajo | Estrés medio | Estrés alto | |
|---|---|---|---|---|
| **Miedo a volar** | | | 5 | |
| **Sin miedo a volar** | | 5 | | 60 |
| | 50 | 25 | | 100 |

Completamos la tabla, sabiendo que cada línea debe sumar lo que indique el valor total situado a su derecha o debajo.

| | Estrés bajo | Estrés medio | Estrés alto | |
|---|---|---|---|---|
| **Miedo a volar** | 15 | 20 | 5 | 40 |
| **Sin miedo a volar** | 35 | 5 | 20 | 60 |
| | 50 | 25 | 25 | 100 |

Con los datos que nos proporciona esta última tabla respondemos a las preguntas.

a) P(Tener nivel medio de estrés y miedo a volar) = 20 % = $\boxed{0{,}2}$

b)

$$P(\text{Nivel bajo de estrés/Tiene miedo a volar}) = \frac{P(\text{Tiene miedo a volar y nivel bajo de estrés})}{P(\text{Tiene miedo a volar})} =$$

$$= \frac{15}{40} = \frac{3}{8} = \boxed{0{,}375}$$

c) Para ser independientes debe cumplirse:

$$P(\text{Nivel bajo de estrés y miedo a volar}) = P(\text{Nivel bajo de estrés}) \cdot P(\text{Tiene miedo a volar})$$

$$¿\frac{15}{100} = \frac{50}{100} \cdot \frac{40}{100}?$$

$$¿\frac{15}{100} = \frac{2000}{10000}?$$

$$¿\frac{15}{100} = \frac{20}{100}? \text{ No es cierto}$$

No son independientes los sucesos “Nivel bajo de estrés” y “Miedo a volar”.