eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Matemáticas II

EAU 2019

www.ehu.eus

Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.

Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.

Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezin ditu izan ondoko ezaugarriak:
pantailla grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera, ekuazioak ebazteko aukera, matrize eragiketak egiteko aukera, determinanteen kalkulua egiteko aukera, deribatuak eta integralak egiteko aukera, datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

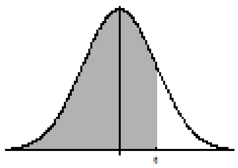
Este examen tiene dos opciones.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

El examen consta de cinco ejercicios.

Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:
pantalla gráfica, posibildad de transmitir datos, programable, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos.



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Discutir, en función de los valores de A, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = 6 \\ x & +y & -z & = 1 \\ 2x & -2y & +Az & = A \end{cases}$$

Ejercicio A2

Hallar la ecuación de **una** recta paralela al plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$ y que contenga al punto $P(1, 0, 0)$. ¿Es única dicha recta? Razonar la respuesta.

Ejercicio A3

Sea f la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$.

a) Obtener los valores de A, B y C para que su gráfica contenga al punto $P(0, 1)$ y para que f tenga un mínimo local en el punto $Q(2, 0)$.

b) ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos locales ?.

Ejercicio A4

Sea R el recinto del plano limitado por las curvas $y = x(3 - x)$ y por $y = x^2$. Dibujar R y calcular su área.

Ejercicio A5

Una caja tiene 3 monedas R, L y M. La moneda R es normal, la L tiene cara por los dos lados y la M está trucada, de forma que la probabilidad de salir cara es $1/5$. Se tira una moneda elegida al azar.

a) Calcular la probabilidad que se obtenga cara.

b) Si ha salido cruz, ¿cuál es la probabilidad que sea la moneda R?

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Dada una matriz de tamaño 3×3 cuyo determinante es igual a 5, se realizan sucesivamente las siguientes operaciones:

a) se cambian entre sí la primera y segunda fila,

b) se multiplica a la tercera columna por -2,

c) se multiplica a toda la matriz por 2 y

d) se traspone la matriz.

Calcular de forma razonada el valor del determinante de la matriz obtenida.

Ejercicio B2

Se considera la recta r

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

y el punto $P(1,2,5)$ exterior a la misma. Hallar la ecuación del plano que contiene a r y a P.

Ejercicio B3

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$. Representar f.

Ejercicio B4

Calcular $\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} dx$ explicando el método seguido para dicho cálculo.

Ejercicio B5

Los resultados obtenidos en una prueba realizada a 500 estudiantes se distribuyen normalmente con media 40 puntos y desviación típica 10 puntos.

a) ¿Qué porcentaje del alumnado tiene una puntuación entre 30 y 60 puntos?

b) ¿Cuántos estudiantes tienen una puntuación superior a 60 puntos?

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc, siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

Criterios particulares de cada uno de los problemas

OPCIÓN A

A.1.

• Cálculo del determinante de la matriz y discusión para el caso que no anula el determinante (1 punto).

• Discusión en el caso de $A = -18$ (1 punto).

A.2.

• Planteamiento del problema: obtención de una recta paralela al plano (1 punto).

• Resolución correcta y razonada de la cuestión planteada (1 punto).

A.3.

• Obtención de los valores de A, B y C (1 punto).

• Resolución correcta de la pregunta formulada (1 punto).

A.4.

- Dibujo adecuado del recinto como intersección de dos parábolas y el cálculo de los puntos de corte de ambas parábolas (1 punto).
- Cálculo correcto del área del recinto mediante la regla de Barrow (1 punto).

A.5.

- Planteamiento correcto del ejercicio ($0,5$ puntos).
- Resolución del apartado a) ($0,75$ puntos).
- Resolución del apartado b) ($0,75$ puntos).

OPCIÓN B

B.1.

• Resolución de cada determinante aplicando, de manera adecuada, las oportunas propiedades ($0,5$ puntos cada apartado).

B.2.

• Planteamiento del problema: obtención del vector director de la recta, vector normal al plano (1 punto).

• Cálculo de la ecuación del plano que contiene a r y a P (1 punto).

B.3.

• Obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento ($0,75$ puntos).

• Cálculo de los extremos ($0,5$ puntos).

• Representación de la función ($0,75$ puntos).

B.4.

• Descomposición de la función en fracciones simples y obtención de cada una de ellas (1 punto).

• Cálculo de las dos integrales (1 punto).

B.5.

• Resolución del apartado a) (1 punto).

• Resolución del apartado b) (1 punto).

OPCIÓN A

SOLUCIÓN A1

El determinante de la matriz de coeficientes es: $-A-18$. Por tanto, para $A \neq -18$, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. Para $A = -18$ el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la ampliada también es 2, por lo tanto, el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

SOLUCIÓN A2

Una recta verificando las condiciones pedidas tiene que satisfacer dos condiciones: la primera, pasar por el punto $P(1,0,0)$ y la segunda, su vector de dirección tiene que ser perpendicular al vector característico del plano.

El vector característico del plano es $(1,2,3)$. Un vector perpendicular al mismo es $v = (2,-1,0)$ por lo que **una** recta con las condiciones pedidas es $x = 1+2t, y = 0-t, z = 0$.

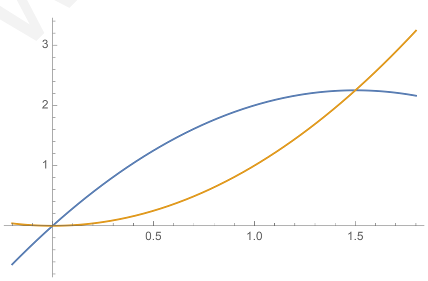
Hay infinitos vectores perpendiculares a $(1,2,3)$ por tanto existen infinitas rectas con las condiciones pedidas. Son todas las rectas contenidas en el plano $x+2y+3z = 1$ y que pasen por el punto $P(1,0,0)$.

SOLUCIÓN A3

De las condiciones impuestas resulta $A = -\frac{15}{4}$, $B = 3$ y $C = 1$, es decir, la función es $f(x) = x^3 - \frac{15}{4}x^2 + 3x + 1$. Su derivada es $3x^2 - \frac{15}{2}x + 3$, que se anula en $x = 2$ y en $x = 1/2$. Por lo tanto, en $x = 2$ hay un mínimo, y en $x = 1/2$ hay un máximo.

SOLUCIÓN A4

Las parábolas se cortan en los puntos $(0,0)$ y $(3/2, 9/4)$. El recinto es:



Su área viene dada por la siguiente integral definida

$$\int_0^{3/2} (x(3-x) - x^2)dx = 9/8$$

SOLUCIÓN A5

Puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicionada.

Sean los siguientes sucesos:

R, salga la moneda R,;L, salga la moneda L y M, salga la moneda M.

C que sea cara y $+$ que sea cruz.

Entonces:

a)

$$P(C) = P(R)P(C/R) + P(L)P(C/L) + P(M)P(C/M) = 1/6 + 1/3 + 1/15 = \frac{17}{30}$$

b)

$$P(R/+) = \frac{P(R)P(+/R)}{P(+)} = \frac{1/6}{13/30} = \frac{5}{13}$$

OPCIÓN B

SOLUCIÓN B1

Propiedades de los determinantes a utilizar

1) Si se permutan filas o columnas entre si el determinante cambia de signo.

2) Si se multiplica una fila o columna por un número el determinante se multiplica por ese número.

3) Con la propiedad anterior y al ser una matriz $3x3$, el determinante se multiplica por $2^3 = 8$.

4) El determinante de una matriz y de su traspuesta son iguales.

Por lo tanto el valor del determinante de la nueva matriz es 80.

SOLUCIÓN B2

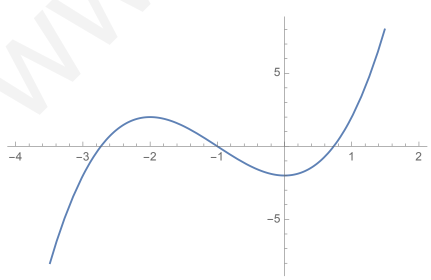
El haz de planos que contiene a la recta está dado por:

$$(2x - y) + \lambda(3y - 2z) = 0$$

Para que contenga al punto $(1, 2, 5)$ debe ser $\lambda = 0$, por lo que el plano buscado es $2x - y = 0$.

SOLUCIÓN B3

Dad la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$, su derivada $f'(x) = 3x^2 + 6x$ que se anula en $x = 0$ y $x = -2$. La función es creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(0, \infty)$, y es decreciente en $(-2, 0)$. Tiene un máximo en $x = -2$ y un mínimo en $x = 0$.



SOLUCIÓN B4

La función se descompone en fracciones simples como sigue: $\frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$ y resulta operando que $A = -1/2$ y $B = 17/2$. Por lo tanto, la integral es

$$\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} dx = -1/2 \ln(x+1) + 17/2 \ln(x+3) + C.$$

SOLUCIÓN B5

a)

$$P(30 < x < 60) = P((30-40)/10 < z < (60-40)/10) =$$
$$P(-1 < z < 2) = 0,9772 - (1 - 0,8413) = 0,8185$$

b)

$$P(x > 60) = P(z > (60-40)/10) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

Es decir $2,28$ por ciento o lo que es equivalente $(0,0228).(500) \equiv 12$.