Model 1. Criteris específics de correcció

Cada qüestió té una puntuació màxima de 10. Cal tenir presents les puntuacions parcials màximes que apareixen a les qüestions amb més d'un apartat. Pel que fa a aquelles qüestions que tenen apartats sense puntuar, se suposarà que cadascun té la mateixa valoració.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne.

Penalitzau els errors de càlcul. Els errors greus i, especialment, aquells que portin a resultats incoherents o absurds, penalitzau-los amb el 50 per cent sobre la qualificació de la qüestió.

Valorau totes les parts que siguin correctes, encara que el resultat final no ho sigui.

Hi pot haver casos en què hi hagi dubtes en aplicar els criteris que es detallen a continuació. En aquests casos, feu prevaler el vostre criteri i sentit comú.

Les puntuacions tant dels apartats com dels subapartats són independents. Si l'alumne s'ha equivocat en qualque apartat o subapartat però fa bé els altres (segons les "seves" dades), donau la puntuació adient. En aquest cas, s'ha de refer el problema, ja que s'han de posar les dades "equivocades" de l'alumne per resoldre els altres apartats o subapartats en què no s'ha equivocat. En canvi, si s'equivoca en dos apartats o subapartats, donau 0 punts.

OPCIÓ A

1. a) Càlcul correcte del determinant de la matriu del sistema: 2 punts.
Resolució correcta de l'equació que diu que el determinant de la matriu del sistema és zero: 2 punts.
Discussió correcta per a $m \neq -3, 5$: 1 punt.
Discussió correcta per a $m = -3$: 1 punt.
Discussió correcta per a $m = 5$: 1 punt.

b) Resolució per a $m = -2$: 3 punts. Si hi ha qualque error: 0 punts.

2. Plantejar bé la funció a minimitzar S: 3 punts.
Calcular correctament la derivada: 2 punts.
Resoldre correctament l'equació $S'(a) = 0$ o $S'(h) = 0$: 2 punts.
Comprovar que és un mínim: 1 punt.
Calcular les dimensions del cub: 2 punts.

Si s'equivoca en calcular les derivades: 0 punts.

3. Trobar la condició que diu que la recta a calcular talla a la recta **r**: 3 punts.
Trobar la condició que diu que la recta a calcular talla a la recta **s**: 3 punts.
Resoldre el sistema adient: 2 punts.
Escriure la recta en forma paramètrica: 2 punts.

4. Plantejament de les dades de l'enunciat com a probabilitats: 3 punts. Si ho fan per taules de contingència o per diagrama en arbres correctament: 3 punts.
Interpretació correcta de la probabilitat demanada a l'apartat a): 1 punt.
Càlcul de la probabilitat demanada a l'apartat a): 1 punt.
Interpretació correcta de la probabilitat demanada a l'apartat b): 1 punt.
Càlcul de la probabilitat demanada a l'apartat b): 1 punt.
Interpretació correcta de la probabilitat demanada a l'apartat c): 1.5 punts.
Càlcul de la probabilitat demanada a l'apartat b): 1.5 punts.

Model 1. Criteris específics de correcció

OPCIÓ B

1. Càlcul del producte de matrius **AM**: 2 punts.
Càlcul del producte de matrius **MA**: 2 punts.
Plantejament del sistema d'equacions **AM** = **MA**: 3 punts.
Resolució del sistema anterior: 3 punts.

Si no determina la relació correcta, màxim: 7 punts.

2. *a*) Esbós de la funció: 6 punts. Si no justifica com ha fet el dibuix i simplement dibuixa la funció: 0 punts.

b) Càlcul de l'àrea demanada: 4 punts.

i) Plantejar la integral: 0.5 punts.
ii) Dividir la integral en dues: 1 punt.
iii) Càlcul de cada integral: 2 punts, 1 punt per cada integral.
iv) Càlcul de la integral total: 0.5 punts.

3. Càlcul dels vectors directors de les rectes: 2 punts.
Càlcul del pla que conté una recta i és paral·lel a l'altra: 3 punts.
Plantejament que la distància entre les dues rectes és igual a la distància entre un punt de la recta **s** (si **s** és la recta paral·lela al pla) i el pla determinat: 3 punts.
Càlcul de la distància entre un punt de la recta **s** i el pla determinat: 2 punts.

4. *a*) Puntuació de l'apartat a):

i) Plantejar bé la probabilitat demanada: 2 punts,
ii) Estandarditzar la variable X: 1 punt,
iii) Càlcul de la probabilitat: 1 punt.

b) Puntuació de l'apartat b):

i) Plantejar bé la condició que ha de satisfer x: 2 punts,
ii) Estandarditzar la variable X: 2 punts,
iii) Càlcul del valor de x: 2 punts.

Model 1. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. *a*) Discutiu per a quins valors de m el sistema següent és compatible:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & my & + & z = & m+2, \\ mx & + & y & - & z = & 0, \\ x & + & 3y & + & z = & 0. \end{array}\right\}$$

(7 punts)

b) Resoleu-lo en el cas en què $m = -2$. (3 punts)

Solució. *a*) La matriu del sistema és la següent:

$$\begin{pmatrix} 4 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinant de la matriu anterior val: $-m^2 + 2m + 15$.
El determinant serà nul per a $m = -3$ i $m = 5$.
Si $m \neq -3, 5$, el rang de la matriu del sistema serà 3 i el rang de la matriu ampliada també serà 3 ja que només hi ha tres equacions. Per tant, en aquest cas, es tractaria d'un sistema compatible determinant.
Si $m = -3$, el sistema serà:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & - & 3y & + & z = & -1, \\ -3x & + & y & - & z = & 0, \\ x & + & 3y & + & z = & 0. \end{array}\right\}$$

El rang de la matriu del sistema serà 2, ja que el determinant següent és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

El rang de la matriu ampliada serà 3 ja que el determinant següent format per les 3 últimes columnes no és nul:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Model 1. Solucions

Per tant, es tractaria d'un sistema incompatible.
Si $m = 5$, el sistema serà:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & + & 5y & + & z = & 7, \\ 5x & + & y & - & z = & 0, \\ x & + & 3y & + & z = & 0. \end{array}\right\}$$

El rang de la matriu del sistema serà 2, ja que el determinant següent és diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -21 \neq 0.$$

El rang de la matriu ampliada serà 3 ja que el determinant següent format per les 3 últimes columnes no és nul:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 28 \neq 0.$$

Per tant, es tractaria d'un sistema incompatible.

b) En el cas $m = -2$, el sistema és:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 4x & - & 2y & + & z = & 0, \\ -2x & + & y & - & z = & 0, \\ x & + & 3y & + & z = & 0. \end{array}\right\}$$

Com que és un sistema homogeni i sabem que té solució única, aquesta serà $x = y = z = 0$.

2. Calculau les dimensions d'una capsa amb les dues tapes de base quadrangular de volum 64 metres cúbics de superfície mínima. Comprovau que la solució obtinguda és un mínim. (10 punts)

Solució. Sigui a la mesura del costat de la base i h l'altura de la capsa. El volum de la mateixa serà:

$$V = a^2 h,$$

i la superfície de la capsa serà:

$$S = 2a^2 + 4ah.$$

Sabem que $V = 64$, o, si es vol $a^2 h = 64$. Aïllant h de l'expressió anterior, obtenim $h = \frac{64}{a^2}$. La superfície de la capsa valdrà, en funció d'a:

$$S = 2a^2 + 4a \cdot \frac{64}{a^2} = 2a^2 + \frac{256}{a}.$$

Per trobar el mínim de la funció anterior, derivam i igualam a zero:

$$S' = \frac{4\left(a^3 - 64\right)}{a^2} = 0.$$

L'única solució real de l'equació anterior és $a = 4$. Les dimensions de la capsa seran 4 metres de costat de la base i $h = \frac{64}{4^2} = 4$ metres d'altura. Es tractaria, doncs, d'un cub.

Comprovem que el que hem trobat és efectivament un mínim:

$$S'' = \frac{512}{a^3} + 4.$$

Substituint per $a = 4$, obtenim $S''(4) = 12 > 0$. Com que la derivada segona és positiva, es tractaria d'un mínim.

3. Calculau les equacions paramètriques de la recta que passa per l'origen de coordenades i talla les rectes: (10 punts)

$$\mathbf{r} : x = 2y = z - 1, \quad \mathbf{s} : 3x = 2y - 2 = 6z.$$

Solució. Les rectes $\mathbf{r}$ i $\mathbf{s}$ en forma paramètrica valen:

$$\mathbf{r}: \left.\begin{array}{rl} x = & 2t, \\ y = & t, \\ z = & 1 + 2t. \end{array}\right\}, \quad \mathbf{s}: \left.\begin{array}{rl} x = & \frac{2s-2}{3}, \\ y = & s, \\ z = & \frac{2s-2}{6}. \end{array}\right\}$$

Sigui $\mathbf{v} = (a, b, c)$ el vector director de la recta cercada. Com que la recta que busquem talla a $\mathbf{r}$, tenint en compte que el vector director de la recta $\mathbf{r}$ és $(2, 1, 2)$, que la recta passa per l'origen i que $(0, 0, 1)$ és un punt de la recta $\mathbf{r}$, el determinant següent serà nul:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix} = -a + 2b = 0.$$

De la mateixa manera, com que la recta que busquem talla a $\mathbf{s}$, tenint en compte que el vector director de la recta $\mathbf{s}$ és $\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$, que la recta passa per l'origen i que $\left(-\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right)$ és un punt de la recta $\mathbf{s}$, el determinant següent serà nul:

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & a \\ 0 & 1 & b \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & c \end{vmatrix} = \frac{a}{3} - \frac{2c}{3} = 0.$$

Resolent el sistema d'equacions trobat pels valors a, b i c, obtenim:

$$\left.\begin{array}{rl} -a + 2b & = 0, \\ \frac{a}{3} - \frac{2c}{3} & = 0, \end{array}\right\} \Rightarrow b = \frac{a}{2}, \; c = \frac{a}{2}.$$

Agafant $a = 2$, tenim que un vector director de la recta buscada serà $(2, 1, 1)$. Les equacions paramètriques de la recta buscada són:

$$\left.\begin{array}{rl} x = & 2t, \\ y = & t, \\ z = & t. \end{array}\right\}$$

4. En una classe de segon de batxillerat, el 60% dels alumnes són al·lotes, el 40% varen aprovar Llengua Castellana i el 20% són al·lotes que varen aprovar Llengua Castellana. Es demana:

Model 1. Solucions

a) Quina és la probabilitat de trobar una persona que sigui al·lot i suspengui[1] Llengua Castellana? (5 punts)
b) Quina és la probabilitat que un al·lot suspengui Llengua Castellana? (2 punts)
c) Si un alumne ha aprovat Llengua Castellana, quina és la probabilitat que sigui un al·lot? (3 punts)

Solució. Siguin els esdeveniments següents:

D: "Ésser al·lota".
H: "Ésser al·lot".
A: "Aprovar Llengua Castellana".
S: "Suspendre Llengua Castellana".

Ens donen les probabilitats següents:

$$p(\mathrm{D}) = 0.6,\ p(\mathrm{H}) = 0.4,\ p(\mathrm{A}) = 0.4,\ p(\mathrm{S}) = 0.6,\ p(\mathrm{D}\cap\mathrm{A}) = 0.2.$$

Ens demanen

a) $p(\mathrm{H}\cap\mathrm{S}) = p(\mathrm{S}) - p(\mathrm{D}\cap\mathrm{S}) = p(\mathrm{S}) - (p(\mathrm{D}) - p(\mathrm{D}\cap\mathrm{A})) = 0.6 - (0.6 - 0.2) = 0.2.$
b) $p(\mathrm{S}|\mathrm{H}) = \frac{p(\mathrm{H}\cap\mathrm{S})}{p(\mathrm{H})} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5.$
c) $p(\mathrm{H}|\mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{H}\cap\mathrm{A})}{p(\mathrm{A})} = \frac{p(\mathrm{H})-p(\mathrm{H}\cap\mathrm{S})}{p(\mathrm{A})} = \frac{0.4-0.2}{0.4} = 0.5.$

[1] Entenem per suspendre quan un alumne suspèn l'assignatura o no es presenta.

Model 1. Solucions

OPCIÓ B

1. Determinau quines relacions han d'existir entre a, b, c i d perquè es verifiqui $\mathbf{AM} = \mathbf{MA}$, sent $\mathbf{A}$ i $\mathbf{M}$ les matrius següents: (10 punts)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Solució. Si calculam els productes $\mathbf{AM}$ i $\mathbf{MA}$ obtenim:

$$\mathbf{AM} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{MA} = \begin{pmatrix} b & b-a \\ d & d-c \end{pmatrix}.$$

Com que les dues matrius anteriors han d'ésser iguals, hem de resoldre el sistema d'equacions següent:

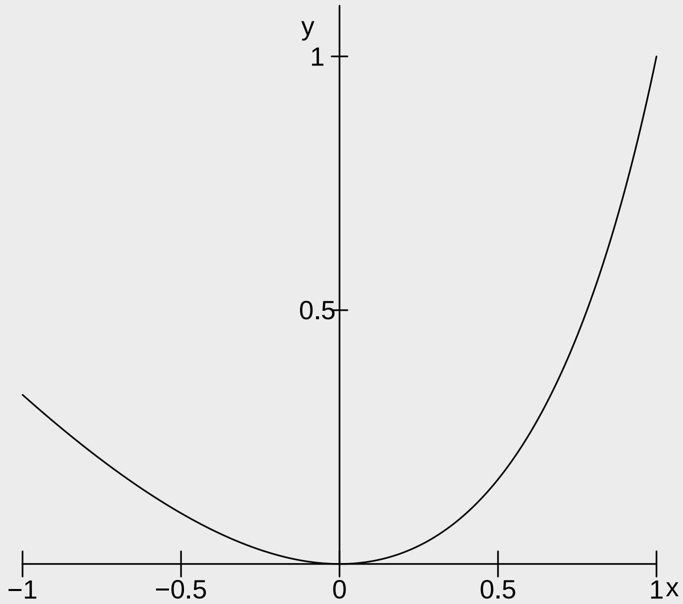
$$\left.\begin{aligned} -c &= b, \\ -d &= b-a, \\ a+c &= d, \\ b+d &= d-c. \end{aligned}\right\}$$

Les solucions són: $c = -b$ i $d = a - b$, amb a i b lliures.

2. Considerem la funció $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$. Feu un dibuix aproximat de la funció anterior en l'interval $[-1, 1]$. (6 punts). Calculau l'àrea limitada per la gràfica de la funció anterior i l'eix de les X. (4 punts)

Solució. *a*) L'esbós de la funció és el següent:

Model 1. Solucions



b) Ens demanen la integral següent:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2-x}\,dx.$$

Es tracta d'una integral racional. Com el grau del numerador supera al grau del denominador, hem de dividir:

$$\frac{x^2}{2-x} = -x-2+\frac{4}{2-x}.$$

La integral anterior serà doncs:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2-x}\,dx = \int_{-1}^{1} -(x+2)\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{4}{2-x}\,dx$$
$$= -\left.\frac{(x+2)^2}{2}\right]_{-1}^{1} - 4\ln(2-x)]_{-1}^{1} = 4\ln 3 - 4 \approx 0.3944.$$

3. Calculau la distància entre les rectes següents: (10 punts)

$$\mathbf{r}:\begin{cases} z + y = 5, \\ z = 4, \end{cases} \qquad \mathbf{s}:\begin{cases} 2x - z = 3, \\ y = 0. \end{cases}$$

Model 1. Solucions

Solució. El vector director de la recta $\mathbf{r}$ és $\mathbf{v_r} = (1,0,0)$ i el vector director de la recta $\mathbf{s}$ és $\mathbf{v_s} = (1,0,2)$.

El pla que conté la recta $\mathbf{r}$ i és paral·lel a la recta $\mathbf{s}$ val:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-1 & 0 & 0 \\ z-4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2-2y = 0, \ \Rightarrow y = 1.$$

La distància entre les dues rectes es pot calcular com la distància entre un punt qualsevol de la recta $\mathbf{s}$ (per exemple $(2,0,1)$) i el pla anterior:

$$d(\mathbf{r},\mathbf{s}) = \frac{|0-1|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = 1.$$

4. El nombre de passes que fa el professor Jaimito durant una hora de classe es modela amb una distribució normal de mitjana 100 passes i desviació típica 20.5 passes.

a) Calculau la probabilitat que el professor faci més de 125 passes durant una classe. (4 punts)

b) Ens diuen que en el 45% de les classes que fa el professor aquest fa menys de x passes. Trobau aquest valor x. (6 punts)

Solució. Sigui X la variable aleatòria que ens dóna el nombre de passes que fa el professor durant una hora de classe. Ens diuen que $X = N(\mu = 100, \sigma = 20.5)$. Ens demanen:

a) $p(X > 125) = p\left(Z > \frac{125-100}{20.5}\right) = p(Z > 1.22) = 0.1112$, on Z representa la distribució normal estàndard, o $Z = N(0,1)$.

b) Sabem $p(X < x) = 0.45$. Si estandaritzam, tendrem $p\left(Z < \frac{x-100}{20.5}\right) = 0.45$. Fent servir la simetria de la normal estàndard, tenim que $p\left(Z < -\frac{(x-100)}{20.5}\right) = 1 - 0.45 = 0.55$. Mirant les taules, $-\frac{(x-100)}{20.5} = \frac{0.12+0.13}{2} = 0.125$. El valor de x serà doncs $x = -0.125 \cdot 20.5 + 100 = 97.438$.

Model 1. Solucions

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$.