Ejercicio 1.

Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 = I - 2A$, donde I denota la matriz identidad.

- Probar que $\det(A) \neq 0$ y encontrar A^{-1}.
- Calcular dos números p y q tales que $A^4 = p \cdot I + q \cdot A$.
- Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ cumple la relación de partida, calcular el valor de k.

Sabemos que se cumple $A^2 = I - 2A \Rightarrow A^2 + 2A = I \Rightarrow A(A+2I) = I \Rightarrow |A(A+2I)| = |I| \Rightarrow$

$\Rightarrow |A||A+2I| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0.$

Como tenemos $A(A+2I) = I \Rightarrow A^{-1} = A + 2I$

$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (I-2A)\cdot(I-2A) = I - 4A + 4A^2 = I - 4A + 4(I-2A) = 5I - 12A$, *entonces*

$p = 5$ y $q = -12$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \Rightarrow \quad A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2+k \\ -2+k & 1+k^2 \end{pmatrix}$$

$$I - 2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1-2k \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & -2+k \\ -2+k & 1+k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1-2k \end{pmatrix}$$

$$\text{entonces} \quad \begin{cases} -2+k = -2 \\ 1+k^2 = 1-2k \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} k = 0 \\ k^2 + 2k = 0 \Rightarrow k = 0\,,\ k = -2 \end{cases} \Rightarrow \ k = 0$$

Ejercicio 2.

- Sea A una matriz 4×4 tal que $|A| = -2$, calcula, justificando la respuesta:

  $|3A|$; $|-A^{-1}|$; $|A^4|$; $|2A \cdot A^{-1}|$; $|A \cdot A^t|$; $|(A^t)^{-1}|$; $|(A^{-1})^t|$

- Demostrar que si A es una matriz 3×3 tal que $A^t = -A$, entonces $|A| = 0$. ¿Y si A es una matriz $n \times n$, se verifica lo anterior?

$* \ |3A| = 3^4 \cdot |A| = 81 \cdot (-2) = -162 \qquad (A \text{ es una matriz } 4 \times 4)$

Como $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

$* \ |-A^{-1}| = (-1)^4 \cdot |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = -\dfrac{1}{2}$

$* \ |A^4| = |A \cdot A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| \cdot |A| = (-2)^4 = 16$

$* \ |2A \cdot A^{-1}| = |2I| = 2^4 \cdot |I| = 16$

$* \ |A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = |A| \cdot |A| = (-2)^2 = 4$

$* \ |(A^t)^{-1}| = \dfrac{1}{|A^t|} = \dfrac{1}{|A|} = -\dfrac{1}{2}$

$* \ |(A^{-1})^t| = |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = -\dfrac{1}{2}$

Sabemos que se cumple $|A| = |A^t|$; *como* $A \in M_{3\times3} \Rightarrow |-A| = (-1)^3 \cdot |A| = -|A|$, *entonces*

$A^t = -A \Rightarrow |A^t| = |-A| \Rightarrow |A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0$

Si $A \in M_{n\times n} \Rightarrow |-A| = (-1)^n |A| \Rightarrow$ *si n es impar* $|A| = 0$, *si n es par no se puede asegurar que* $|A| = 0$.

Ejercicio 3.

Hallar una matriz X tal que $A \cdot X \cdot A^t = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot X \cdot A^t = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot X \cdot \left(A^t\right)^{-1}, \quad pero \ \left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot X \cdot \left(A^{-1}\right)^t$$

$|A| = 1$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.

Resuelve la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} 5 & x & x & 3 \\ x & 5 & 3 & x \\ x & 3 & 5 & x \\ 3 & x & x & 5 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 5 & x & x & 3 \\ x & 5 & 3 & x \\ x & 3 & 5 & x \\ 3 & x & x & 5 \end{vmatrix}_{\substack{C_4 = C_4 - C_1 \\ C_3 = C_3 - C_2}} = \begin{vmatrix} 5 & x & 0 & -2 \\ x & 5 & -2 & 0 \\ x & 3 & 2 & 0 \\ 3 & x & 0 & 2 \end{vmatrix}_{\substack{F_1 = F_1 + F_4 \\ F_2 = F_2 + F_3}} = \begin{vmatrix} 8 & 2x & 0 & 0 \\ 2x & 8 & 0 & 0 \\ x & 3 & 2 & 0 \\ 3 & x & 0 & 2 \end{vmatrix}_{desarrollo \ por \ C_4} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2x & 0 \\ 2x & 8 & 0 \\ x & 3 & 2 \end{vmatrix}_{desarrollo \ por \ C_3} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2x \\ 2x & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot \left(64 - 4x^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad 4\left(64 - 4x^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 16 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$$