34 Halla el área comprendida entre las curvas $y = e^x$, $y = 2x - x^2$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

I. Hallamos la función diferencia: $y = e^x - (2x - x^2) = e^x + x^2 - 2x$

II. Buscamos su primitiva:

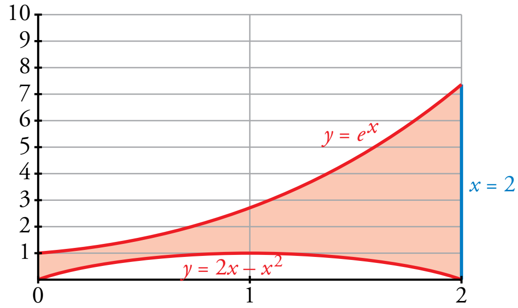
$$G(x) = e^x + \frac{x^3}{3} - x^2$$

III. $G(0) = 1$

$$G(2) = e^2 - \frac{4}{3}$$

$$G(2) - G(0) = e^2 - \frac{4}{3} - 1$$

El área buscada es: $\left(e^2 - \frac{4}{3} - 1\right)$ u^2.



Página 381

35 La curva $y = \dfrac{4}{x+4}$, los ejes de coordenadas y la recta $x = 4$ limitan una superficie S.

Calcula el área de S y el volumen de la figura engendrada por S al girar alrededor del eje X.

Buscamos una primitiva:

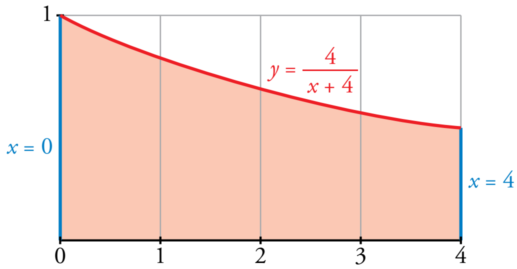
$$G(x) = 4 ln\,|x + 4|$$

$$G(0) = 4 ln\, 4$$

$$G(4) = 4 ln\, 8$$

$$G(4) - G(0) = 4(ln\, 8 - ln\, 4)$$

El área buscada es $4(ln\, 8 - ln\, 4)$ u^2.



$$V = \pi \int_0^4 \left(\frac{4}{x+4}\right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{-16}{x+4}\right]_0^4 = \frac{16}{8}\pi = 2\pi \ \text{u}^3$$

36 Halla el polinomio de segundo grado que pasa por los puntos (0, 1) y (3, 0), sabiendo que el área limitada por esa curva, el eje Y y el eje X positivo es 4/3.

Como el polinomio pasa por el punto (3, 0), una raíz es $x = 3$, por tanto:

$$y = (x - 3)(ax - b)$$

Por otro lado, cuando $x = 0$, $y = 1$:

$$1 = -3(-b) = 3b, \quad b = \frac{1}{3}$$

Luego queda:

$$y = (x - 3)\left(ax - \frac{1}{3}\right)$$

Puesto que pasa por los puntos indicados y está limitado por los ejes X e Y (positivos), los límites de integración son 0 y 3.

Así, buscamos la primitiva del polinomio:

$$G(x) = \int (x-3)\left(ax - \frac{1}{3}\right) dx = \int \left(ax^2 - 3ax + \frac{x}{3} + 1\right) dx = \frac{ax^3}{3} - 3a\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^2 + x$$

$$G(0) = 0$$

$$G(3) = 9a - \frac{27}{2}a - \frac{9}{6} + 3$$

$$G(3) - G(0) = 9a - \frac{27}{2}a - \frac{9}{6} + 3 = \frac{4}{3}$$

De donde sacamos que $a = \dfrac{1}{27}$.

Por tanto, el polinomio es:

$$y = (x-3)\left(\frac{1}{27}x - \frac{1}{3}\right)$$

37 **Halla la ecuación de una parábola de eje vertical, tangente en el origen de coordenadas a una recta de pendiente 4 y que delimita con el eje X un recinto de base [0, 3] y área 9.**

Del enunciado del problema se deduce que la parábola pasa por el origen de coordenadas. Supongamos que es de la forma $f(x) = ax^2 + bx$.

Como la pendiente de la recta tangente en el origen es 4 $\rightarrow$ $f'(0) = 4$.

$$f'(x) = 2ax + b,\ f'(0) = 4 \rightarrow b = 4 \rightarrow f(x) = ax^2 + 4x$$

Si la gráfica de la parábola queda por encima del eje X en el intervalo [0, 3], el área es:

$$\int_0^3 (ax^2 + 4x)\, dx = \left[\frac{ax^3}{3} + 2x^2\right]_0^3 = 9a + 18, \quad 9a + 18 = 9 \rightarrow a = -1$$

La parábola buscada es $f(x) = -x^2 + 4x$, cuya gráfica es positiva en el intervalo [0, 3].

38 **De la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en (0, 0) y que $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{5}{4}$. Calcula a, b, c y d.**

Hallamos $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ y $f''(x) = 6ax + 2b$

Sabemos que $f(x)$ pasa por el punto (0, 0), es decir, $f(0) = 0$, de donde averiguamos que $d = 0$.

Por otro lado, sabemos que tiene un máximo relativo en $x = 1$, esto es que $f'(1) = 0$, es decir:

$$3a + 2b + c = 0$$

También tiene un punto de inflexión en (0, 0), por lo que $f''(0) = 0$, de donde $b = 0$.

Como $3a + 2b + c = 0$ y $b = 0$, se tiene que:

$$3a + c = 0 \rightarrow c = -3a$$

Así, nuestra función queda reducida a la función:

$$f(x) = ax^3 - 3ax$$

Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \frac{ax^4}{4} - \frac{3ax^2}{2}$$

$$G(0) = 0,\ G(1) = \frac{a}{4} - \frac{3a}{2} = -\frac{5a}{4}$$

$$G(1) - G(0) = -\frac{5a}{4}$$

El resultado es $-\dfrac{5a}{4}$ que es igual a $\dfrac{5}{4}$, de donde deducimos que $a = -1$ y, por tanto, $c = 3$.

La función buscada es $f(x) = -x^3 + 3x$.

39 **Teniendo en cuenta que la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + k$ toma valores positivos y negativos, halla el valor de k de forma que el área de la región limitada por el eje X, las rectas $x = -1$, $x = 2$ y la curva $f(x)$ quede dividida por el eje X en dos partes con igual área.**

Supongamos que $x = a$ comprendido entre –1 y 2 es el punto donde nuestra función corta al eje X; por tanto, tenemos que distinguir dos intervalos de integración: de –1 a a y de a a 2.

Buscamos una primitiva de nuestra función:

$$G(x) = \frac{2x^4}{4} - x^3 + kx = \frac{x^4}{2} - x^3 + kx$$

$$G(-1) = \frac{3}{2} - k$$

$$G(2) = 2k$$

Si suponemos que en el primer intervalo la función es negativa, el área es:

$$G(-1) - G(a)$$

y si en el segundo intervalo la función es positiva, el área es:

$$G(2) - G(a)$$

Y como el área en los dos intervalos tiene que ser la misma, se tiene la siguiente igualdad:

$$G(-1) - G(a) = G(2) - G(a)$$

es decir:

$$G(-1) = G(2)$$

$$\frac{3}{2} - k = 2k \to k = \frac{1}{2}$$

Observa que se obtiene el mismo resultado independientemente de qué intervalo consideremos en el que la función es positiva o negativa.

40 **Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$, donde $0 < a < 1$. Ambas curvas se cortan en el punto (x_0, y_0) con abscisa positiva. Halla a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$.**

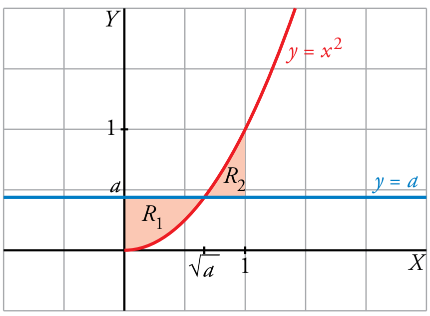
Hallamos los puntos de corte:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = a \end{array}\right\} \to x^2 = a \left\langle \begin{array}{l} x = \sqrt{a} \\ x = -\sqrt{a} \text{ (no vale porque la abscisa debe ser positiva)}. \end{array}\right.$$

El punto de corte es $(\sqrt{a}, a)$.

Dibujamos las áreas para tener una idea más clara de nuestro ejercicio:

Tenemos dos intervalos de integración: de 0 a $\sqrt{a}$ y de $\sqrt{a}$ a 1, que determinan los recintos R_1 y R_2 señalados en el gráfico.



• La función diferencia para el primer intervalo es:

$$f_1(x) = a - x^2$$

Su primitiva es:

$$G_1(x) = ax - \frac{x^3}{3}$$

$$G_1(0) = 0,\ \ G_1(\sqrt{a}) = a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} = \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

El área del primer intervalo es $\frac{2a\sqrt{a}}{3}$ u^2.

- La función diferencia en el segundo intervalo es:

$$f_2(x) = x^2 - a$$

Su primitiva es:

$$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - ax$$

$$G_2(\sqrt{a}) = \frac{a\sqrt{a}}{3} - a\sqrt{a},\ \ G_2(1) = \frac{1}{3} - a$$

$$G_2(1) - G_2(\sqrt{a}) = \frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

El área del segundo intervalo es $\frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$ u^2.

Como el área en los dos intervalos es igual, se tiene que:

$$\frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

De donde obtenemos que $a = \frac{1}{3}$.

41 **Sean $y = ax^2$ e $y = ax + a$ las ecuaciones de una parábola p y de una recta r, respectivamente. Demuestra las siguientes afirmaciones:**

a) Los puntos de corte de p y r no dependen del valor de a.

b) Si se duplica el valor de a, también se duplica el área encerrada entre p y r.

a) Los puntos de corte se obtienen al igualar ambas ecuaciones:

$$ax^2 = ax + a$$

$$ax^2 - ax - a = 0$$

$$a(x^2 - x - 1) = 0$$

Como suponemos $a \neq 0$, para que sean ciertamente una parábola y una recta, dividiendo toda la ecuación entre a, llegamos a:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

y sus soluciones son: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (que no dependen de a).

b) La función diferencia es:

$$f(x) = ax + a - ax^2 = a(-x^2 + x + 1)$$

Si llamamos $h(x) = -x^2 + x + 1$, se tiene que: $f_1(x) = a\,h(x)$

y la primitiva de $f(x)$ es a por la primitiva de $h(x)$, es decir:

$$G_1(x) = a\,H(x)$$

El área comprendida es, por tanto:

$$G_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - G_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = a\left(H\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - H\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\ \text{u}^2$$

Si duplicamos a, se tiene que la función diferencia es ahora:

$$f_2(x) = 2a\,h(x)$$

y su primitiva:

$$G_2(x) = 2a\,H(x)$$

Por lo que el área comprendida es:

$$G_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - G_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2a\left(H\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - H\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\ u^2$$

42 **Sabiendo que el área de la región comprendida entre la curva $y = x^2$ y la recta $y = bx$ es igual a $\frac{9}{2}$, calcula el valor de b.**

La curva $y = x^2$ y la recta $y = bx$ se cortan en el punto de abscisa $x = b$ y en $x = 0$.

Así, nuestros límites de integración son 0 y b.

La función diferencia es: $y = bx - x^2$

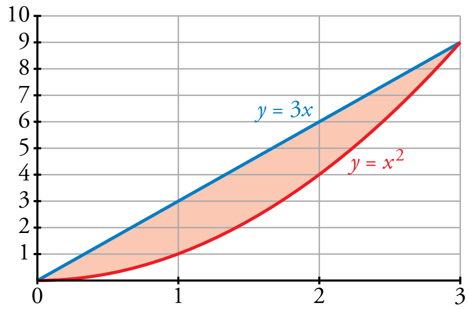
Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

$$G(0) = 0$$

$$G(b) = \frac{b^3}{6}$$

$$G(b) - G(0) = \frac{b^3}{6}$$



Como el área es $\frac{9}{2}$, se tiene que: $\frac{b^3}{6} = \frac{9}{2}$,

de donde obtenemos que $b = 3$.

43 **Calcula el valor de a para que el área de la región limitada por la curva $y = -x^2 + ax$ y el eje X sea igual a 36.**

La curva corta al eje X en los puntos de abscisa 0 y a (estos son los límites de integración).

Su primitiva es:

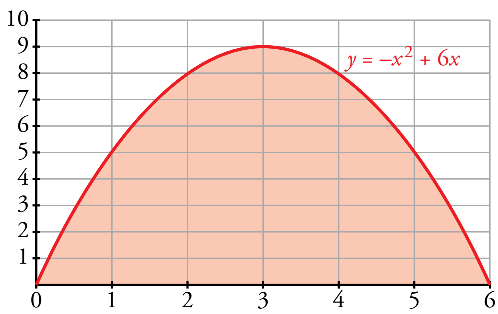
$$G(x) = \frac{-x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}$$

$$G(0) = 0$$

$$G(a) = \frac{a^3}{6}$$

$$G(a) - G(0) = \frac{a^3}{6}$$

Como el área es 36, se tiene que: $\frac{a^3}{6} = 36$, de donde averiguamos que $a = 6$.



44 **Dada la función** $y = \frac{2}{x+1}$ **calcula el valor de** a **para que el área limitada por esa curva y las rectas** $x = 0$ **y** $x = a$ **sea igual a 2.**

Buscamos su primitiva:

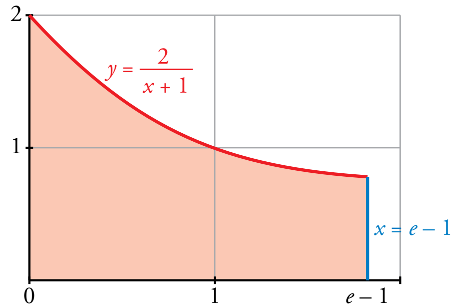
$G(x) = 2ln\,(x + 1)$

$G(0) = 0$

$G(a) = 2ln\,(a + 1)$

$G(a) - G(0) = 2ln\,(a + 1)$

Como el área es igual a 2, se tiene que: $2ln\,(a + 1) = 2$ de donde averiguamos que $a = e - 1$.



45 **Expresa la función de posición de un móvil sabiendo que su aceleración es constante de 8 cm/s², que su velocidad es 0 cuando** $t = 3$ **y que está en el origen a los 11 segundos.**

Llamamos $S(t)$ a la posición del móvil al cabo de t segundos. Así:

$V(t) = S'(t)$ y $a(t) = S''(t) = 8$ cm/s²

Calculamos la velocidad $V(t)$:

$$\left.\begin{array}{l} V(t) = \int a(t)\,dt = \int 8\,dt = 8t + k \\ V(3) = 24 + k = 0 \;\rightarrow\; k = -24 \end{array}\right\} \quad V(t) = 8t - 24$$

Calculamos $S(t)$:

$$S(t) = \int V(t)\,dt = \int (8t - 24)\,dt = 4t^2 - 24t + c$$

$$S(11) = 220 + c = 0 \;\rightarrow\; c = -220$$

Por tanto: $S(t) = 4t^2 - 24t - 220$

46 **Un móvil se desplaza en línea recta, con movimiento uniformemente acelerado, con aceleración de 2 m/s² y con velocidad inicial** $v_0 = 1$ **m/s. Calcula y compara las distancias recorridas entre** $t = 0$ **y** $t = 2$ **y entre** $t = 2$ **y** $t = 3$**.**

- Calculamos la velocidad del móvil:

$$\left.\begin{array}{l} V(t) = \int a(t)\,dt = \int 2\,dt = 2t + k \\ V(0) = k = 1 \end{array}\right\} \quad V(t) = 2t + 1$$

- Distancia recorrida entre $t = 0$ y $t = 2$:

$$d_1 = \int_0^2 V(t)\,dt = \int_0^2 (2t + 1)\,dt = \left[t^2 + t\right]_0^2 = 6 \text{ m}$$

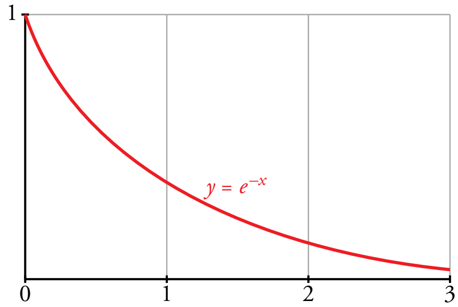
- Distancia recorrida entre $t = 2$ y $t = 3$:

$$d_2 = \int_2^3 V(t)\,dt = \left[t^2 + t\right]_2^3 = 12 - 6 = 6 \text{ m}$$

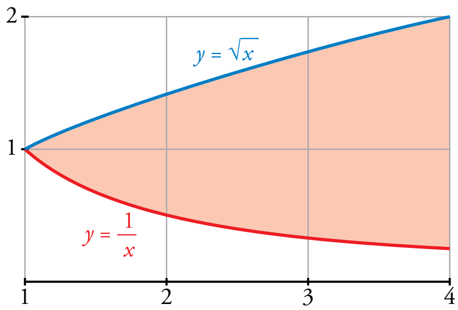
- Por tanto, recorre la misma distancia entre $t = 0$ y $t = 2$ que entre $t = 2$ y $t = 3$.

47 **Halla el volumen del cuerpo engendrado por la región del plano limitada por los ejes de coordenadas, la curva de ecuación $y = e^{-x}$ y la recta $x = 3$, al girar alrededor del eje X.**

$$V = \pi \cdot \int_0^3 (e^{-x})^2\, dx = \pi \cdot \int_0^3 e^{-2x}\, dx = \frac{\pi}{-2} \cdot \left[e^{-2x}\right]_0^3 = \frac{\pi}{-2} \cdot (e^{-6} - 1) \text{ u}^3$$



48 **Calcula el volumen que se obtiene al hacer girar alrededor del eje X el recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{x}$, $x = y^2$, $x = 4$.**



Las curvas $y = \frac{1}{x}$ y $x = y^2$ se cortan en el punto de abscisa 1.

Por tanto, nuestros límites de integración son 1 y 4.

El volumen buscado es el resultado de restar el volumen engendrado por la curva $y = \sqrt{x}$ alrededor de OX entre 1 y 4, y el volumen engendrado por la curva $y = \frac{1}{x}$ alrededor de OX entre los mismos límites.

$$V_1 = \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2\, dx = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 = \frac{15\pi}{2} \text{ u}^3$$

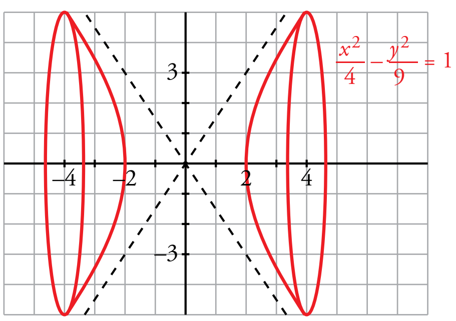
$$V_2 = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{-1}{x}\right]_1^4 = \frac{3\pi}{4} \text{ u}^3$$

El volumen buscado es:

$$V_1 - V_2 = \frac{15\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = \frac{27\pi}{4} \text{ u}^3$$

49 **Calcula el volumen engendrado por la hipérbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ cuando $x \in [-4, 4]$.**

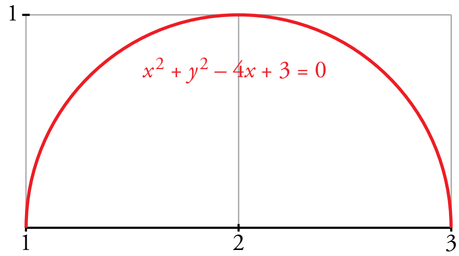
$$V = 2\pi \cdot \int_2^4 f(x)^2\, dx = 2\pi \cdot \int_2^4 \left(\frac{9x^2}{4} - 9\right) dx = 2\pi \cdot \left[\frac{3x^3}{4} - 9x\right]_2^4 = 2\pi \cdot 24 = 48\pi \text{ u}^3$$



50 **Halla el volumen engendrado por la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ al girar alrededor del eje X.**

El círculo del ejercicio tiene su centro en (2, 0) y radio 1; por tanto, corta al eje OX en (1, 0) y (3, 0). Así, nuestros límites de integración son 1 y 3.

$$(x-2)^2 + y^2 = 1$$



$$V = \pi \cdot \int_1^3 y^2\,dx = \pi \cdot \int_1^3 (1-(x-2)^2)\,dx = \pi \cdot \left[x - \frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^3 = \frac{4\pi}{3}\ \text{u}^3$$

51 **Halla la derivada de las funciones que se dan en los siguientes apartados:**

a) $F(x) = \int_0^x \cos t^2\,dt$

b) $F(x) = \int_0^{x^2} (t^2 + t)\,dt$

c) $F(x) = \int_4^x \frac{1}{1 + sen^2\,t}\,dt$

d) $F(x) = \int_0^{sen\,x} (1 + t)\,dt$

a) Como f es continua, podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$F'(x) = \cos x^2$

b) Como f es continua, también podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$F'(x) = [(x^2)^2 + x]\,2x = 2x^5 + 2x^3$

c) Del mismo modo:

$$F'(x) = \frac{1}{1 + sen\,x}$$

d) Análogamente:

$F'(x) = (1 + sen\,x) \cdot (sen\,x)' = (1 + sen\,x) \cdot \cos x$

52 **Sin resolver la integral, indica dónde hay máximo o mínimo relativo en la función:**

$$F(x) = \int_0^x (t^2 - 1)\,dt$$

Los máximos o mínimos relativos se obtienen para los valores de x donde la primera derivada es cero, en nuestro caso, $F'(x) = 0$.

Como f es continua, podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$F'(x) = x^2 - 1$

$F'(x) = 0$ en $x = -1$ y $x = 1$, así en los puntos de abscisa -1 y 1 hay máximos o mínimos relativos.

53 **Sabemos que $\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1 + x)$, siendo continua en $\mathbb{R}$. Calcula $f(2)$.**

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, se tiene que:

$f(x) = 2x(1 + x) + x^2$

$f(2) = 16$

54 **Sea $F(x) = \int_1^x \cos^2 t\,dt$. Halla los posibles extremos de dicha función en el intervalo $[0, 2\pi]$.**

Como $f(x) = \cos^2 x$ es continua en $[0, 2\pi]$, podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo, y así obtenemos la primera derivada de la función $F(x)$:

$F'(x) = \cos^2 x$

Esta tiene sus extremos en los valores de x en que $F'(x) = 0$, esto es en $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$.

Página 382

55 **Halla máximos y mínimos relativos de las funciones:**

a) $F(x) = \int_0^x (t-1)^2 (t+2)^2\, dt$ **b)** $G(x) = \int_1^x \frac{\log t}{t}\, dt$

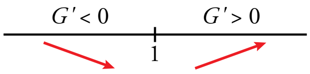
a) $F'(x) = (x-1)^2 (x+2)^2$

$F'(x) = 0 \rightarrow (x-1)^2 (x+2)^2 = 0 \rightarrow x = 1, \ x = -2$

Pero $F'(x) > 0$ cuando $x \neq 1$ y $x \neq -2$ por ser un cuadrado perfecto. Luego $F(x)$ es creciente y no tiene máximos ni mínimos relativos.

b) $G'(x) = \dfrac{\log x}{x}$ con $x > 0$

$G'(x) = 0 \rightarrow \log x = 0 \rightarrow x = 1$



El mínimo relativo se alcanza en $x = 1$.

$x = 1, \ G(1) = \int_1^1 \frac{\log t}{t}\, dt = 0 \rightarrow$ El mínimo relativo es el punto $(1, 0)$.

56 **Considera la región del plano que determinan las curvas $y = e^x$ e $y = e^{2x}$ y la recta $x = k$.**

a) Halla su área para $k = 1$.

b) Determina el valor de $k > 0$ para que el área sea 2.

a) Las funciones dadas se cortan en el punto $x = 0, \ y = 1$.

Si $k > 0$, el área es:

$$\int_0^k (e^{2x} - e^x)\, dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - e^x\right]_0^k = \frac{e^{2k}}{2} - e^k - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{2k}}{2} - e^k + \frac{1}{2}$$

Si $k < 0$, el área es:

$$\int_k^0 (e^x - e^{2x})\, dx = \left[e^x - \frac{e^{2x}}{2}\right]_k^0 = \frac{1}{2} - e^k + \frac{e^{2k}}{2}$$

b) $\dfrac{e^{2k}}{2} - e^k + \dfrac{1}{2} = 2 \rightarrow e^{2k} - 2e^k - 3 = 0$

Haciendo el cambio de variable $z = e^k$, obtenemos:

$z^2 - 2z - 3 = 0 \rightarrow z = 3, \ z = -1$ (no vale)

$e^k = 3 \rightarrow k = \ln 3$

57 **Calcula el área encerrada entre la curva $y = x^2 - 2x - 3$ y la cuerda de la misma que tiene por extremos los puntos de abscisas 0 y 1.**

Calculamos las coordenadas de los puntos:

$x = 0, \ y = -3 \rightarrow (0, -3)$

$x = 1, \ y = -4 \rightarrow (1, -4)$

La pendiente de la cuerda que pasa por ellos es: $m = \dfrac{-4+3}{1} = -1$

La ecuación de la recta que contiene a la cuerda es: $y = -3 - x$

$$G(x) = \int [(x^2 - 2x - 3) - (-3 - x)]\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

$$\int_0^1 [(x^2 - 2x - 3) - (-3 - x)]\, dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

El área buscada es $\dfrac{1}{6}$ u^2.

Cuestiones teóricas

58 **Calcula la derivada de la función dada por $F(x) = \int_0^{x^2} \cos t \, dt$ de dos formas:**

a) Obteniendo de forma explícita $F(x)$ y, después, derivando.

b) Aplicando el teorema fundamental del cálculo.

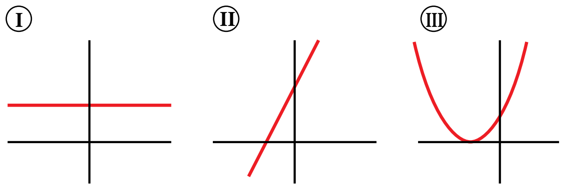
a) $F(x) = \left[sen\ t \right]_0^{x^2} = sen\ x^2$

$F'(x) = 2x \cos x^2$

b) Como f es una función continua en todos los puntos, se puede aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = f(x^2) \cdot (x^2)' = 2x \cos x^2$$

59 **La gráficas I, II y III corresponden, no necesariamente por ese orden, a las de una función derivable f, a su función derivada f' y a una primitiva F de f. Identifica cada gráfica con su función, justificando la respuesta.**

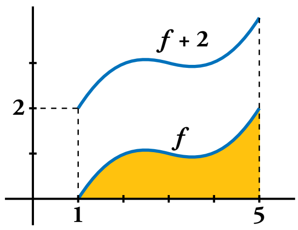


La gráfica II es la de la función; la gráfica I, la de su derivada y la gráfica III, la de su primitiva.

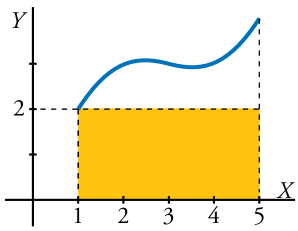
La razón es: partiendo de la gráfica II, observamos que se trata de una función lineal (afín) con pendiente positiva, por lo que la función derivada tiene que ser una función constante (la pendiente de la función afín).

Por otro lado, la primitiva de la función afín tiene que ser una función cuadrática, cuya gráfica corresponde a la parábola.

60 **Sabemos que el área limitada por una función f, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 5$ es igual a 6. ¿Cuánto aumentará el área si trasladamos 2 unidades hacia arriba la función f?**



Si trasladamos también el eje OX 2 unidades hacia arriba, es fácil ver que el área añadida es la de un rectángulo 4 u de base y 2 u de altura (su área es 8 u^2).



Es decir, su área aumentará 8 u^2. (No depende de lo que mida el área señalada).

61 **Si una función f es positiva para todos los valores de su variable, cualquier función primitiva de ella es creciente en cada uno de sus puntos. ¿Por qué?**

Cierto, puesto que si la primera derivada de una función es positiva, dicha función es creciente.

62 **Halla las derivadas de:**

a) $F(x) = \int_2^3 cos^3\, t\, dt$ **b)** $F(x) = \int_x^0 (1 + 3t^2)\, dt$

c) $F(x) = \int_1^a \frac{x}{1+t}\, dt$ **d)** $F(x) = \int_1^x \frac{x}{1+t}\, dt$

(Observa que la x puede salir fuera de la integral)

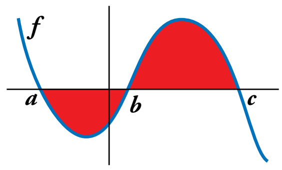
a) $F'(x) = 0$ por ser una función constante.

b) $F(x) = -\int_0^x (1 + 3t^2)\, dt$ $F'(x) = -1 - 3x^2$

c) $F(x) = x\int_1^a \frac{1}{1+t}\, dt$ $F'(x) = \int_1^a \frac{1}{1+t}\, dt$

d) $F(x) = x\int_1^x \frac{1}{1+t}\, dt$ $F'(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t}\, dt + x \cdot \frac{1}{1+x} = \int_1^x \frac{1}{1+t}\, dt + \frac{x}{1+x}$

63 **¿Cuál de las siguientes expresiones nos da el área limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas?**



a) $\int_a^c f$ **b)** $\left|\int_a^c f\right|$ **c)** $\int_a^b f + \int_b^c f$ **d)** $-\int_a^b f + \int_b^c f$

d)

64 **Dada la función $y = x^2$, halla el punto $c \in [0, 2]$ tal que el área $\int_0^2 x^2\, dx$ sea igual a la de un rectángulo de base 2 y altura $f(c)$.**

Es decir, que cumpla lo siguiente:

$$2f(c) = \int_0^2 x^2\, dx$$

¿Qué teorema asegura la existencia de c?

$$\int_0^2 x^2\, dx = \frac{8}{3}$$

Así pues, se tiene: $2f(c) = \frac{8}{3}$, de donde averiguamos que $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

El teorema que asegura la existencia de c es el teorema del valor medio del cálculo integral.

65 **Sea F una función definida en $[0, +\infty)$ tal que: $F(x) = \int_0^x ln\,(2 + t)\, dt$**

Analiza si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones:

a) $F(0) = ln\, 2$ **b)** $F'(x) = \frac{1}{2+x},\ x \geq 0$ **c)** F **es creciente en su dominio.**

a) Calculamos $G(t) = \int ln\,(2 + t)\, dt$ integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = ln\,(2+t) \ \to\ du = \frac{1}{2+t}\,dt \\ dv = dt \ \to\ v = t \end{array}\right\}$$

$$G(t) = \int ln\,(2+t)\, dt = t\, ln\,(2+t) - \int \frac{t}{2+t}\, dt = t\, ln\,(2+t) - \int \left(1 - \frac{2}{2+t}\right) dt =$$

$$= t\, ln\,(2+t) - t + 2ln\,(2+t) = (t+2)\, ln\,(2+t) - t$$

Por tanto:

$F(x) = G(x) - G(0) = [(x + 2)\, ln\, (2 + x) - x] - [2ln\, 2 - 0] = (x + 2)\, ln\, (x + 2) - x - 2ln\, 2$

$F(0) = 2ln\, 2 - 2ln\, 2 = 0$

La afirmación $F(0) = ln\, 2$ es falsa (basta ver, además, que en $F(0)$ no hay área).

b) Como f es continua para $x \ge 0$, aplicamos el teorema del cálculo integral:

$F'(x) = ln\,(2 + x)$

También es falsa.

c) Cierta, porque su derivada F' es positiva en todo el dominio.

66 Demuestra la desigualdad siguiente:

$$\mathbf{0 \le \int_0^{\pi/2} \frac{sen\, x}{1 + x^2}\, dx \le 1}$$

En el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se cumple que:

$$0 \le \frac{sen\, x}{1 + x^2} \le \frac{x}{1 + x^2}$$

ya que $0 \le sen\, x \le x$ en dicho intervalo.

Por tanto:

$$0 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen\, x}{1 + x^2}\, dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 + x^2}\, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 + x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2}\, ln\,(1 + x^2)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\, ln\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right) \approx 0,62 < 1$$

De esta forma queda probada la desigualdad.

Página 383

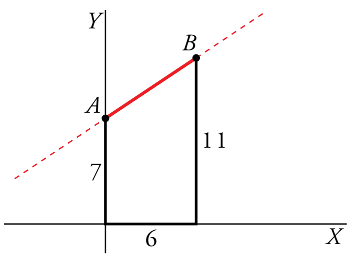
Para profundizar

67 a) Halla el volumen del tronco de cono de radios 7 cm y 11 cm y altura 6 cm.

b) Obtén la fórmula:

$$V = \frac{1}{3}\pi\, \mathrm{h}\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$

que nos da el volumen de un tronco de cono de radios r_1, r_2 y altura h.



a) La recta pasa por los puntos (0, 7) y (6, 11).

Obtenemos su ecuación:

$$m = \frac{11 - 7}{6 - 0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \text{ la recta es } y = 7 + \frac{2}{3}x$$

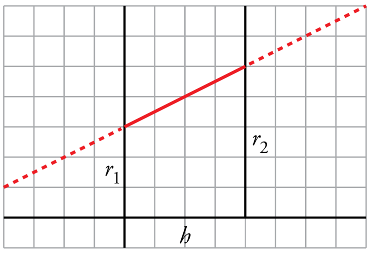
Los límites de integración son $x = 0$ y $x = 6$.

El volumen será:

$$V = \pi \cdot \int_0^6 \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^6 \left(7 + \frac{2}{3}x\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^6 \left(49 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2\right) dx =$$

$$= \pi \cdot \left[49x + \frac{2x^2}{3} + \frac{4x^3}{27}\right]_0^6 = 350\pi \ \text{u}^3$$

b)



La recta pasa por los puntos $(0, r)$ y (h, r_2).

Obtenemos la ecuación:

$$m = \frac{r_2 - r_1}{\text{h} - 0} = \frac{r_2 - r_1}{\text{h}} \rightarrow y = r_1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{\text{h}}\right) \cdot x$$

El volumen será:

$$V = \pi \cdot \int_0^{\text{h}} \left[r_1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{\text{h}}\right) x\right]^2 dx =$$

$$= \pi \cdot \int_0^{\text{h}} \left[r_1^2 + \left(\frac{r_2 - r_1}{\text{h}}\right)^2 \cdot x^2 + 2r_1 \left(\frac{r_2 - r_1}{\text{h}}\right) \cdot x\right] dx =$$

$$= \pi \cdot \left[r_1^2 + \left(\frac{r_2 - r_1}{\text{h}}\right)^2 \cdot \frac{x^3}{3} + r_1 \left(\frac{r_2 - r_1}{\text{h}}\right) \cdot x^2\right]_0^{\text{h}} =$$

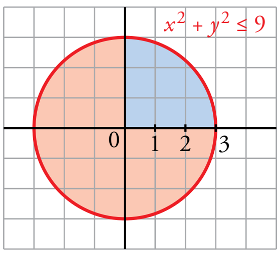
$$= \pi \cdot \left[r_1^2 \text{h} + \left(\frac{r_2 - r_1}{\text{h}}\right)^2 \cdot \frac{\text{h}^3}{3} + r_1 \cdot \left(\frac{r_2 - r_1}{\text{h}}\right) \cdot \text{h}^2\right] =$$

$$= \pi \cdot \text{h} \cdot \left[r_1^2 + \frac{1}{3} \cdot (r_2^2 + r_1^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 + r_1 r_2 - r_1^2\right] =$$

$$= \pi \cdot \text{h} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot r_2^2 + \frac{1}{3} \cdot r_1^2 - \frac{2}{3} \cdot r_1 r_2 + r_1 r_2\right] = \frac{1}{3} \pi \text{h} \left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$$

68 **a) Demuestra, utilizando el cálculo integral, que el área del círculo $x^2 + y^2 \le 9$ es 9π.**

b) Demuestra, utilizando el cálculo integral, que el volumen de la esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.



a) Área $= 4 \cdot \int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx$

Calculamos $G(x) = \int \sqrt{9 - x^2}\, dx$, mediante un cambio de variable:

$$G(x) = \int \sqrt{9 - x^2}\, dx = 3 \cdot \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2}\, dx$$

Cambio: $\frac{x}{3} = sen\ t \;\rightarrow\; x = 3sen\ t \;\rightarrow\; dx = 3cos\ t\ dt$

$$G(x) = 3 \cdot \int \sqrt{1 - sen^2\ t} \cdot 3cos\ t\ dt = 9 \int cos^2\ t\ dt =$$

$$= 9 \int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\ t}{2}\right) dt = 9\left[\frac{1}{2}\ t + \frac{1}{4}\ sen^2\ t\right] = \frac{9}{2}\ t + \frac{9}{4}\ sen^2\ t =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sen\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{9}{4} \cdot 2 \cdot \frac{x}{3} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} =$$

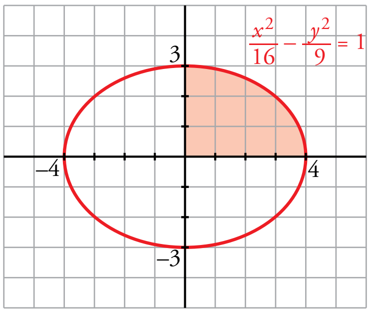
$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sen\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{3}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sen\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x \cdot \sqrt{9 - x^2}}{2}$$

Por tanto, el área será: $A = 4 \cdot (G(3) - G(0)) = 4 \cdot \frac{9\pi}{4} = 9\pi\ \text{u}^2$

b) $V = \pi \cdot \int_{-R}^{R} y^2\ dx = \pi \cdot \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\ dx = \pi \cdot \left[R^2\ x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \pi \cdot \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi\ R^3$

69 **Calcula el área encerrada por la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.**



- $\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{16} \;\rightarrow\; y^2 = 9 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{16}\right) \;\rightarrow\; y = \pm\, 3 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}$

- El área es:

$$A = 4 \cdot \int_0^4 3 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}\ dx = 12 \cdot \int_0^4 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}\ dx$$

- Calculamos $G(x) = \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}\ dx$:

Cambio: $\frac{x}{4} = sen\ t \;\rightarrow\; x = 4sen\ t \;\rightarrow\; dx = 4cos\ t\ dt$

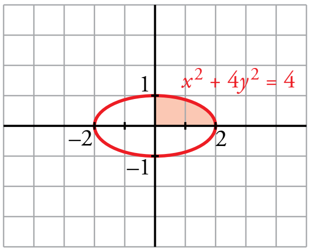
$$G(x) = \int \sqrt{1 - sen^2\ t} \cdot 4cos\ t\ dt = 4 \int cos^2\ t\ dt = 4 \cdot \int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\ t}{2}\right) dt =$$

$$= \int (2 + 2cos\ 2t)\ dt = 2t + sen\ 2t = 2arc\ sen\left(\frac{x}{4}\right) + 2 \cdot \frac{x}{4} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} =$$

$$= 2arc\ sen\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x\sqrt{16 - x^2}}{8}$$

- El área será: $A = 12 \cdot [G(4) - G(0)] = 12\pi$

70 Demuestra, utilizando el cálculo integral, que el área de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ es 2π.



- Despejamos y: $4y^2 = 4 - x^2 \to y^2 = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \to y = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$
- El área será: $A = 4 \cdot \int_0^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\, dx$
- Calculamos $G(x) = \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\, dx$

  Cambio: $\frac{x}{2} = sen\ t \to x = 2sen\ t \to dx = 2cos\ t\ dt$

  $$G(x) = \int \sqrt{1 - sen^2\ t} \cdot 2cos\ t\ dt = 2\int cos^2\ t\ dt = 2 \cdot \int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\ t}{2}\right) dt = \int (1 + cos\ 2t)\ dt =$$

  $$= t + \frac{sen^2\ t}{2} = arc\ sen\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = arc\ sen\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x \cdot \sqrt{4 - x^2}}{4}$$

- El área será:

  $$A = 4 \cdot [G(2) - G(0)] = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

71 Demuestra que el volumen del elipsoide obtenido al girar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es:

a) $\frac{4}{3}\pi\, a\, b^2$ si gira alrededor del eje X.

b) $\frac{4}{3}\pi\, a^2\, b$ si gira alrededor del eje Y.

a) $V = \pi \cdot \int_{-a}^{a} \left(b^2 - x^2 \frac{b^2}{a^2}\right) dx = \pi \cdot \left[b^2 x - \frac{x^3}{3} \cdot \frac{b^2}{a^2}\right]_{-a}^{a} = \pi \cdot \left(b^2 a - \frac{ab^2}{3} + b^2 a - \frac{ab^2}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi\, ab^2$

b) $V = \pi \cdot \int_{-b}^{b} \left(a^2 - y^2 \frac{a^2}{b^2}\right) dy = \pi \cdot \left[a^2 y - \frac{y^3}{3} \cdot \frac{a^2}{b^2}\right]_{-b}^{b} = \pi \cdot \left(a^2 b - \frac{ba^2}{3} + a^2 b - \frac{ba^2}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi\, ba^2$

72 Halla la derivada de la función siguiente:

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} x\ sen\ t\ dt$$

Si $G(x)$ es una primitiva de la función $g(x) = sen\ x$, entonces $\int_{x^2}^{x^3} sen\ t\ dt = G(x^3) - G(x^2)$.

La derivada, aplicando la regla de la cadena, es:

$$D\left[\int_{x^2}^{x^3} sen\ t\ dt\right] = D[G(x^3) - G(x^2)] = G'(x^3) \cdot 3x^2 - G'(x^2) \cdot 2x = 3x^2\ sen\ (x^3) - 2x\ sen\ (x^2)$$

Por tanto:

$$F'(x) = \int_{x^2}^{x^3} sen\ t\ dt + x[3x^2\ sen\ (x^3) - 2x\ sen\ (x^2)] = \int_{x^2}^{x^3} sen\ t\ dt + x^2\,[3x\ sen\ (x^3) - 2sen\ (x^2)]$$

73 Comprueba si existen y, en su caso, calcula las siguientes integrales impropias:

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^r}\,dx, \quad r>1$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x}\,dx$ g) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ h) $\displaystyle\int_2^{3} \frac{du}{(u-2)^2}$

a) $\displaystyle\int_0^{x} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \left[arc\ tg\ t\right]_0^x = arc\ tg\ x$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_0^{x} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty} arc\ tg\ x = \frac{\pi}{2}$$

b) $\displaystyle\int_1^{x} \frac{1}{t^r}\,dt = \left[\frac{1}{(1-r)\,t^{r-1}}\right]_1^x = \frac{1}{(1-r)\,x^{r-1}} - \frac{1}{1-r}$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_1^{x} \frac{1}{t^r}\,dt = \frac{1}{r-1}$, ya que $r-1>0$ y, por tanto, la primera fracción tiende a 0.

c) $\displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \left[arc\ tg\ t\right]_{-x}^x = arc\ tg\ x - arc\ tg\ (-x)$, con $x>0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \left[arc\ tg\ x - arc\ tg\ (-x)\right] = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

d) $\displaystyle\int_{-x}^{0} e^t\,dt = \left[e^t\right]_{-x}^0 = 1 - e^{-x}$, con $x>0$

$$\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{0} e^t\,dt = \lim_{x\to+\infty} (1-e^{-x}) = 1$$

e) $\displaystyle\int_x^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,dt = \left[\frac{3}{2}\,t^{2/3}\right]_x^1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x^{2/3}$

$$\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{x\to 0^+} \int_x^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x^{2/3}\right) = \frac{3}{2}$$

f) $\displaystyle\int_x^{1} \frac{1}{t}\,dt = \left[ln\ t\right]_x^1 = -ln\ x$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{1} \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0^+} (-ln\ x) = +\infty \ \rightarrow$ No existe la integral.

g) $\displaystyle\int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \left[arc\ sen\ t\right]_0^x = arc\ sen\ x$

$$\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{x\to 1^-} \int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \lim_{x\to 1^-} arc\ sen\ x = \frac{\pi}{2}$$

h) $\displaystyle\int_x^{3} \frac{du}{(u-2)^2} = \left[-\frac{1}{u-2}\right]_x^3 = -1 + \frac{1}{x-2}$

$\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \int_x^{3} \frac{du}{(u-2)^2} = \lim_{x\to 2^+} \left(-1 + \frac{1}{x-2}\right) = +\infty \ \rightarrow$ No existe la integral.

74 Si $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ y $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, halla el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{1} = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+e^x} = 1$$

Por tanto, el límite dado vale 1.

75 **Determina el valor del parámetro $a > 0$ de tal manera que valga 108 el área de la región del plano limitada por el eje X y la gráfica de la función siguiente:**

$$f(x) = a(x+2)^2 - (x+2)^3$$

La función corta al eje X en los puntos de abscisa –2 y $a - 2$. Nuestros límites de integración; buscamos una primitiva:

$$G(x) = \int [a(x+2)^2 - (x+2)^3]\, dx = a \cdot \frac{(x+2)^3}{3} - \frac{(x+2)^4}{4}$$

$$G(a-2) = \frac{a^4}{12}$$

$$G(-2) = 0$$

$$G(a-2) - G(2) = \frac{a^4}{12}$$

Como el área tiene que ser 108, igualamos:

$\dfrac{a^4}{12} = 108$. De donde obtenemos que $a = 6$.

Autoevaluación

Página 383

1 Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2$, calcula:

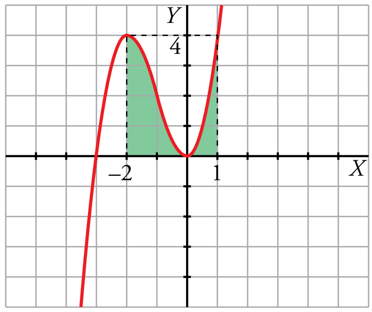
a) El área encerrada por la gráfica de $f(x)$, el eje X y las rectas $x = -2$ y $x = 1$.

b) El área de cada uno de los dos recintos comprendidos entre las gráficas de $f(x)$ y de $g(x) = x + 3$.

a) Representamos el recinto:

- Cortes con el eje OX:

$$x^3 + 3x^2 = 0 \rightarrow x^2(x+3) = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 0 \end{cases}$$



- Puntos singulares:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \rightarrow x(3x+6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$f''(x) = 6x + 6 \begin{cases} f''(0) = 6 > 0 \rightarrow \text{Mínimo: } (0, 0) \\ f''(-2) = -6 < 0 \rightarrow \text{Máximo: } (-2, 4) \end{cases}$$

$$\text{Área} = \int_{-2}^{1} (x^3 + 3x^2)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3\right]_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{4} + 1\right) - (4 - 8) = \frac{21}{4} \text{ u}^2$$

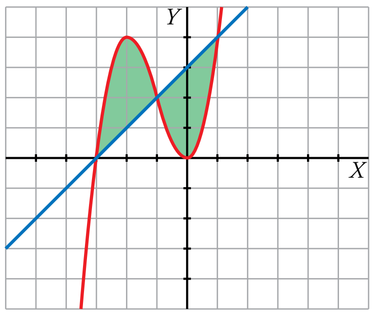
b) • Representamos $f(x) = x^3 + 3x^2$ y $g(x) = x + 3$:

Hallamos los puntos de corte de f y g:

$$x^3 + 3x^2 = x + 3 \rightarrow x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

	1	3	–1	–3
–3		–3	0	3
	1	0	–1	0

$$x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$



Las gráficas se cortan en $x = -3$, $x = -1$ y $x = 1$.

- Calculamos el área entre –3 y –1 y el área entre –1 y 1:

$$\int_{-3}^{-1} [(x^3 + 3x^2) - (x + 3)]\, dx = \int_{-3}^{-1} (x^3 + 3x^2 - x - 3)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x\right]_{-3}^{-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right) - \left(\frac{81}{4} - 27 - \frac{9}{2} + 9\right) = \frac{7}{4} - \left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{7}{4} + \frac{9}{4} = 4 \text{ u}^2$$

$$\int_{-1}^{1} [(x + 3) - (x^3 + 3x^2)]\, dx = \int_{-1}^{1} (x + 3 - x^3 - 3x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{x^4}{4} - x^3\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 3 - \frac{1}{4} - 1\right) - \left(\frac{1}{2} - 3 - \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{9}{4} - \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{9}{4} + \frac{7}{4} = \frac{16}{4} = 4 \text{ u}^2$$

2 **Calcula el área del recinto limitado por $f(x) = x^2 - 2x + 2$, el eje Y y la recta tangente a f en $x = 3$.**

- Calculamos la tangente a $f(x) = x^2 - 2x + 2$ en $x = 3$:

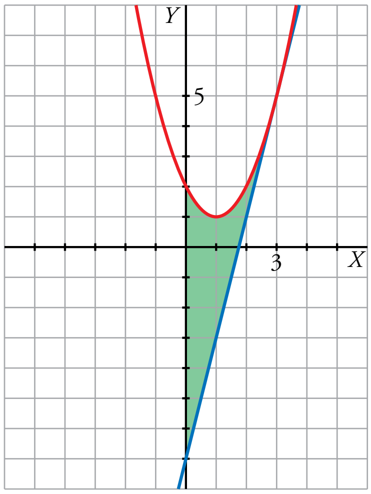
  Punto de tangencia: $x = 3$, $f(3) = 9 - 6 + 2 = 5 \to (3, 5)$

  Pendiente de la recta tangente: $f'(x) = 2x - 2 \to m = f'(3) = 4$

  Ecuación de la recta tangente: $y = 5 + 4(x - 3) \to y = 4x - 7$

- Representamos el recinto:

  $f(x) = x^2 - 2x + 2$



  Vértice de la parábola:

  $f'(x) = 0 \to 2x - 2 = 0 \to x = 1,\ f(1) = 1 \to (1, 1)$

  Corte con los ejes:

  $x = 0,\ f(0) = 2 \to (0, 2)$

  $x^2 - 2x + 2 = 0 \to x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2}$

  No corta al eje OX.

- Calculamos el área:

$$A = \int_0^3 [(x^2 - 2x + 2) - (4x - 7)]\, dx = \int_0^3 (x^2 - 6x + 9)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_0^3 = 9\ \text{u}^2$$

3 **Calcula:** $\displaystyle\int_0^2 |2x - 1|\, dx$

La función se descompone de la siguiente manera:

$$f(x) = |2x - 1| = \begin{cases} -2x + 1 & x \le \dfrac{1}{2} \\ 2x - 1 & x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (-2x + 1)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x - 1)\, dx = \left[-x^2 + x\right]_0^{1/2} + \left[x^2 - x\right]_{1/2}^2 =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 4 - 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

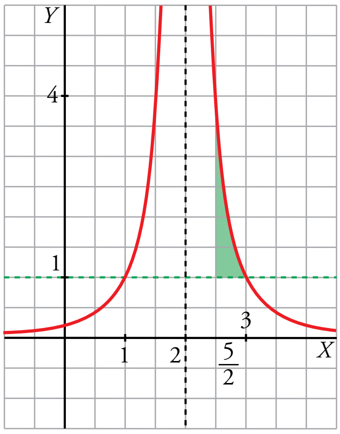
4 **Halla el área de la región comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ y las rectas $y = 1$, $x = \dfrac{5}{2}$.**

Representamos la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$:

- Asíntota vertical: $x = 2$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$
- Asíntota horizontal: $y = 0$
- Puntos singulares: $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$ para cualquier $x \to$ No tiene puntos singulares.
- Punto de corte con la recta $y = 1$:

$$\frac{1}{(x-2)^2} = 1 \to (x-2)^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \to (1, 1) \\ x = 3 \to (3, 1) \end{cases}$$

Recinto:



$$\text{Área} = \int_{\frac{5}{2}}^{3} \left[\frac{1}{(x-2)^2} - 1\right] dx =$$

$$= \left[\frac{-1}{x-2} - x\right]_{\frac{5}{2}}^{3} = -4 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2} \text{ u}^2$$

5 **Calcula el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ y la cuerda a la misma que une los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = 2$.**

Ecuación de la cuerda:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \to f(0) = e^0 = 1 \\ x = 2 \to f(2) = e^2 \end{array}\right\} \text{ Recta que pasa por } (0,\ 1) \text{ y por } (2,\ e^2):$$

$$m = \frac{e^2-1}{2} \to y = 1 + \frac{e^2-1}{2}x$$

Área:

$$\int_0^2 \left(1 + \frac{e^2-1}{2}x - e^x\right) dx = \left[x + \frac{e^2-1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - e^x\right]_0^2 = (2 + e^2 - 1 - e^2) - (0 + 0 - e^0) = 1 + 1 = 2 \text{ u}^2$$

6 **Dada la función $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \ln t \, dt$ con $x \geq 1$:**

a) Calcula $F'(e)$.

b) ¿Tiene F puntos de inflexión? Justifica tu respuesta.

a) $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \ln t \, dx \to F'(x) = (\ln x^2) \cdot 2x = (2\ln x)\, 2x = 4x \ln x$

$F'(e) = 4e \ln e = 4e$

b) $F''(x) = 4\ln x + 4x \cdot \dfrac{1}{x} = 4\ln x + 4;\ \ 4\ln x + 4 = 0 \to \ln x = -1 \to x = e^{-1}$

F no tiene puntos de inflexión porque $e^{-1} < 1$; es decir, e^{-1} no pertenece al dominio de F.

7 **a) Halla, integrando la función adecuada en el intervalo que convenga, el volumen de un cono de radio 5 cm y altura 6 cm.**

b) Procediendo de forma similar, deduce la fórmula del volumen de un cono de radio r y altura a.

a) La recta $y = \frac{5}{6}x$ pasa por los puntos (0, 0) y (6, 5).

El cono dado se puede obtener girando el segmento que une los puntos anteriores alrededor del eje X. El volumen es:

$$V = \pi \cdot \int_0^6 \left(\frac{5}{6}x\right)^2 dx = \frac{25\pi}{36}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^6 = \frac{25\pi}{36} \cdot \frac{6^3}{3} = 50\pi \ \text{u}^3$$

b) La recta $y = \frac{r}{a}x$ pasa por los puntos (0, 0) y (a, r).

El cono de altura a y radio r se puede obtener girando el segmento que une los puntos anteriores alrededor del eje X. El volumen es:

$$V = \pi \cdot \int_0^a \left(\frac{r}{a}x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{\pi r^2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 a \ \text{u}^3$$

Autoevaluación

Página 384

1 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x} \right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\cot g\, x - \dfrac{1}{x} \right)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{\ln (\cos x)}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} (x + e^{2x})^{1/x}$

a) $$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(1/x) - 1}{\ln x + \dfrac{x-1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x \to 1} \frac{-1/x^2}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x \to 0} \left(\cot g\, x - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x - x \cos x}{2\cos x - x \operatorname{sen} x} = 0$$

c) $$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{\ln(\cos x)} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{-\operatorname{tg} x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{-\dfrac{1}{\cos^2 x}} = 0$$

d) Tomamos logaritmos:

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} \ln (x + e^{2x}) \right] = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + e^{2x})}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1 + 2e^{2x}}{x + e^{2x}}}{1} = 3$$

Por tanto: $\lim\limits_{x \to 0} (x + e^{2x})^{1/x} = e^3$

2 a) Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x + b & \text{si } x \le 1 \\ ax^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

halla los parámetros a y b para que sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

b) Represéntala.

a) La función está definida por intervalos mediante funciones polinómicas. Por tanto, para que sea derivable en $\mathbb{R}$, solo es necesario comprobar su derivabilidad (y continuidad) en $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (-x^3 + 2x + b) = -1 + 2 + b \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (ax^2 - 1) = a - 1 \end{cases} \to 1 + b = a - 1 \text{ garantiza la continuidad ya que } \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 2 & \text{si } x < 0 \to f'(1^-) = -1 \\ 2a & \text{si } x > 0 \to f'(1^+) = 2a \end{cases} \to a = -\frac{1}{2};\ b = -\frac{5}{2}$$

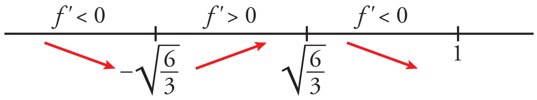
La función es $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 2x - \dfrac{5}{2} & \text{si } x \le 0 \\ \left(-\dfrac{1}{2}\right)x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) La primera parte es un polinomio de tercer grado que tiene una rama infinita cuando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(-x^3 + 2x - \frac{5}{2} \right) = +\infty$$

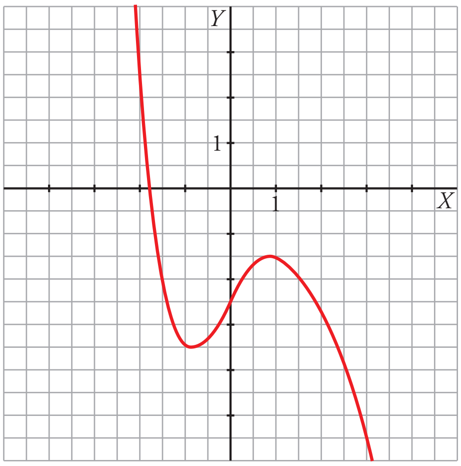
Puntos singulares:

$-3x^2 + 2 = 0 \;\to\; x = -\dfrac{\sqrt{6}}{3},\; x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$



En $x = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ hay un mínimo relativo y en $x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ hay un máximo relativo.

La segunda parte es un polinomio de segundo grado, con coeficiente principal negativo.



3 **Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^x & \text{si } x \le 0 \\ a + x\, ln\, x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Halla el valor de a para que f sea continua en $\mathbb{R}$.

b) Calcula $f'(x)$ donde sea posible.

c) Halla $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\, dx$.

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 0^-} (x^2 e^x) = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to 0^+} (a + x\, ln\, x) = a \end{cases}$

Tenemos que $a = 0$, ya que: $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (x\, ln\, x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{ln\, x}{1/x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$

Cuando $a = 0$ se cumple que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ y la función es continua en $x = 0$. La continuidad en los demás números reales está asegurada por la definición de las dos ramas que la forman.

b) $f'(x) = \begin{cases} e^x(2x + x^2) & \text{si } x < 0 \\ ln\, x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

No existe $f'(0^+)$, luego no es derivable en $x = 0$.

c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} x^2 e^x\, dx$

$G(x) = \displaystyle\int x^2 e^x\, dx$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = x^2 \;\to\; du = 2x\, dx \\ dv = e^x\, dx \;\to\; v = e^x \end{cases}$$

$G(x) = x^2 e^x - 2\int xe^x\,dx = x^2 e^x - 2I$

Volvemos a integrar por partes para calcular I:

$$\begin{cases} u = x \ \to \ du = dx \\ dv = e^x\,dx \ \to \ v = e^x \end{cases}$$

$I = \int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$

$G(x) = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$

$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = G(0) - G(-1) = 2 - \dfrac{5}{e}$

4 **a) Estudia el crecimiento de la siguiente función:**

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$$

b) Demuestra que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución real y localiza un intervalo de longitud 1 que la contenga.

c) Represéntala.

a) $f'(x) = 2 + 6x + 12x^2$

Calculamos los puntos singulares:

$f'(x) = 0 \ \to \ 2 + 6x + 12x^2 = 0 \ \to$ No tiene solución

Como $f'(x) > 0$ para cada x, la función es creciente en $\mathbb{R}$.

b) Consideremos la función en el intervalo $[-1, 0]$:

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y, en particular, en el intervalo anterior.

$f(-1) = -2, \ f(0) = 1$

Por el teorema de Bolzano, existe un valor $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$. Esta es la solución real de la ecuación. Además, es la única posible debido a que la función es creciente en $\mathbb{R}$.

c) La función corta al eje vertical en el punto $(0, 1)$.

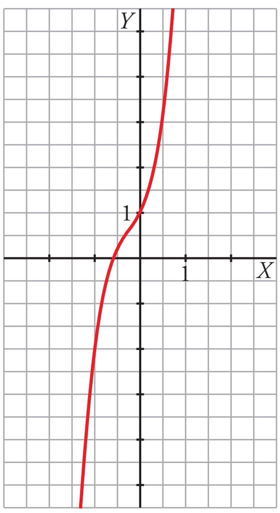
$f''(x) = 6 + 24x$

$f''(x) = 0 \ \to \ 6 + 24x = 0 \ \to \ x = -\dfrac{1}{4}$

En $x = -\dfrac{1}{4}$ hay un punto de inflexión porque pasa de convexa a cóncava.

$$x = -\frac{1}{4}, \ y = 1 + 2\left(-\frac{1}{4}\right) + 3\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{5}{8}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, su gráfica es:



5 **Estudia las asíntotas y los máximos y mínimos de la función de ecuación $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{e^x}$. Representa su gráfica.**

- Asíntotas:

  No tiene asíntota vertical.

  Horizontal:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{e^x} = 0 \;\to\; y = 0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \to +\infty.$$

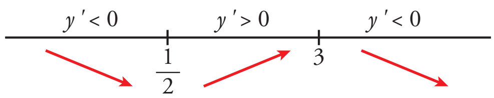
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 3x}{e^x} = \frac{+\infty}{0} = +\infty$$

  No tiene asíntota oblicua: $m = \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 3x}{e^x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 3}{e^x} = 0$

- Máximos y mínimos:

$$y' = \frac{-2x^2 + 7x - 3}{e^x};\; y' = 0 \;\to\; -2x^2 + 7x - 3 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 3,\; f(3) = \dfrac{9}{e^3} \\[2mm] x = \dfrac{1}{2},\; f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-1}{e^{1/2}} \end{array} \right.$$

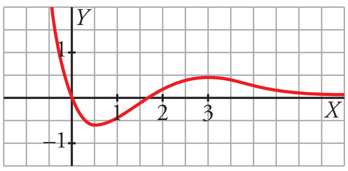
  Estudiamos el signo de y':



  Máximo $\left(3, \dfrac{9}{e^3}\right) \approx (3;\, 0{,}45)$

  Mínimo $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{e^{1/2}}\right) \approx (0{,}5;\, -0{,}6)$

- Representación:



6 **Considera la función $f(x) = \dfrac{x^2}{|x - 1|}$.**

a) Determina sus asíntotas y estudia la posición de la curva con respecto a ellas.

b) Calcula sus extremos relativos.

c) Represéntala gráficamente.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1 - x} & \text{si } x < 1 \\[2mm] \dfrac{x^2}{x - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1\}$.

- Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{|x - 1|} = +\infty \text{ ya que es un cociente de números positivos.}$$

  La recta $x = 1$ es la asíntota vertical.

- Asíntotas horizontales no tiene.

- Asíntotas oblicuas:

Si $x > 1$, $\dfrac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ $\longrightarrow$ La recta $y = x + 1$ es la asíntota oblicua cuando $x \longrightarrow +\infty$.

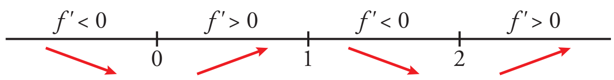
$f(x) - x - 1 = \dfrac{1}{x-1} > 0$ $\longrightarrow$ La función queda por encima de la asíntota.

Si $x > 1$, $\dfrac{x^2}{1-x} = -x - 1 - \dfrac{1}{x-1}$ $\longrightarrow$ La recta $y = -x - 1$ es la asíntota oblicua cuando $x \longrightarrow -\infty$.

$f(x) + x + 1 = -\dfrac{1}{x-1} > 0$ $\longrightarrow$ La función queda por encima de la asíntota.

b) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2 + 2x}{(1-x)^2} & \text{si } x < 1 \\[2ex] \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

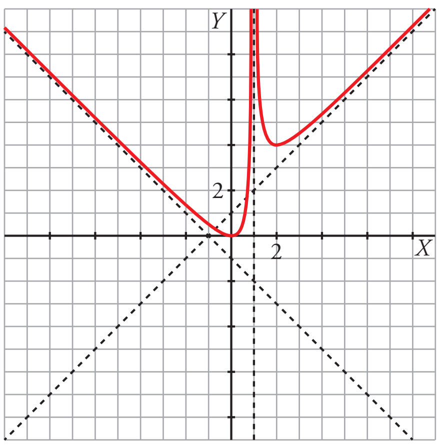
$f'(x) = 0 \ \longrightarrow \ \begin{cases} -x^2 + 2x = 0 \ \longrightarrow \ x = 0, \ x = 2 \ \text{(no es un punto en el dominio de esta rama)} \\ x^2 - 2x = 0 \ \longrightarrow \ x = 0 \ \text{(tampoco está en el dominio)}, \ x = 2 \end{cases}$



$x = 0$, $y = 0$ $\longrightarrow$ (0, 0) es un mínimo relativo.

$x = 2$, $y = 4$ $\longrightarrow$ (2, 4) es un mínimo relativo.

c)



7 **Dada la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{a - x}$ para $x \neq a$, calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto (2, 3) y tenga una asíntota oblicua de pendiente –4. Representa la función para los valores de a y b obtenidos.**

f pasa por (2, 3) $\longrightarrow f(2) = 3 \longrightarrow \dfrac{4a + b}{a - 2} = 3$

La pendiente de la asíntota oblicua es:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2 + b}{ax - x^2} = -a \ \longrightarrow \ -a = -4 \ \longrightarrow \ a = 4$$

$$\frac{16 + b}{4 - 2} = 3 \ \longrightarrow \ b = -10$$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{4x^2 - 10}{4 - x} = -4x - 16 - \dfrac{54}{x - 4}$

Cortes con los ejes:

Eje X: $f(x) = 0 \ \to \ 4x^2 - 10 = 0 \ \to \ x = \dfrac{\sqrt{10}}{2}, \ x = -\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Eje Y: $f(0) = -\dfrac{5}{2}$

La recta $x = 4$ es la asíntota vertical de la función.

La asíntota oblicua es la recta $y = -4x - 16$.

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2(-2x^2 + 16x - 5)}{(x-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \ \to \ -2x^2 + 16x - 5 = 0 \ \to \ x = \frac{8 + 3\sqrt{6}}{2}, \ x = \frac{8 - 3\sqrt{6}}{2}$$

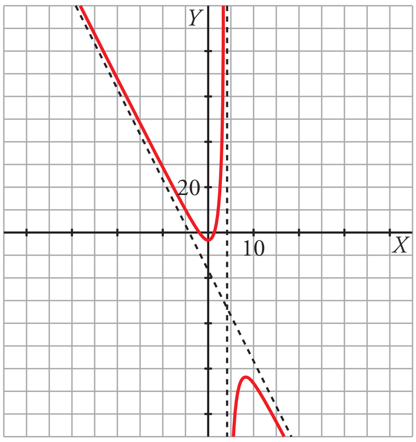
$f' < 0$		$f' > 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
↘	$\frac{8-3\sqrt{6}}{2}$	↗	4	↗	$\frac{8+3\sqrt{6}}{2}$	↘

En $x = \dfrac{8 - 3\sqrt{6}}{2}$ hay un mínimo relativo.

En $x = \dfrac{8 + 3\sqrt{6}}{2}$ hay un máximo relativo.

$$x = \frac{8 - 3\sqrt{6}}{2}, \ y = \frac{4\left(\frac{8 - 3\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 10}{4 - \frac{8 - 3\sqrt{6}}{2}} = 12\sqrt{6} - 32$$

$$x = \frac{8 + 3\sqrt{6}}{2}, \ y = \frac{4\left(\frac{8 + 3\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 10}{4 - \frac{8 + 3\sqrt{6}}{2}} = -12\sqrt{6} - 32$$



8 **Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Halla los valores de a, b, c y d sabiendo que $f(x)$ tiene un extremo local en el punto de abscisa $x = 0$, que el punto (1, 0) es un punto de inflexión y que la pendiente de la recta tangente en dicho punto es –3. Represéntala.**

$f(x)$ tiene un extremo local en $x = 0 \ \to \ f'(0) = 0$

El punto (1, 0) es un punto de inflexión $\to \begin{cases} f(1) = 0 \\ f''(1) = 0 \end{cases}$

La pendiente de la tangente en $x = 1$ es $-3 \ \to \ f'(1) = -3$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f'(0) = 0 \rightarrow c = 0$

$f(1) = 0 \rightarrow a + b + d = 0$

$f''(1) = 0 \rightarrow 6a + 2b = 0$

$f'(1) = -3 \rightarrow 3a + 2b = -3$

$$\left.\begin{array}{l} 6a + 2b = 0 \\ 3a + 2b = -3 \end{array}\right\} \rightarrow a = 1,\ b = -3$$

$1 - 3 + d = 0 \rightarrow d = 2$

La función es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Para representar la función solo necesitamos los cortes con los ejes y los puntos singulares.

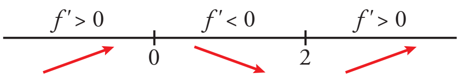
Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \rightarrow x = 1 + \sqrt{3},\ x = 1 - \sqrt{3},\ x = 1$

Con el eje Y: $f(0) = 2$

Puntos singulares:

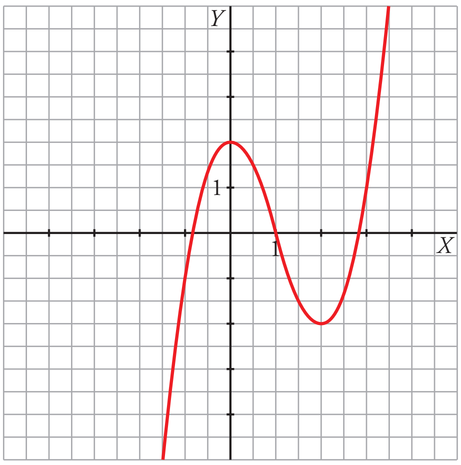
$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2$



El punto (0, 2) es un máximo relativo.

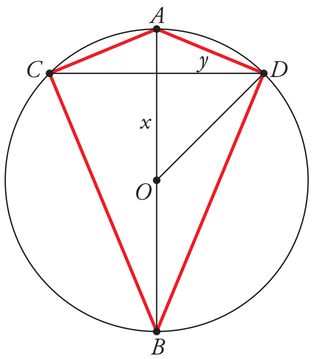
El punto (2, –2) es un mínimo relativo.



9 **En una circunferencia de centro *O* y radio 10 cm, se traza un diámetro *AB* y una cuerda *CD* perpendicular a ese diámetro.**

¿A qué distancia del centro *O* debe estar esa cuerda para que la diferencia entre las áreas de los triángulos *ADC* y *BCD* sea máxima?

Consideremos el dibujo:



$y = \sqrt{100 - x^2}$

El área del triángulo superior es: $\dfrac{2\sqrt{100 - x^2}\,(10 - x)}{2} = \sqrt{100 - x^2}\,(10 - x)$

El área del triángulo inferior es: $\dfrac{2\sqrt{100 - x^2}\,(10 + x)}{2} = \sqrt{100 - x^2}\,(10 + x)$

La diferencia de las áreas es:

$$f(x) = \sqrt{100 - x^2}\,(10 + x) - \sqrt{100 - x^2}\,(10 - x) = 2x\sqrt{100 - x^2} \quad \text{con} \quad 0 < x < 10$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{-2x^2 + 100}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x^2 + 100 = 0 \;\rightarrow\; x = 5\sqrt{2}$$

Se puede ver fácilmente, estudiando el signo de la derivada primera, que en el valor obtenido hay un máximo relativo.

La distancia del origen a la que debe estar la cuerda es de $5\sqrt{2}$ cm.

10 **Calcula a y b para que se pueda aplicar el teorema de Rolle a la función:**

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ -2 + \sqrt{x - 1} & \text{si } 2 < x \le 5 \end{cases}$$

en el intervalo [0, 5]. ¿En qué punto se cumplirá el teorema?

- f debe ser continua en $x = 2$. Por ello:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} ax + bx^2 = 2a + 4b \\ \lim\limits_{x \to 2^+} -2 + \sqrt{x - 1} = -2 + 1 = -1 \end{array}\right\} \; 2a + 4b = -1$$

- f debe ser derivable en $x = 2$:

$$f'(x) = \begin{cases} a + 2bx & 0 \le x < 2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x - 1}} & 2 < x \le 5 \end{cases} \;\rightarrow\; a + 4b = \frac{1}{2\sqrt{2 - 1}} = \frac{1}{2}$$

Resolvemos este sistema de dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2a + 4b = -1 \\ a + 4b = 1/2 \end{array}\right\} \; a = -\frac{3}{2}, \; b = \frac{1}{2}$$

- $f(0) = 0$; $f(5) = -2 + \sqrt{5 - 1} = 0$

f cumple las hipótesis del teorema de Rolle. Este dice que si f es una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$, existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Buscamos el punto donde se cumple el teorema:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}x^2 & 0 \le x \le 2 \\ -2 + \sqrt{x - 1} & 2 < x \le 5 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2} + x & 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x - 1}} & 2 < x \le 5 \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2} + x = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{3}{2}$$

En $x = \dfrac{3}{2}$, se verifica que $f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$.

11 **Dada la función $f(x) = x^x - 2^x + 1$:**

a) Prueba que existe algún $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

b) ¿Podemos asegurar que existe un $\beta \in (1, 3)$ tal que $f(\beta) = 10$?

c) Escribe la ecuación de la recta tangente a f en el punto de abscisa 2.

a) Calculamos primero la derivada de $g(x) = x^x$ tomando logaritmos.

$$\ln g(x) = x \ln x \;\to\; \frac{g'(x)}{g(x)} = \ln x + 1 \;\to\; g'(x) = x^x(\ln x + 1)$$

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1) - 2^x \ln 2$$

La función $f'(x)$ es continua cuando $x > 0$. En particular, lo es en el intervalo $[1, 2]$.

$$f'(1) = 1 - 2\ln 2 < 0$$

$$f'(2) = 4 > 0$$

Aplicando el teorema de Bolzano a $f'(x)$ deducimos que existe $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

b) La función es continua en el intervalo $[1, 3]$.

$$f(1) = 0$$

$$f(3) = 3^3 - 2^3 + 1 = 20$$

Aplicando el teorema de los valores intermedios (de Darboux), la función toma todos los valores comprendidos entre 0 y 20. Luego existe $\beta \in (1, 3)$ tal que $f(\beta) = 10$.

c) $x = 2$, $f(2) = 1$, $f'(2) = 4 \to$ La recta tangente es $y = 1 + 4(x - 2)$.

12 **Justifica si se puede aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x) = 1 + x|x|$ en el intervalo $[-1, 1]$ y, en caso afirmativo, calcula los puntos donde se cumple el teorema.**

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 + x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \to f'(0^-) = 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \to f'(0^+) = 0 \end{cases} \to f'(0^-) = f'(0^+) = 0$$

Por todo lo anterior, la función es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Por tanto, cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 1]$.

Luego existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \dfrac{2 - 0}{2} = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} -2x = 1 \to x = -\dfrac{1}{2} \\ 2x = 1 \to x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$ Son los valores donde se cumple el teorema.

13 **Calcula el valor de $a > 0$ para que el valor del área de la región determinada por la parábola $f(x) = -x^2 + a^2$ y el eje de abscisas, coincida con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = -a$.**

La pendiente de la recta tangente en $x = -a$ es:

$$f'(x) = -2x \to f'(a) = 2a$$

La parábola corta al eje de abscisas en $x = -a$ y en $x = a$.

Por la simetría respecto del eje Y, el área es:

$$A = 2\int_0^a (-x^2 + a^2)\,dx = 2\left[-\frac{x^3}{3} + a^2 x\right]_0^a = 2 \cdot \frac{2}{3}a^3 = \frac{4}{3}a^3$$

Como la pendiente y el área son iguales:

$$2a = \frac{4}{3}a^3 \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ a = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \ \text{(no es un punto que cumpla } a > 0) \\ a = 0 \ \text{(tampoco es un punto válido)} \end{cases}$$

Luego $a = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

14 Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{2sen\, x\, cos\, x}{1 + sen^2\, x}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{cos^2\, x}{sen\, x}\, dx$

a) $\displaystyle\int \frac{2sen\, x\, cos\, x}{1 + sen^2\, x}\, dx = ln\,(1 + sen^2\, x) + k$, porque $D[1 + sen^2\, x] = 2sen\, x\, cos\, x$

b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\, dx + 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$

$$= -\sqrt{1-x^2} + 3arc\ sen\, x + k$$

c) $\displaystyle I = \int \frac{cos^2\, x}{sen\, x}\, dx = \int \frac{cos^2\, x}{sen^2\, x}\, sen\, x\, dx$

Hacemos el cambio de variable $u = cos\, x \rightarrow du = -sen\, x\, dx \rightarrow -du = sen\, x\, dx$

$$I = -\int \frac{u^2}{1-u^2}\, du = \int \left(1 - \frac{1}{1-u^2}\right) du = \int du - \int \frac{1}{1-u^2}\, du = u - I_1$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{1-u} \rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{2}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u} = \frac{1}{2}\, ln\,|1+u| - \frac{1}{2}\,|1-u| + k$$

Sustituimos en I:

$$I = u - I_1 = u - \frac{1}{2}\, ln\,|1+u| + \frac{1}{2}\,|1-u| + k = cos\, x - \frac{1}{2}\, ln\,(1 + cos\, x) + \frac{1}{2}\, ln\,(1 - cos\, x) + k$$

15 Sea f la función definida por la expresión:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} \quad \textbf{para } x \neq 0 \textbf{ y } x \neq 1$$

y sea $F(x)$ la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $P(2, ln\, 2)$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto P.

b) Determina la función $F(x)$.

a) Como $F'(x) = f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$

$F'(2) = f(2) = \dfrac{5}{4}$

La ecuación de la recta tangente es: $y = ln\ 2 + \dfrac{5}{4}(x-2)$

b) $F(x) = \int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \;\to\; A = -1,\; B = -1,\; C = 2$$

Por tanto,

$$F(x) = \int\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}\right)dx = -ln\,|x| + \frac{1}{x} + 2ln\,|x-1| + k$$

$$F(2) = ln\,2 \;\to\; -ln\,2 + \frac{1}{2} + k = ln\,2 \;\to\; k = 2ln\,2 - \frac{1}{2}$$

La función es: $F(x) = -ln\,x + \frac{1}{x} + 2ln\,(x-1) + 2ln\,2 - \frac{1}{2}$

16 **Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 3x$ y la recta $y = x$.**

Hallamos las abscisas de los puntos de corte:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 3x \\ y = x \end{array}\right\} \;\to\; x = -2,\; x = 0,\; x = 2$$

Calculamos la función diferencia $h(x) = x^3 - 3x - x = x^3 - 4x$

$$G(x) = \int (x^3 - 4x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

$$G(-2) = -4,\;\; G(0) = 0,\;\; G(2) = -4$$

$$\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx = G(0) - G(-2) = 4$$

$$\int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,dx = G(2) - G(0) = -4$$

Área = 4 + 4 = 8 u^2

17 **Halla el área del recinto limitado por los ejes X e Y y la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1}$$

Calculamos los puntos de corte con el eje X:

$$f(x) = 0 \;\to\; x^3 - 1 = 0 \;\to\; x = 1$$

El problema consiste en calcular el área comprendida entre el eje X y la función desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

$$G(x) = \int \frac{x^3-1}{x^2+1}\,dx$$

$$\frac{x^3-1}{x^2+1} = x - \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$G(x) = \int\left(x - \frac{x+1}{x^2+1}\right)dx = \int x\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+1) - arc\;tg\;x$$

$$\int_0^1 \frac{x^3-1}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\,ln\,(x^2+1) - arc\;tg\;x\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,ln\,2 - \frac{\pi}{4}$$

Área $= \frac{ln\,2 - 1}{2} + \frac{\pi}{4}$ u^2