EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II.

EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x+\ y+\ z=2 \\ x-ay+a^2z=-1 \\ -ax+a^2y-a^3z=2 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Comprueba que el sistema nunca tiene solución única**.**
b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones.
c) **[0,5 p.]** Si es posible, resuélvalo para el valor de $a = 2$.

2: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **.**

a) **[1 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4, A^5, A^6.
b) **[1 p.]** Calcule A^{2020}.
c) **[0,5 p.]** Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.

3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1,25 p.]** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(3+x)-\ln(3-x)}{2x}$
b) **[1,25 p.]** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)$

4: a) **[2 p.]** Calcule la integral indefinida $\int \ln\left(1+x^2\right)dx$.

b) **[0,5 p.]** Calcule la integral definida $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx$.

El examen continúa por detrás

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II.

EBAU2020 - **SEPTIEMBRE**

5: Considere los puntos $P=(5,6,1)$ y $Q(-3,-2,5)$, y la recta

$$r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{4}\ .$$

a) **[1,5 p.]** Determine el punto *R* de la recta *r* para el cual el área del triángulo PQR es $18\sqrt{2}$ unidades cuadradas.
Observación: hay dos puntos R que son solución del apartado a); basta con encontrar uno de ellos.
b) **[1 p.]** Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos *P* y *Q* y compruebe que dicha recta corta perpendicularmente a la recta *r*.

6: Considere las rectas *r* y *s* dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r:\begin{cases}5x+3y=19\\ y-5z=3\end{cases}\qquad s:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{0}$$

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.
b) **[1,25 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que las rectas se crucen, determine el plano que contiene a la recta *r* y es paralelo a la recta *s*.

7: El peso de los recién nacidos, medido en kilogramos (kg), sigue una distribución normal de media $\mu=2,8\,kg$ y desviación típica σ. Se sabe que solo el 20,05% de ellos pesa más de 3 kg.
a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese más de 2,6 kg?
b) **[1 p.]** Calcule la desviación típica de esta distribución normal.
c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,9 kg?
IMPORTANTE: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.

8: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 4 negras y 3 rojas, y la urna B contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras. Además, se tiene un dado que tiene 2 caras marcadas con la letra A y 4 caras marcadas con la letra B. Se lanza el dado y se saca una bola al azar de la urna que indica el dado.
a) **[0,75 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea verde?
b) **[0,75 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?
c) **[1 p.]** Si la bola extraída es verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

SOLUCIONES

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x+\ y+\ z=2 \\ x-ay+a^2z=-1 \\ -ax+a^2y-a^3z=2 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Comprueba que el sistema nunca tiene solución única**.**

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones.

c) **[0,5 p.]** Si es posible, resuélvalo para el valor de *a = 2*.

El sistema tiene asociadas las matrices:

Matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & a^2 \\ -a & a^2 & -a^3 \end{pmatrix}$ y matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & a^2 & -1 \\ -a & a^2 & -a^3 & 2 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & a^2 \\ -a & a^2 & -a^3 \end{vmatrix}=a^4-a^3+a^2-a^2+a^3-a^4=0$$

El determinante es 0, independientemente del valor de a , por lo que el rango de la matriz A nunca va a ser 3.

a) El sistema nunca va a tener solución única pues el rango de A es menor que 3 (número de incógnitas).

b) Estudiamos el rango de A.

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna y fila 3ª → $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$,

calculamos su determinante y vemos cuando se anula → $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix}=-a-1=0 \Rightarrow a=-1$.

Si $a\neq -1$.

En este caso el rango de A es 2. Veamos el rango de A/ B y comparamos los rangos.

Tomamos un menor de orden 3 de A/B que resulta de quitar la columna 3ª con determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & -1 \\ -a & a^2 & 2 \end{vmatrix}=-2a+a+2a^2-2a^2-2+a^2=a^2-a-2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\begin{cases} \dfrac{1+3}{2}=2=a \\ \dfrac{1-3}{2}=-1=a \end{cases}$$

Este determinante que decide el rango de A/B se anula para los valores –1 y 2.

Establecemos los casos siguientes:

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 2$

En este caso el rango de A es 2 y el rango de A/B es 3 pues el menor anterior no se anula.

El sistema es incompatible.

CASO 2. $a = -1$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y+z=-1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

Se observa que la 1ª y 2ª ecuación tienen el primer miembro de la igualdad iguales ($x+y+z$) y el 2º miembro de la igualdad distinto (–1 y 2). ¡Imposible!

El sistema es incompatible.

CASO 3. $a = 2$

Sustituyendo el valor de *a* tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-2y+4z=-1 \\ -2x+4y-8z=2 \end{cases} \quad \text{Lo resolvemos con el método de Gauss}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrl} x & -2y & +4z & =-1 \\ -x & -y & -z & =-2 \\ \hline & -3y & +3z & =-3 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} + 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrl} -2x & +4y & -8z & =2 \\ 2x & +2y & +2z & =4 \\ \hline & 6y & -6z & =6 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ -3y+3z=-3 \\ 6y-6z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ -y+z=-1 \\ y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} + \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrrr} -y & +z & = & -1 \\ y & -z & = & 1 \\ \hline & 0 & = & 0 \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ -y+z=-1 \Rightarrow \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ -y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ \boxed{y=z+1} \end{cases} \Rightarrow x+z+1+z=2 \Rightarrow \boxed{x=1-2z}$$

El sistema es compatible indeterminado.

El sistema tiene infinitas soluciones para ***a = 2***.

c) Para *a = 2* está resuelto en el apartado b) y sus soluciones son $x=1-2t; \quad y=1+t; \quad z=t$

2: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ **.**

a) **[1 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4, A^5, A^6.
b) **[1 p.]** Calcule A^{2020}.
c) **[0,5 p.]** Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.

a)

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3 & 3-6\\ -1+2 & -3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-3 & 6-6\\ -1+1 & -3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$A^5=A^4A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+3 & -3+6\\ 1-2 & 3-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^6=A^5A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+3 & -6+6\\ 1-1 & 3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$$

b) Como $A^6=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$ dividimos 2020 entre 6 y nos queda:

$$\begin{array}{l|l} 2\,0\,2\,0 & 6 \\ \hline \ \ 22 & 336 \\ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ \boxed{4}\ \text{Resto} & \end{array}$$

→ 2020 = 336 · 6 + 4.

$$A^{2020}=A^{6\cdot 336+4}=A^{6\cdot 336}A^4=\left(A^6\right)^{336}A^4=\left(I_2\right)^{336}A^4=I_2\cdot A^4=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

c) Calculamos el determinante de A.

$|A|=\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2+3=1\neq 0$, al ser su determinante distinto de cero existe su inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1,25 p.]** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3+x)-\ln(3-x)}{2x}$

b) **[1,25 p.]** $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)$

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3+x)-\ln(3-x)}{2x}=\frac{\ln 3-\ln 3}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3+x}-\frac{-1}{3-x}}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3+x}+\frac{1}{3-x}}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3\cancel{-x}+3\cancel{+x}}{(3+x)(3-x)}}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{(3+x)(3-x)}=\frac{3}{9}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

b)

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)=\infty-\infty=\left\{\begin{array}{c}\text{Multiplicamos y dividimos por el conjugado}\\ \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x+2}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(x+1)-(x+2)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x+1-x-2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}=\frac{-1}{\infty}=\boxed{0}$$

4: a) **[2 p.]** Calcule la integral indefinida $\int \ln\left(1+x^2\right)dx$.

b) **[0,5 p.]** Calcule la integral definida $\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx$.

a)

$$\int \ln\left(1+x^2\right)dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Integramos por partes}\\ u=\ln\left(1+x^2\right)\to du=\dfrac{2x}{1+x^2}dx\\ dv=dx\to v=\int dx = x\end{array}\right\} = \left(\ln\left(1+x^2\right)\right)(x)-\int x\frac{2x}{1+x^2}dx =$$

$$= x\ln\left(1+x^2\right)-2\int\frac{x^2}{1+x^2}dx = \ldots$$

Calculamos la integral y luego sustituimos.

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=\int\frac{1+x^2}{1+x^2}dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx=\int dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx = x-arctg(x)$$

$$\ldots = x\ln\left(1+x^2\right)-2\left(x-arctg(x)\right)=\boxed{x\ln\left(1+x^2\right)-2x+2arctg(x)+\mathrm{K}}$$

b)

$$\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx=\left[x\ln\left(1+x^2\right)-2x+2arctg(x)\right]_0^1=$$

$$=\left[\ln\left(1+1^2\right)-2+2arctg(1)\right]-\left[0-0+2arctg(0)\right]=\ln 2-2+2\frac{\pi}{4}=\boxed{\frac{\pi}{2}-2+\ln 2=0.264}$$

5: Considere los puntos $P=(5,6,1)$ y $Q(-3,-2,5)$, y la recta

$$r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{4}.$$

a) **[1,5 p.]** Determine el punto *R* de la recta *r* para el cual el área del triángulo PQR es $18\sqrt{2}$ unidades cuadradas.

Observación: hay dos puntos R que son solución del apartado a); basta con encontrar uno de ellos.

b) **[1 p.]** Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos *P* y *Q* y compruebe que dicha recta corta perpendicularmente a la recta *r*.

a) Obtenemos las ecuaciones en paramétricas de la recta *r*.

$$r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-1+4\lambda \end{cases}$$

Por lo que las coordenadas del punto R de la recta *r* son $R(\lambda,1+\lambda,-1+4\lambda)$.

El área del triángulo PQR es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{QR}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PR}=(\lambda,1+\lambda,-1+4\lambda)-(5,6,1)=(\lambda-5,\lambda-5,-2+4\lambda) \\ \overrightarrow{QR}=(\lambda,1+\lambda,-1+4\lambda)-(-3,-2,5)=(\lambda+3,\lambda+3,-6+4\lambda) \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{QR}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda-5 & \lambda-5 & -2+4\lambda \\ \lambda+3 & \lambda+3 & -6+4\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=i(\lambda-5)(-6+4\lambda)+j(-2+4\lambda)(\lambda+3)+\cancel{k(\lambda-5)(\lambda+3)}-\cancel{k(\lambda-5)(\lambda+3)}-$$
$$-j(\lambda-5)(-6+4\lambda)-i(\lambda+3)(-2+4\lambda)=$$

$$=i\left(\left(-6\lambda-20\lambda+30+4\lambda^2\right)-\left(-2\lambda+12\lambda-6+4\lambda^2\right)\right)+$$
$$+j\left(\left(-2\lambda+12\lambda-6+4\lambda^2\right)-\left(-6\lambda-20\lambda+30+4\lambda^2\right)\right)=$$

$$=i(-36\lambda+36)+j(36\lambda-36)=(-36\lambda+36,36\lambda-36,0)$$

Una vez obtenido el producto vectorial lo aplicamos al cálculo del área del triángulo.

$$\acute{A}rea=18\sqrt{2}\Rightarrow\frac{\left|\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{QR}\right|}{2}=18\sqrt{2}\Rightarrow\left|\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{QR}\right|=36\sqrt{2}\Rightarrow\left|(-36\lambda+36,36\lambda-36,0)\right|=36\sqrt{2}$$

$$36\left|(-\lambda+1,\lambda-1,0)\right|=36\sqrt{2}\Rightarrow\left|(-\lambda+1,\lambda-1,0)\right|=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{(-\lambda+1)^2+(\lambda-1)^2}=\sqrt{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2(\lambda-1)^2=2\Rightarrow(\lambda-1)^2=1\Rightarrow\begin{cases}\lambda-1=-1\Rightarrow\lambda=0 \\ \lambda-1=1\Rightarrow\lambda=2\end{cases}$$

Por lo que los dos puntos solución del problema son:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = 0 \\ R(\lambda, 1+\lambda, -1+4\lambda)\end{array}\right\} \Rightarrow R_1(0,1,-1)$$

Y también

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = 2 \\ R(\lambda, 1+\lambda, -1+4\lambda)\end{array}\right\} \Rightarrow R_2(2,3,7)$$

b) La recta *s* que pasa por $P=(5,6,1)$ y $Q(-3,-2,5)$ tiene como vector director $\overrightarrow{PQ}=(-3,-2,5)-(5,6,1)=(-8,-8,4)$. Tomamos como vector director el vector anterior dividido por –4 que tiene unas coordenadas que indican la misma dirección con valores más pequeños.

$$s:\left.\begin{array}{l}P=(5,6,1)\in s \\ \overrightarrow{v_s}=(2,2,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s:\begin{cases}x=5+2t \\ y=6+2t \\ z=1-t\end{cases}}$$

Comprobemos que las rectas *r* y *s* se cortan resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases}x=\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-1+4\lambda\end{cases} \\ s:\begin{cases}x=5+2t \\ y=6+2t \\ z=1-t\end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}5+2t=\lambda \\ 6+2t=1+\lambda \\ 1-t=-1+4\lambda\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5+2t=\lambda \\ 5+2t=\lambda \\ 2-t=4\lambda\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5+2t=\lambda \\ 2-t=4\lambda\end{cases} \Rightarrow 2-t=4(5+2t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2-t=20+8t \Rightarrow -9t=18 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow \begin{cases}x=5-4=1 \\ y=6-4=2 \\ z=1+2=3\end{cases}$$

Las dos rectas se cortan en el punto A(1,2,3).
Para ver que lo hacen de forma perpendicular compruebo que el producto escalar de sus vectores directores es cero.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_s}=(2,2,-1) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,1,4)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_s}\cdot\overrightarrow{v_r}=(2,2,-1)(1,1,4)=2+2-4=0$$

Comprobado que las dos rectas se cortan en A(1,2,3) de forma perpendicular.

6: Considere las rectas *r* y *s* dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r:\begin{cases}5x+3y=19\\ y-5z=3\end{cases} \qquad s:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{0}$$

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1,25 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que las rectas se crucen, determine el plano que contiene a la recta *r* y es paralelo a la recta *s*.

a) Pasamos la ecuación de la recta *r* a paramétricas.

$$r:\begin{cases}5x+3y=19\\ y-5z=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x+3y=19\\ y=3+5z\end{cases}\Rightarrow 5x+3(3+5z)=19\Rightarrow 5x+9+15z=19\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x=10-15z\Rightarrow x=2-3z\Rightarrow r:\begin{cases}x=2-3t\\ y=3+5t\\ z=t\end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_r}=(-3,5,1)$ y $\overrightarrow{v_s}=(-1,1,0)$. No tienen coordenadas proporcionales, por lo que no son paralelas ni coincidentes.

¿Se cortan o se cruzan?

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases}5x+3y=19\\ y-5z=3\end{cases}\\ s:\begin{cases}x=1-t\\ y=t\\ z=5\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}5(1-t)+3t=19\\ t-25=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5-5t+3t=19\\ t=28\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2t=14\\ t=28\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=-7\\ t=28\end{cases}$$

Salen dos valores distintos, por lo que el sistema no tiene solución y las rectas no se cortan sino que se cruzan.

b) Como las rectas se cruzan, determinamos el plano π que contiene a la recta *r* y es paralelo a la recta *s*.

El plano π contiene el punto $\mathrm{P_r}=(2,3,0)$ de la recta *r* y tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas (es paralelo a ellas).

$$\left.\begin{array}{l}P_r=(2,3,0)\in\pi\\ \vec{u}=\overrightarrow{v_r}=(-3,5,1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_s}=(-1,1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\pi:\begin{vmatrix}x-2 & y-3 & z\\ -3 & 5 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow -y+3-3z+5z-x+2=0$$

$$\boxed{\pi:-x-y+2z+5=0}$$

7: El peso de los recién nacidos, medido en kilogramos (kg), sigue una distribución normal de media $\mu = 2{,}8\ kg$ y desviación típica σ. Se sabe que solo el 20,05% de ellos pesa más de 3 kg.

a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese más de 2,6 kg?

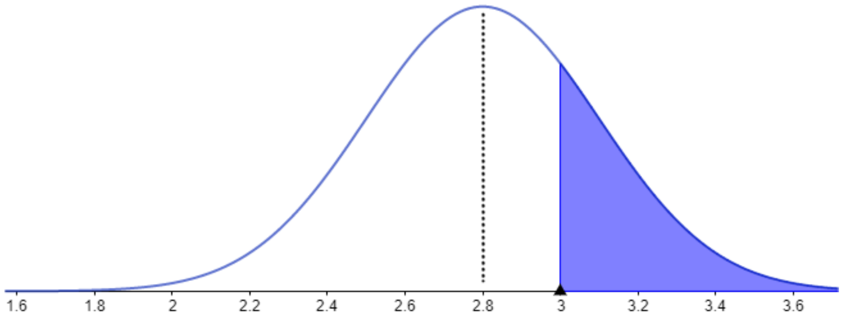
b) **[1 p.]** Calcule la desviación típica de esta distribución normal.

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,9 kg?

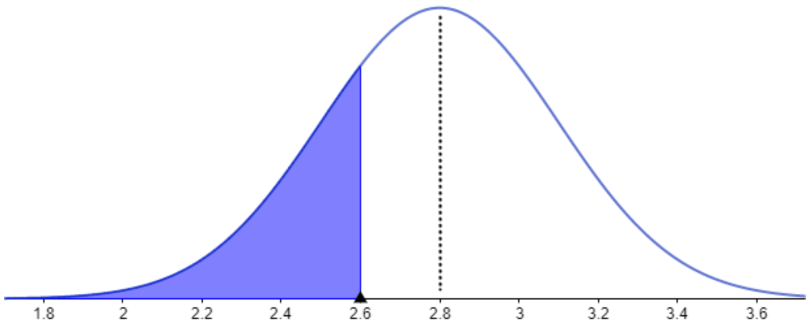
IMPORTANTE: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.

X = Peso en kg de un recién nacido.
X = N(2.8, σ)

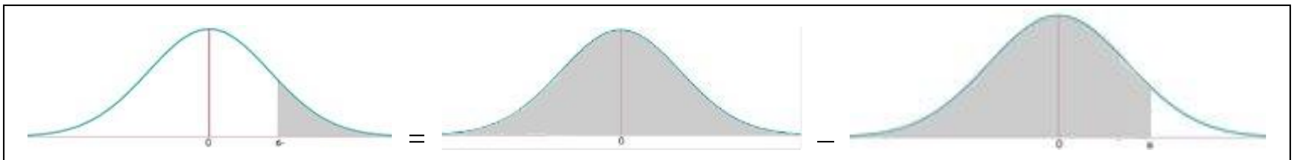
a) Por la simetría de la distribución normal tenemos que la $P(X \geq 3) = 0.2005$ y este área aparece en el dibujo inferior a 0.2 de distancia de la media:



Es igual que $P(X \leq 2.6)$ pues también está a distancia 0.2 de la media → $P(X \leq 2.6) = 0.2005$ Aparece en el dibujo.



Por lo que la probabilidad pedida vale $P(X \geq 2.6) = 1 - P(X \leq 2.6) = 1 - 0.2005 = \boxed{0.7995}$



b) $P(X \geq 3) = 0{,}2005 \Rightarrow P\left(\frac{X-2.8}{\sigma} \geq \frac{3-2.8}{\sigma}\right) = 0.2005 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{0.2}{\sigma}\right) = 0.2005 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{0.2}{\sigma}\right) = 0.2005 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{0.2}{\sigma}\right) = 1 - 0.2005 = 0.7995$

Buscamos en la tabla de la N(0, 1) obtenemos que $\frac{0.2}{\sigma} = 0.84 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{0.2}{0.84} = 0.2381}$

c) $P(X \leq 2.9) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{2.9-2.8}{0.2381}\right) = P(Z \leq 0.42) = \boxed{0.6628}$

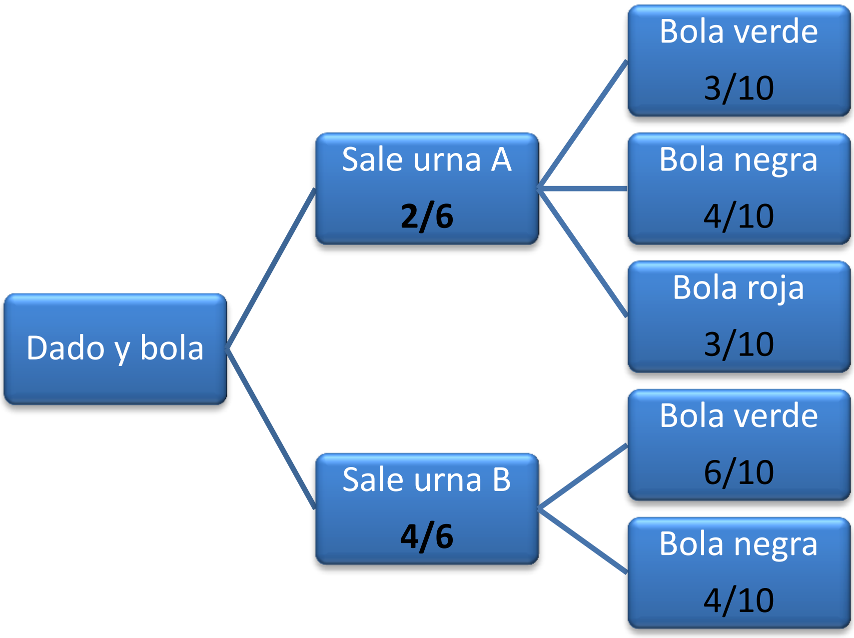
8: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 4 negras y 3 rojas, y la urna B contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras. Además, se tiene un dado que tiene 2 caras marcadas con la letra A y 4 caras marcadas con la letra B. Se lanza el dado y se saca una bola al azar de la urna que indica el dado.

a) **[0,75 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea verde?

b) **[0,75 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?

c) **[1 p.]** Si la bola extraída es verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

Construimos el diagrama de árbol descriptivo del experimento aleatorio planteado.
La probabilidad de sacar A en el dado es 2/6 y de sacar B es 4/6.



a) Sucede de dos formas distintas, la probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de cada rama del árbol.

$$P(\text{Sacar bola verde}) = P(\text{Elegir urna A})P(\text{Sacar bola verde / Elegir urna A}) +$$
$$+P(\text{Elegir urna B})P(\text{Sacar bola verde / Elegir urna B}) =$$
$$= \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{10}+\frac{4}{6}\cdot\frac{6}{10} = \frac{30}{60} = \boxed{\frac{1}{2} = 0,5}$$

b) Sucede de una única forma, pues en la urna B no hay bolas rojas.

$$P(\text{Sacar bola roja}) = P(\text{Elegir urna A})P(\text{Sacar bola roja / Elegir urna A}) =$$
$$= \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{10} = \frac{6}{60} = \boxed{\frac{1}{10} = 0,1}$$

c) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Proceda de urna B / Hemos sacado bola verde}) = \frac{P(\text{Elegir urna B } \cap \text{ Sacar bola verde})}{P(\text{Sacar bola verde})} =$$
$$= \frac{\frac{4}{6}\cdot\frac{6}{10}}{0,5} = \frac{0,4}{0,5} = \boxed{\frac{4}{5} = 0,8}$$