SEPTIEMBRE 2001

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN. La prueba consta de dos partes. La primera parte consiste en un conjunto de cinco cuestiones de tipo teórico, conceptual o teórico-práctico, de las cuales el alumno debe responder solamente a tres. La segunda parte consiste en dos repertorios A y B, cada uno de ellos constituido por dos problemas. El alumno debe optar por uno de los dos repertorios y resolver los dos problemas del mismo.

TIEMPO: Una hora treinta minutos.

CALIFICACIÓN: Cada cuestión debidamente justificada y razonada con la solución correcta se calificará con un máximo de 2 puntos. Cada problema debidamente planteado y desarrollado con la solución correcta se calificará con un máximo de 2 puntos. En aquellas cuestiones y problemas que consten de varios apartados, la calificación será la misma para todos ellos, salvo indicación expresa en los enunciados.

Primera parte

Cuestión 1.- Un proyectil de masa 10 kg se dispara verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 3200 m/s:

a. ¿Cuál es la máxima energía potencial que adquiere?.
b. ¿En qué posición se alcanza?

Datos: Gravedad en la superficie de la Tierra = 9,8 m s^{-2}; Radio medio de la Tierra = 6,37x 10^6 m

Solución.

a. Suponemos que el campo gravitatorio terrestre es conservativo, es decir, despreciamos todo tipo de rozamiento o fricción con el aire. En este caso, la energía mecánica del sistema (proyectil) se conserva, por tanto:

$$E_c + E_p \text{ (superficie de la tierra)} = E_p \text{ (Altura máxima)} \quad \text{-1-}$$

ya que se supone que cuando llega a su altura máxima, su velocidad es cero.

La energía potencial en la superficie terrestre:

$$g = 9'8\, m/s^2 \qquad E_p = m \cdot g_0 \cdot R_T \qquad E_p = -6'24\times10^8\,J$$

Su energía cinética si v = 3200 m/s

$$E_c = \frac{1}{2}m\cdot V^2 \qquad E_c = 5'12\times10^7\,J$$

Su energía mecánica, suma de la potencial y cinética es:

$$E_m = -5'73\cdot10^8\,J$$

por la ecuación 1: $-5'73\times10^8\,J = -G\cdot\frac{M_T\cdot m}{(R_T+h)} = E_p(\text{altura máxima}) \quad \text{- 2 -}$

Por tanto, la máxima energía potencial es: $E_p = -5'73\times10^8\,J$

b. La posición h, la despejamos de la ecuación (2):

$$(R_T+h) = \frac{+G\cdot M_T m}{+5'73\cdot10^8\,J} \quad \text{despejando h} \quad h = \frac{g_0\cdot R_T^2\cdot m}{5'73\cdot10^8\,J} - R_T$$

sustituyendo por los datos del problema:

$$h = 569'9\text{ Km}$$

Altura a la que llega sobre la superficie terrestre.

Cuestión 2.- Una partícula efectúa un movimiento armónico simple cuyo período es igual a 1 s. Sabiendo que en el instante t = 0 su elongación es 0'70 cm y su velocidad 4,39 cm/s, calcule:

a. La amplitud y la fase inicial.
b. La máxima aceleración de la partícula.

Solución.

a. La ecuación general del M.A.S. es:

$$x(t) = A\cdot\text{sen}(\omega t + \varphi_o) \quad -1-$$

la velocidad se halla derivando la expresión anterior:

$$v(t) = \frac{d(x(t))}{dt} = A\omega\cdot\cos(\omega t + \varphi o) \quad -2-$$

Aplicando las condiciones iniciales a -1- y -2-:

$$t_o = 0 : \begin{cases} x(t_o) = 0'70\text{cm} = A\cdot\text{sen}\,\varphi_o \\ v(t_o) = 4'39\,{}^{\text{cm}}\!/\!{}_{\text{s}} = A\omega\cdot\cos\varphi_o \end{cases} \quad -3-$$

Dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{0'70}{4'39} = \frac{A\cdot\text{sen}\,\varphi_o}{A\omega\cdot\cos\varphi_o} = \frac{\text{sen}\,\varphi_o}{\omega\cdot\cos\varphi_o} = \frac{1}{\omega}\cdot\text{tg}\;\varphi_o = 0'159 \quad -4-$$

como $\omega = \frac{2\pi}{T}$ y el periodo $T = 1\,\text{seg}$ $\quad \omega = 2\pi\,{}^{\text{rad}}\!/\!{}_{\text{s}}$, sustituyendo en -4-

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\text{tg}\;\varphi_o = 0'159 \qquad \text{tg}\;\varphi_o = 1'001 \quad \Rightarrow \quad \varphi_o \cong 45^\circ$$

La amplitud se puede despejar de cualquiera de las ecuaciones de -3-.

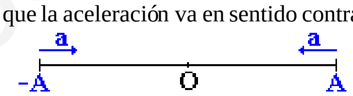
$$A = \frac{x(t_o)}{\text{sen}\,\varphi_o} = \frac{0'7\cdot 10^{-2}}{\text{sen}\,45^\circ} \qquad A = 9'9\times 10^{-3}\,\text{m}$$

b. La aceleración de la partícula es máxima en los extremos de la trayectoria:

$$a = -\omega^2 x\cdot\text{sen}(\omega\cdot t + \varphi_o)$$

$$a_{máx} = -\omega^2 A \qquad a_{máx} = -(4\pi^2)9'9\cdot 10^{-3} \qquad a_{máx} = 0'39\,{}^{\text{m}}\!/\!{}_{\text{s}^2}$$

el signo (−) nos indica simplemente que la aceleración va en sentido contrario al desplazamiento de la particula



Cuestión 3.- Una partícula de carga $q = 1'6\text{x}10^{-19}$ C se mueve en un campo magnético uniforme de valor B = 0'2 T, describiendo una circunferencia en un plano perpendicular a la dirección del campo magnético con periodo de $3'2\text{x}10^{-7}$ s, y velocidad de $3'8\text{x}\,10^6$ m/s. Calcule:

a. El radio de la circunferencia descrita.
b. La masa de la partícula.

Solución.

a. Puesto que el periodo del movimiento circular es:

$$T = 3'2\cdot 10^{-7}\,\text{seg}$$

la velocidad angular es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1'96\times 10^7\;{}^{\text{rad}}\!/\!{}_{\text{s}}$$

y el radio de la trayectoria lo hallamos relacionando la velocidad angular y la lineal:

$$V = \omega\cdot R \qquad R = \frac{V}{\omega} = \frac{3'8\times 10^6}{1'96\times 10^7} \qquad R = 0'194\text{m}$$

b. El movimiento circular se debe a la fuerza de Lorentz que actúa de fuerza centripeta. A partir de la igualdad:

$$m\cdot\frac{v^2}{R} = q\cdot v\cdot B$$

se despeja la masa de la partícula:

$$m = \frac{q\cdot R\cdot B}{v}$$

sustituyendo los datos:

$$m = 1'633\times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

Cuestión 4.-

a. Defina para una lente delgada los siguientes conceptos: foco objeto, foco imagen, distancia focal objeto y distancia focal imagen.
b. Dibuje para los casos de lente convergente y de lente divergente la marcha de un rayo que pasa (él o su prolongación) por: b_1) el foco objeto; b_2) el foco imagen

Solución.

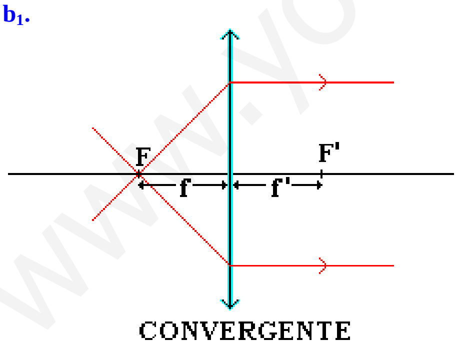
a. **FOCO OBJETO**: es el punto F del eje óptico, situado a una distancia f del centro de la lente, y delante de la misma (si es convergente)tal que los rayos luminosos procedentes de F, salen paralelos al eje óptico tras atravesar la lente. Análogamente, cuando un haz de rayos luminosos apunta hacia el punto F situado a una distancia – f detrás de una lente convergente, saldrán de ella paralelos al eje óptico de la lente.

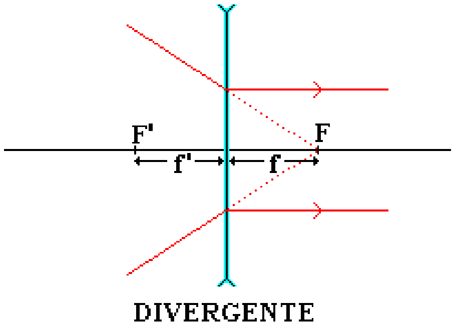
FOCO IMAGEN: Es el punto F’ situada a una distancia f ‘ detrás de una lente convergente, donde converge, tras atravesar la lente un haz de rayos que incide paralelamente al eje óptico.
Si incide un haz de rayos paralelamente al eje óptico en una lente divergente, el haz de rayos refractados parece proceder de un punto F’ situado delante de la lente

DISTANCIA FOCAL OBJETO: Es la distancia que hay entre el foco objeto de la lente delgada y el centro de la lente.

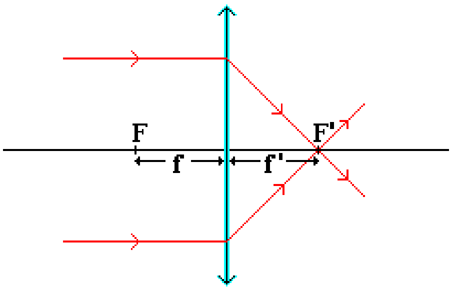
DISTANCIA FOCAL IMAGEN: distancia f ‘ entre el centro óptico de la lente y el foco imagen. Ambas distancias son iguales f = f’, y su inversa es la potencia de la lente: $P = \frac{1}{f'}$

b_1.

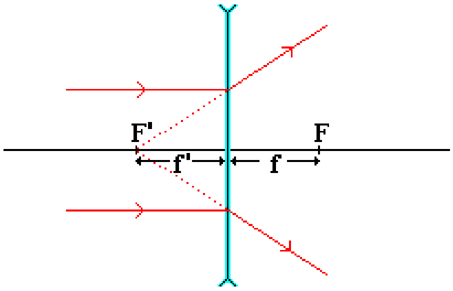




b$_2$.



CONVERGENTE



DIVERGENTE

Cuestión 5.- Dos partículas no relativistas tienen asociada la misma longitud de onda de De Broglie. Sabiendo que la masa de una de ellas es el triple que la masa de la otra, determine:

a. La relación entre sus momentos lineales.
b. La relación entre sus velocidades.

Solución.
La longitud de onda de De Broglie de cada partícula tiene la siguiente expresión:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot V}$$

para la partícula 1: $\lambda_1 = \dfrac{h}{m_1 \cdot v_1}$

para la partícula 2: $\lambda_2 = \dfrac{h}{m_2 \cdot v_2}$

a. Puesto que son iguales: $\lambda_1 = \lambda_2$

$$\frac{h}{m_1 \cdot v_1} = \frac{h}{m_2 \cdot v_2} \qquad \frac{h}{p_1} = \frac{h}{p_2} \qquad \text{por tanto } p_1 = p_2$$

b. Teniendo en cuenta que $m_1 = 3m_2$

$$\frac{h}{3m_2 \cdot v_1} = \frac{h}{m_2 \cdot v_2} \qquad \frac{1}{3v_1} = \frac{1}{v_2} \qquad v_2 = 3v_1$$

Segunda parte

REPERTORIO A

Problema 1.- La expresión matemática de una onda armónica transversal que se propaga por una cuerda tensa orientada según el eje X es:

$$y = 0,5 \text{ sen } (6\pi\, t - 2\pi x) \quad (\text{ x, y en metros; t en segundos})$$

Determine:

a. Los valores de la longitud de onda y de la velocidad de propagación de la onda.
b. Las expresiones que representan la elongación y la velocidad de vibración en función del tiempo, para un punto de la cuerda situado a una distancia x=1,5 m del origen.
c. Los valores máximos de la velocidad y de la aceleración de vibración de los puntos de la cuerda.
d. La distancia mínima que separa dos puntos de la cuerda que, en un mismo instante, vibran desfasados 2π radianes.

Solución.

$$y = 0'5\,\text{sen}\left(\overbrace{6\pi}^{\omega}\cdot t - \overbrace{2\pi}^{k}\cdot x\right) \qquad v = \frac{dy}{dt} = 0'5\cos(6\pi t - 2\pi x)\cdot 6\pi$$

a. La longitud de onda, puesto que $k = 2\pi$ será:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 1\text{m}$$

Teniendo en cuenta que $\omega = 6\pi$

$$v = \omega/k \qquad v = 3\, m/s$$

b. Para un punto x = 1'5 m.

$$y(1'5, t) = 0'5\cdot\text{sen}\,(6\pi t - 2\pi\cdot 1'5) = 0'5\cdot\text{sen}(6\pi t - 3\pi)$$
$$v(1'5, t) = 3\pi\cdot\cos(6\pi t - 2\pi 1'5) = 3\pi\cdot\cos(6\pi t - 3\pi)$$

c. Según la expresión anterior para la velocidad:

$$v(x,t) = 3\pi\cdot\cos(6\pi t - 2\pi x)$$

tiene el valor máximo: $v_{máx} = 3\pi\, m/s$ (cuando el coseno vale 1)

La aceleración de un punto de la cuerda:

$$a = -\omega^2\cdot y$$

tiene un valor máximo(en valor absoluto) en $y(x,t) = A$, y en y(x,t) = - A

$$a = -(6\pi)^2\cdot(\pm 0'5) \qquad |a| = 18\pi^2 \qquad |a| = 177'6\, m/s^2$$

d. Si fijamos el tiempo en la ecuación de la onda: t_o

$$\left.\begin{array}{l} y(x_1, t_o) = 0'5\cdot\text{sen}(6\pi\cdot t_o - 2\pi x_1) \\ y(x_2, t_o) = 0'5\cdot\text{sen}(6\pi\cdot t_o - 2\pi x_2) \end{array}\right\} \text{para dos puntos de la cuerda } x_1 \text{ y } x_2$$

La diferencia de fase: $(6\pi t_o - 2\pi X_1) - (6\pi t_o - 2\pi X_2) = \Delta\varphi$

Si se sabe que $\Delta\varphi = 2\pi$, entonces:

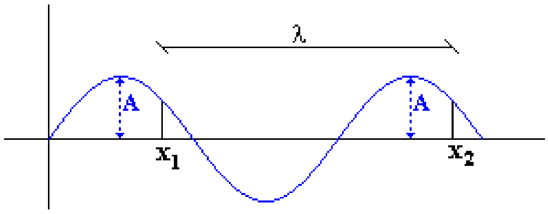
$$2\pi(X_2 - X_1) = 2\pi$$

Así que, la distancia mínima entre los dos puntos tiene que ser:

$$\Delta X = (X_2 - X_1) = 1\text{m}$$

que equivalente a la longitud de onda de la onda armónica:

$$k = 2\pi \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad \lambda = 1\text{m}$$



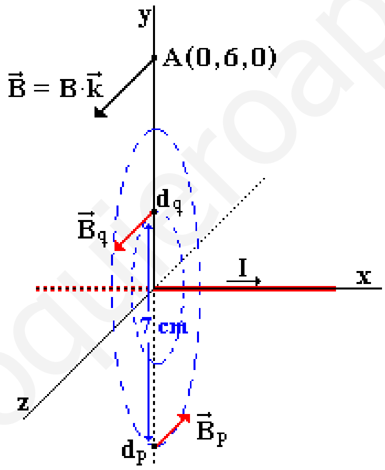
Problema 2.- Por un hilo conductor rectilíneo e infinitamente largo, situado sobre el eje X, circula una corriente eléctrica en el sentido positivo del eje X. El valor del campo magnético producido por dicha corriente es de $3x10^{-5}$ T en el punto P (0, -d_P, 0), y es de 4x 10^{-5} T en el punto Q (0, +d_q, 0). Sabiendo que $d_P + d_q = 7$ cm, determine:

a. La intensidad que circula por el hilo conductor.
b. Valor y dirección del campo magnético producido por dicha corriente en el punto de coordenadas (0, 6 cm, 0).

Datos: Permeabilidad magnética del vacío $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N A^{-2}

Las cantidades d_P y d_q son positivas.

Solución.



a. Las líneas de campo magnético generadas por el conductor son círculos concéntricos con el mismo por tanto, en el plano yz.

El campo $\vec{B}$ que produce una corriente indefinida de carga en un punto separado una distancia radial “a” del mismo es:

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi a}$$

por tanto, el campo producido en los puntos Q y P:

$$B_q = \frac{\mu_o I}{2\pi d_q} \quad \text{-1-} \qquad B_p = \frac{\mu_o I}{2\pi d_p} \quad \text{-2-}$$

Conociendo el campo en los dos punto y, sabiendo que: $d_q + d_p = 7 \cdot 10^{-2}\,\text{m}$:

$$\begin{cases} 4 \cdot 10^{-5}\,\text{T} = \dfrac{\mu_o \cdot I}{2\pi d_q} \\ 3 \cdot 10^{-5}\,\text{T} = \dfrac{\mu_o \cdot I}{2\pi\left(7 \cdot 10^{-2} - d_q\right)} \end{cases}$$

dividiendo ambas expresiones y simplificando:

$$\frac{4\cdot10^{-5}\,T}{3\cdot10^{-5}\,T} = \frac{\left(7\cdot10^{-2} - d_q\right)}{d_q}$$

ecuación de 1º grado que permite calcular d_q.

$$d_q = 0'03\,m = 3\,cm \quad \Rightarrow \quad d_p = 4\,cm$$

y la intensidad ,se puede calcular por -1-, ó por -2-.

$$I = \frac{B\alpha\cdot 2\pi d\alpha}{\mu_o} \qquad I = 6A \qquad \left(\text{siendo } \mu_o = 4\pi\cdot10^{-7}\right)$$

b. En un punto A del eje y, el campo $\vec{B}$ tiene de módulo:

$$B_A = \frac{\mu_o\cdot I}{2\pi\cdot a} \qquad \text{Si } a = 6cm:$$

$$B_A = \frac{4\pi\cdot10^{-7}\cdot 6A}{2\pi\cdot 6\cdot10^{-2}} \qquad B_A = 2\cdot10^{-5}\,T$$

La dirección del vector $\overline{B}_A$ es tangente a la línea del campo magnético que pasa por ese punto, por tanto tiene dirección $\vec{k}$.

El sentido dado por la regla de la mano derecha es $\left(+\vec{k}\right)$:

$$\overline{B}_A = 2\cdot10^{-5}\,\overline{k}\ (T)$$

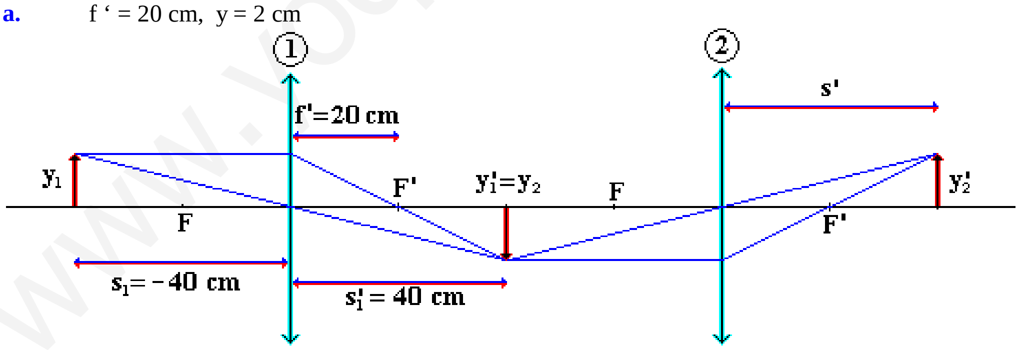
REPERTORIO B

Problema 1.- Sea un sistema óptico formado por dos lentes delgadas convergentes de la misma distancia focal (f '=20 cm), situadas con el eje óptico común a una distancia entre sí de 80 cm. Un objeto luminoso lineal perpendicular al eje óptico, de tamaño y = 2 cm, está situado a la izquierda de la primera lente y dista de ella 40 cm.

a. Determine la posición de la imagen final que forma el sistema óptico y efectúe su construcción geométrica.
b. ¿Cuál es la naturaleza y el tamaño de esta imagen?

Solución.

a. f ‘ = 20 cm, y = 2 cm



De la ecuación de la 1º lente:

$$\frac{1}{f'_1} = \frac{1}{s'_1} - \frac{1}{s_1} \qquad \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{s_1}$$

se calcula s’:

$$\frac{1}{s'_1} = \frac{1}{20} + \frac{1}{-40} \qquad \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{40} \qquad s'_1 = 40\,cm$$

El tamaño de la imagen formada por la 1º lente:

$$\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s} \qquad y'=y\cdot\frac{s'}{s} \qquad y'=2\cdot\frac{40}{-40} \qquad y'_1=-2\text{cm}$$

es decir, del mismo tamaño que el objeto, pero invertida.

Esta imagen está a 40 cm de la 2º lente, y por tanto, la distancia $s_2=-40\text{cm}$.(la imagen de la primera lente, constituye el objeto para la segunda) Si se aplica la ecuación de la lente de nuevo:

$$\frac{1}{f'_2}=\frac{1}{s'_2}-\frac{1}{s_2}$$

se obtiene que la imagen final se forma en:

$$\frac{1}{s'_2}=\frac{1}{f'_2}+\frac{1}{s_2} \qquad \frac{1}{s'_2}=\frac{1}{20}+\frac{1}{-40} \qquad s'_2=40\text{cm}$$

la posición final de la imagen será a 40 cm a la derecha de la 2ª lente, y el tamaño de la imagen final es:

$$\frac{y'_2}{y_2}=\frac{s'_2}{s_2} \qquad y'_2=y_2\cdot\frac{s'_2}{s_2} \qquad y'_2=-2\text{cm}\cdot\frac{40}{-40}$$

$$y'_2 = 2 \text{ cm}$$

La imagen final tiene el mismo tamaño que el objeto inicial. La composición de estas dos lentes no ha distorsionado el tamaño del objeto.

b. Es una imagen REAL, DIRECTA y del mismo TAMAÑO.

Problema 2.- Se tienen dos cargas puntuales sobre el eje X, $q_1 = -0'2$ μC está situada a la derecha del origen y dista de él 1 m; q_2=+0,4 μC está a la izquierda del origen y dista de él 2 m.

a. ¿En qué puntos del eje X el potencial creado por las cargas es nulo?
b. Si se coloca en el origen una carga q = +0,4 μC determine la fuerza ejercida sobre ella por las cargas q_1 y q_2.

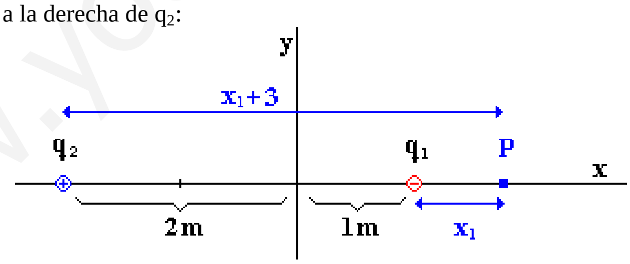
Datos: Constante de la ley de Coulomb en el vacio K = $9\text{x}10^9$ N m^2C^{-2}

Solución.

a. Para que el potencial en un punto del eje x se anule tiene que ocurrir que:

$$V_{1(p)}+V_{2(p)}=0$$

Situando el punto P a la derecha de q_2:



$$V_1=k\cdot\frac{q_1}{x_1} \qquad V_2=k\frac{q_2}{3+x_1}$$

sustituyendo en la condición de potencial nulo

$$k\cdot\frac{q_1}{x_1}+k\cdot\frac{q_2}{3+x_1}=0 \qquad k\cdot\frac{-0'2\times10^{-6}\text{C}}{x_1}=-k\cdot\frac{0'4\times10^{-6}\text{C}}{3+x_1}=0$$

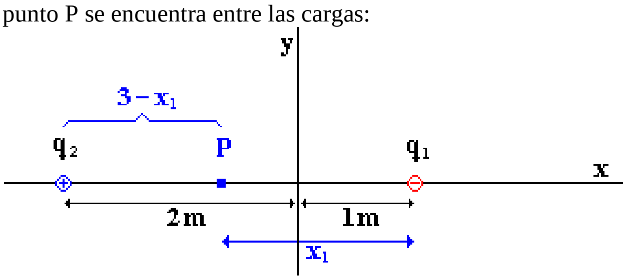
Operando y simplificando la expresión anterior:

$$(3+x_1)\cdot(0'2\cdot10^{-6})=x_1\cdot(0'4\cdot10^{-6})$$

resolviendo la ecuación de 1º grado

$$x_1 = 3 \text{ m}$$

Si suponemos que el punto P se encuentra entre las cargas:



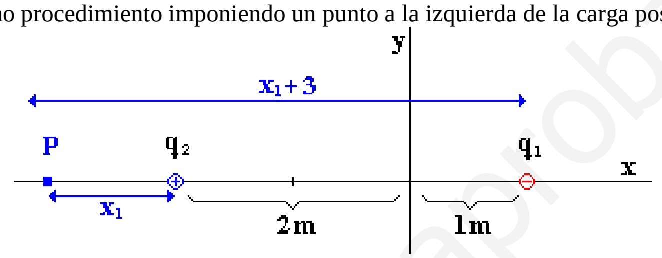
$$k\cdot\frac{-0'2\times10^{-6}}{x_1}=-k\cdot\frac{0'4\times10^{-6}}{3-x_1}=0$$

resolviendo

$$x = 1\ \text{m}$$

coincide con el origen de coordenadas, P (0, 0)

Repetimos el mismo procedimiento imponiendo un punto a la izquierda de la carga positiva:



$$k\cdot\frac{0'4\times10^{-6}\,C}{x_1}=-k\cdot\frac{-0'2\times10^{-6}\,C}{3+x_1}$$

resolviendo la ecuación

$$x_1=-6\ \text{m}$$

No valido ya que x_1 es una distancia y no puede ser negativa. No hay ningún punto a la izquierda de la q_2 donde $V_T = 0$.

b. Si colocamos una carga q = +0’4μc en (0, 0) calcular la fuerza sobre ella.

Calculamos el campo total $\vec{E}$ en el origen de coordenadas:

$$E_1=k\cdot\frac{q}{r^2}\qquad E_1=k\cdot\frac{0'2\times10^{-6}}{1^2}\qquad \left|\bar{E}_1\right|=9\times10^{9}\cdot0'2\times10^{-6}\qquad \left|\bar{E}_1\right|=1'8\cdot10^{3}\ N/C$$

La dirección y sentido es $+\vec{i}$ (suponemos colocada en el origen una unidad de carga positiva)

$$\bar{E}_1=1800\ N/C\ \ \bar{i}$$

Calculamos el campo creado por la carga 2:

$$E_2=k\cdot\frac{q}{r^2}\qquad E_2=\frac{9\times10^{9}\cdot0'4\times10^{-6}}{2^2}\qquad E_2=0'9\times10^{3}\qquad \bar{E}_2=900\ N/C\ \ \bar{i}$$

Puesto que ambos vectores tienen la misma dirección y sentido numeramos sus módulos:

$$\bar{E}_T=\bar{E}_1+\bar{E}_2=2700\ N/C\ \ \bar{i}$$

La fuerza sobre la $q=+0'4\times10^{-6}\,c$:

$$\bar{F}=q\cdot\bar{E}\qquad \bar{F}=0'4\times10^{-6}\cdot2700\ \ \bar{i}$$

$$\bar{F}=1{,}1\times10^{-3}\,N\ \ \bar{i}$$