

Ejercicio 1.

Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B - C = D$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 4 & 3 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$X \in M_{3 \times 2}$. La mejor forma de resolver esta ecuación matricial, dado que las matrices que intervienen en el producto tienen pocos ceros, es la siguiente:

$$A \cdot X \cdot B - C = D \Rightarrow A \cdot X \cdot B = D + C \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot (D + C) \cdot B^{-1} \\ \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (D + C) \cdot B^{-1}, \text{ entonces calculamos las inversas de } A \text{ y } B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 9 - 12 - 3 = -2$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -9 & A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \end{aligned} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 3 = -2$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= 1 & B_{21} &= -(-3) = 3 \\ B_{12} &= -1 & B_{22} &= -5 \end{aligned} \Rightarrow B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -9 & 6 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 8 & 4 \\ 19 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.

Probar, aplicando las propiedades de los determinantes, la siguiente igualdad:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Aplicando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} \underset{F_1=F_1+F_2+F_3}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2=C_2-C_1 \\ C_3=C_3-C_1}}{=} \\ & = \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} = (a+b+c)^3 \end{aligned}$$

Ejercicio 3.

Calcula para qué valor, o valores, de x admite inversa la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y halla

A^{-1} para $x=3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -x^2 + 6 - 1 = 5 - x^2$$

A^{-1} existe $\Leftrightarrow |A| \neq 0$; $5 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \Rightarrow A$ admite inversa si $x \neq \sqrt{5}$ y $x \neq -\sqrt{5}$

para $x=3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $|A| = -4$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 & A_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 6 & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 18 & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 10 \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -3 & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -5 & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \end{aligned} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 6 & 18 & 10 \\ -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.

Calcula el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1-a & a & a & a & a \\ a & 1-a & a & a & a \\ a & a & 1-a & a & a \\ a & a & a & 1-a & a \\ a & a & a & a & 1-a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-a & a & a & a & a \\ a & 1-a & a & a & a \\ a & a & 1-a & a & a \\ a & a & a & 1-a & a \\ a & a & a & a & 1-a \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1=C_1-C_5 \\ C_2=C_2-C_5 \\ C_3=C_3-C_5 \\ C_4=C_4-C_5 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1-2a & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1-2a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1-2a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-2a & a \\ 2a-1 & 2a-1 & 2a-1 & 2a-1 & 1-a \end{vmatrix} \begin{matrix} F_5=F_5+F_1+F_2+F_3+F_4 \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-2a & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1-2a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1-2a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-2a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+3a \end{vmatrix} = (1-2a)^4 \cdot (1+3a)$$