UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad
Curso Académico: 2019-2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.
En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.
Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos)

a) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\operatorname{sen}x\cos x}{1+\operatorname{sen}x\cos x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}$

b) Determinar el valor de la constante real *a* para que se satisfaga la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to 4}\frac{tg\left(\left(\frac{\pi}{8}+1\right)\sqrt{x}-2\right)}{x^2-16+ax}=\frac{1}{32}$$

2.- (2 puntos) Determinar los valores de los parámetros reales *a* y *b* para que las funciones $f(x)=ax^2+b$ y $g(x)=x^2+x+a$, sean tangentes en el punto de abscisa $x=-1$. Para los valores obtenidos de *a* y *b*, calcular la recta tangente a las curvas en $x=-1$.

3.- (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por las rectas $x=-2$, $x=2$, el eje *OX* y la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ x, & x\geq 0 \end{cases}$$

4.- (2 puntos) Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ .$$

a) Hallar ∝ y β de tal forma que $A^2=\alpha A+\beta I$, siendo *I* la matriz identidad.
b) Calcular A^5 utilizando la anterior igualdad.

5.- (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ay+(a+1)z=a, \\ ax+z=a, \\ x+az=-a. \end{cases}$$

a) Discutir y resolver según el valor del parámetro real *a*.
b) Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a=2$.

6.- (2 puntos) Sean A y B las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-13 & 5\\ 10 & -5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -4 & 2\end{pmatrix}$$

a) Hallar X e Y, matrices soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}3X-5Y=A,\\ -X+2Y=B.\end{cases}$$

b) Calcular si existen las matrices inversa de X e Y.

7.- (2 puntos) Determinar en función del parámetro real a, la posición relativa de los siguientes planos:

$$\begin{cases}(a-1)x+\qquad y-z=a,\\ (a+1)x+(2a+1)y+z=-a,\\ \quad ax+\qquad ay+z=-a.\end{cases}$$

8.- (2 puntos) Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}=(0,1,1)$.

a) Hallar un vector $\vec{w}$ de módulo uno, que sea perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) Calcular el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

9.- (2 puntos) En una clase de primero de primaria el 50% de los niños practica natación, el 20% practica baloncesto y el 5% ambos deportes.

a) Calcular la probabilidad de que un niño elegido al azar no practique ni natación ni baloncesto.

b) Calcular la probabilidad de que un niño practique natación si juega al baloncesto.

10.- (2 puntos) Se sabe que dos poblaciones distintas X e Y se distribuyen según una Normal de media 25. Además $P(X\geq 27)=P(Y\geq 30)=0{,}1587$. Calcular sus respectivas varianzas.

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

1.- (2 puntos)

a) Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-senx\cos x}{1+senx\cos x}\right)^{\frac{1}{senx}}$

b) Determinar el valor de la constante real *a* para que se satisfaga la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to 4}\frac{tg\left(\left(\frac{\pi}{8}+1\right)\sqrt{x}-2\right)}{x^2-16+ax}=\frac{1}{32}$$

a)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-senx\cos x}{1+senx\cos x}\right)^{\frac{1}{senx}}=\left(\frac{1-sen0\cos 0}{1+sen0\cos 0}\right)^{\frac{1}{sen0}}=1^{\infty}=\text{Indeterminación}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{senx}\left(\frac{1-senx\cos x}{1+senx\cos x}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{senx}\left(\frac{1-senx\cos x-1-senx\cos x}{1+senx\cos x}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\cancel{senx}\cos x}{\cancel{senx}(1+senx\cos x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\cos x}{1+senx\cos x}}=e^{\frac{-2}{1}}=\boxed{e^{-2}}$$

b)

$$\lim_{x\to 4}\frac{tg\left(\left(\frac{\pi}{8}+1\right)\sqrt{x}-2\right)}{x^2-16+ax}=\frac{tg\left(\left(\frac{\pi}{8}+1\right)\sqrt{4}-2\right)}{4a}=\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}+2-2\right)}{4a}=\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}\right)}{4a}=\frac{1}{4a}$$

$$\frac{1}{4a}=\frac{1}{32}\Rightarrow 4a=32\Rightarrow\boxed{a=8}$$

2.- (2 puntos) Determinar los valores de los parámetros reales *a* y *b* para que las funciones $f(x)=ax^2+b$ y $g(x)=x^2+x+a$, sean tangentes en el punto de abscisa $x=-1$. Para los valores obtenidos de *a* y *b*, calcular la recta tangente a las curvas en $x=-1$.

Si son tangentes deben de tener el mismo valor de la derivada.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^2+b\Rightarrow f'(x)=2ax\Rightarrow f'(-1)=-2a \\ g(x)=x^2+x+a\Rightarrow g'(x)=2x+1\Rightarrow g'(-1)=-2+1=-1\end{array}\right\}\Rightarrow -2a=-1\Rightarrow\boxed{a=\frac{1}{2}}$$

Y además deben de coincidir en dicho punto.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^2+b\Rightarrow f(-1)=a+b=\frac{1}{2}+b \\ g(x)=x^2+x+a\Rightarrow g(-1)=1-1+a=a=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{2}+b=\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{b=0}$$

Para $a=\frac{1}{2}$ y $b=0$ las funciones son $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ y $g(x)=x^2+x+\frac{1}{2}$.

Calculamos la ecuación de la recta tangente a $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ en $x=-1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=\dfrac{1}{2} \\ f'(x)=x \Rightarrow f'(-1)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{1}{2}=-1(x+1) \Rightarrow y=-x-1+\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y=-x-\frac{1}{2}}$$

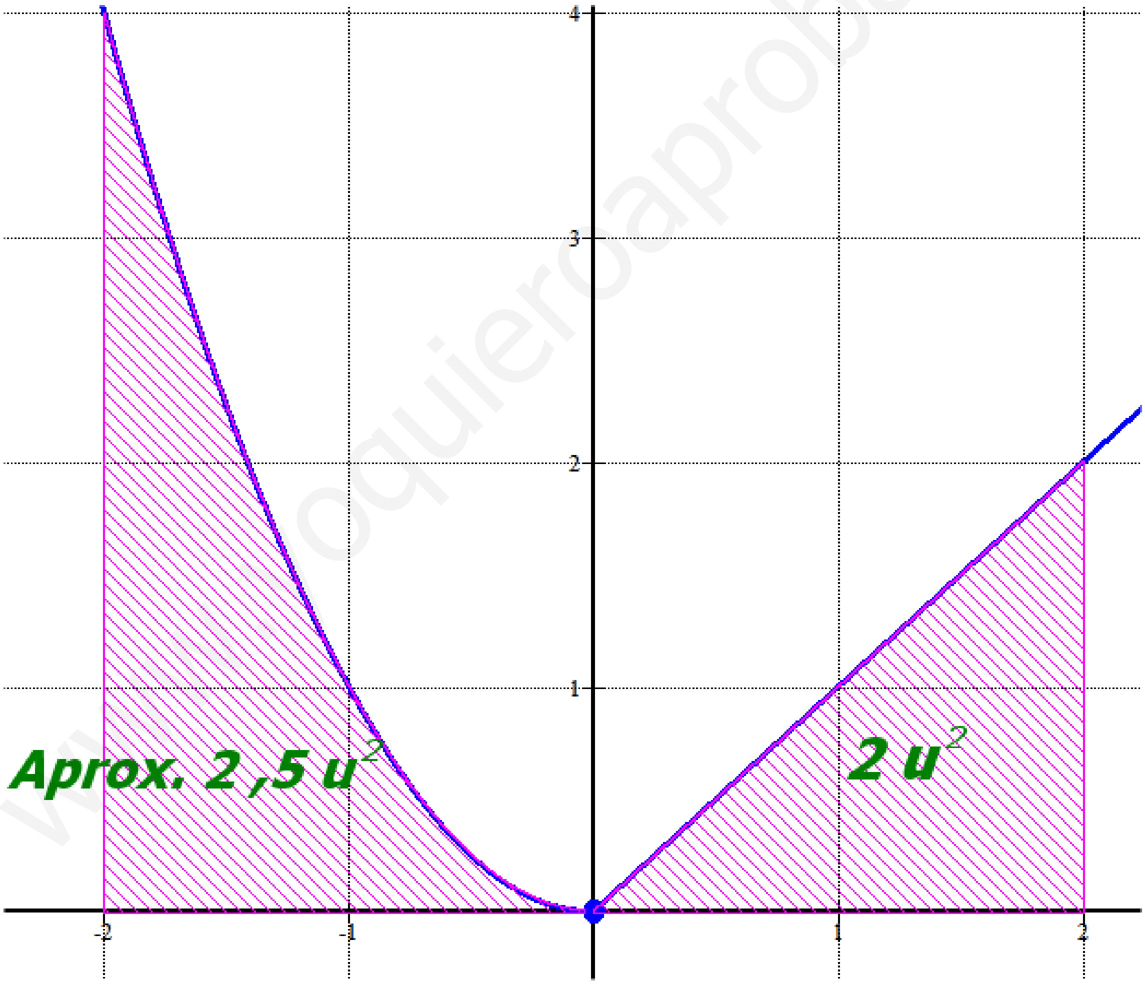
3.- (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por las rectas $x=-2$, $x=2$, el eje OX y la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0 \\ x, & x\geq 0 \end{cases}$$

Dividimos el recinto en dos partes, uno antes de $x = 0$ y otro después de $x = 0$.
Como estas dos funciones solo cortan el eje en $x = 0$, el área es:

$$Área=\int_{-2}^{0} x^2dx+\int_{0}^{2} xdx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2}=\left[\frac{0^3}{3}\right]-\left[\frac{(-2)^3}{3}\right]+\left[\frac{2^2}{2}\right]-\left[\frac{0^2}{2}\right]$$

$$Área=\frac{8}{3}+2=\boxed{\frac{14}{3}=4,66\,u^2}$$



4.- (2 puntos) Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad m\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \ .$$

a) Hallar ∝ y β de tal forma que $A^2=\alpha A+\beta I$, siendo I la matriz identidad.

b) Calcular A^5 utilizando la anterior igualdad.

a)

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2=\alpha A+\beta I \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\alpha+\beta & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha+\beta & 0 \\ \alpha m & 0 & 2\alpha+\beta \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4=2\alpha+\beta \\ \alpha m=4m \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4=2\alpha+\beta \\ \boxed{\alpha=4} \end{array}\right\} \Rightarrow 4=8+\beta \Rightarrow \boxed{\beta=-4}$$

Se cumple $A^2=4A-4I=4(A-I)$

b)

$$A^5=A^2\cdot A^2\cdot A=16(A-I)(A-I)A=16\left(A^2-A-A+I\cdot I\right)A=16\left(A^2-2A+I\right)A=$$

$$=16(4A-4I-2A+I)A=16(2A-3I)A=16\left(2A^2-3A\right)=$$

$$=16\left(2(4A-4I)-3A\right)=16(8A-8I-3A)=16(5A-8I)$$

$$A^5=16(5A-8I)$$

$$A^5=16\left(5\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}-8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)=16\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5m & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 80m & 0 & 32 \end{pmatrix}$$

5.- (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ay+(a+1)z=a, \\ ax+z=a, \\ x+az=-a. \end{cases}$$

a) Discutir y resolver según el valor del parámetro real a.
b) Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a=2$.

a) La matriz de coeficientes asociada es $A=\begin{pmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ con determinante

$|A|=\begin{vmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}=a-a^3$. Si lo igualamos a cero.

$$|A|=0 \Rightarrow a-a^3=0 \Rightarrow a\left(1-a^2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ 1-a^2=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\sqrt{1}=\pm 1 \end{cases}$$

Distinguimos 4 casos diferentes.

CASO 1. $a\neq 0; a\neq -1 \text{ y } a\neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado.

Lo resolvemos utilizando el método de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}}=\frac{-a^2-a^3}{a-a^3}=\frac{-a^2(1+a)}{a\left(1-a^2\right)}=\frac{-a^2(1+a)}{a(1-a)(1+a)}=\frac{-a}{1-a}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & a & 1 \\ 1 & -a & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}}=\frac{a-a^3-a^2-a^2-a-a^3}{a-a^3}=\frac{-2a^3-2a^2}{a-a^3}=\frac{-2a^2(a+1)}{a\left(1-a^2\right)}=\frac{-2a^2(1+a)}{a(1-a)(1+a)}=\frac{-2a}{1-a}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}}=\frac{a^2+a^3}{a-a^3}=\frac{a^2(1+a)}{a\left(1-a^2\right)}=\frac{a^2(1+a)}{a(1-a)(1+a)}=\frac{a}{1-a}$$

La solución es $\boxed{x = \frac{-a}{1-a}; \quad y = \frac{-2a}{1-a}; z = \frac{a}{1-a}}$

CASO 2. $a = 0$

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Su determinante es nulo, por lo que el rango no es 3. El rango es 2 pues al considerar el menor de orden 2 que resulta de quitarle la columna 2ª (todo ceros) y la fila 1ª (igual que la 2ª) tenemos $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ como solo le hemos añadido una columna de ceros su rango es el mismo que el de A.

Rango de A = 2 = Rango de A/B < 3 = Número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado.

Lo resolvemos:

Para resolverlo sustituimos en el sistema inicial y queda $\begin{cases} z = 0, \\ z = 0, \\ x = 0. \end{cases}$

Sus soluciones son $\boxed{x = 0; \ y = t; \ z = 0}$

CASO 3. $a = -1$

La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Su determinante es nulo, por lo que el rango no es 3. El rango es 2 pues al considerar el menor de orden 2 que resulta de quitarle la columna 3ª (proporcional a la 1ª) y la fila 3ª (proporcional a la 2ª) tenemos $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Como la columna 1ª y 3ª son proporcionales tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitarle la columna 1ª → $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1+1 = 0$. El rango de A/B no es 3, por lo que es 2 como el rango de A.

Rango de A = Rango de A/B = 2 < 3 = Número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado.

Lo resolvemos:

$$\begin{cases} -y=-1, \\ -x+z=-1, \\ x-z=1. \end{cases} \Rightarrow \{\text{Ecuación } 2^{a} = \text{Ecuación } 3^{a}\} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=1 \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son $\boxed{x=1+t;\ y=1;\ z=t}$

CASO 4. $a=1$

La matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Su determinante es nulo, por lo que el rango no es 3. El rango es 2 pues al considerar el menor de orden 2 que resulta de quitarle la columna 3ª y la fila 3ª (igual a la 2ª) tenemos $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitarle la 1ª columna el menor resultante tiene determinante

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1=-2\neq 0$. Por lo que el rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 $\neq$ 3 = Rango de A/B. **El sistema es incompatible**. No tiene solución.

b) Para $a=2$ la matriz asociada es $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ tiene determinante

$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2-8=-6\neq 0$. La matriz tiene inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{-6}=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 2/3 & -2/6 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & .1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

6.- (2 puntos) Sean A y B las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-13 & 5\\ 10 & -5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -4 & 2\end{pmatrix}$$

a) Hallar X e Y, matrices soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}3X-5Y=A,\\ -X+2Y=B.\end{cases}$$

b) Calcular si existen las matrices inversa de X e Y.

a) Despejamos en el sistema las matrices incógnitas.

$$\begin{cases}3X-5Y=A,\\ -X+2Y=B.\end{cases}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación } 1^{\text{a}} + 3\cdot\text{Ecuación } 2^{\text{a}}\\ \begin{array}{lll}3X & -5Y & =A\\ -3X & +6Y & =3B\\ \hline & Y & =A+3B\rightarrow \textit{Nueva ecuación } 2^{\text{a}}\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}3X-5Y=A,\\ Y=A+3B.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3X-5\left(A+3B\right)=A\Rightarrow 3X-5A-15B=A\Rightarrow 3X=6A+15B\Rightarrow X=2A+5B$$

Sustituimos el valor de las matrices y determinamos el valor de X e Y.

$$X=2A+5B=2\begin{pmatrix}-13 & 5\\ 10 & -5\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}5 & -2\\ -4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-26+25 & 10-10\\ 20-20 & -10+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$Y=A+3B=\begin{pmatrix}-13 & 5\\ 10 & -5\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}5 & -2\\ -4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13+15 & 5-6\\ 10-12 & -5+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

b)

$$X=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow |X|=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0;\text{ No existe la inversa de X.}$$

$$Y=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow |Y|=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=2-2=0;\text{ No existe la inversa de } Y$$

7.- (2 puntos) Determinar en función del parámetro real a, la posición relativa de los siguientes planos:

$$\begin{cases}(a-1)x+\quad y-z=a,\\(a+1)x+(2a+1)y+z=-a,\\ax+\quad ay+z=-a.\end{cases}$$

Es lo mismo que discutir un sistema.

Tomamos la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix}a-1 & 1 & -1\\ a+1 & 2a+1 & 1\\ a & a & 1\end{pmatrix}$

Calculamos su determinante e igualamos a cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}a-1 & 1 & -1\\ a+1 & 2a+1 & 1\\ a & a & 1\end{vmatrix}=(a-1)(2a+1)+a-(a+1)a+a(2a+1)-a-1-a(a-1)=$$

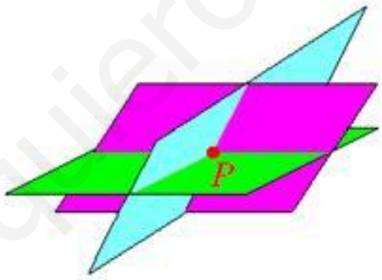
$$=2a^2+a-2a-1+a-a^2-a+2a^2+\cancel{a-a}-1-a^2+a=2a^2-2$$

$$|A|=0\Rightarrow 2a^2-2=0\Rightarrow 2a^2=2\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\sqrt{1}=\pm 1$$

CASO 1. $a\neq\pm 1$

En este caso el determinante es no nulo y el rango de la matriz A es 3. Al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas.

El sistema tiene una única solución (un punto). Los tres planos se cortan en un punto P.



CASO 2. $a=1$

En este caso el determinante de A es cero y su rango no es 3.

$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª

→ $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-2\neq 0$. El rango de A es 2.

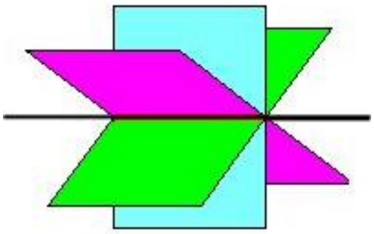
$A/B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ Le hemos añadido una columna que es proporcional a la 3ª. El rango de A/B es 2 como el de A.

Rango de A = Rango de A/B =2 < 3 = Número de incógnitas.

Es sistema tiene infinitas soluciones (una recta de puntos). Los tres planos coinciden en una recta.

$$\begin{cases} y-z=1, \\ 2x+3y+z=-1, \\ x+y+z=-1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1+z \\ 2x+3y=-1+z \\ x+y=-1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1+z \\ 2x+3+3z=-1+z \\ x+1+z=-1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1+z \\ 2x=-4-2z \\ x=-2-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1+z \\ x=-2-2z \end{cases}$$

Coinciden en la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} x=-2-2t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$



CASO 3. $a=-1$

En este caso el determinante de A es cero y su rango no es 3.

$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. El rango de A es 2.

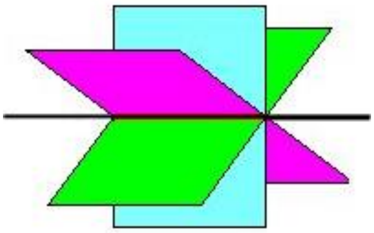
$A/B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Como la columna añadida es igual que la 3ª el rango de A/B es igual que el de A.

Rango de A = 2 = Rango de A/B < 3 = número de incógnitas.

El sistema tiene infinitas soluciones (una recta). Los tres planos se cortan en una recta.

$$\begin{cases} -2x+y-z=-1 \\ -y+z=1 \\ -x-y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+y-z=-1 \\ y=-1+z \\ -x-y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-1+z-z=-1 \\ y=-1+z \\ -x+1-z+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x=0 \\ y=-1+z \\ -x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1+z \\ x=0 \end{cases}$$

Coinciden en la recta de ecuación $s \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}$



8.- (2 puntos) Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}=(0,1,1)$.
a) Hallar un vector $\vec{w}$ de módulo uno, que sea perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
b) Calcular el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) Un vector perpendicular a otros dos es el que se obtiene con su producto vectorial.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2i+k-j-3i=-i-j+k=(-1,-1,1)$$

Este vector tiene módulo $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$

El vector que buscamos es el del producto vectorial dividido por su módulo, este vector tiene módulo 1 y es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{w}=\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}=\frac{(-1,-1,1)}{\sqrt{3}}=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

b)
El área del paralelogramo que definen dos vectores es el módulo del producto vectorial de ambos.

$$\text{Área}=\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}\,u^2$$

9.- (2 puntos) En una clase de primero de primaria el 50% de los niños practica natación, el 20% practica baloncesto y el 5% ambos deportes.
a) Calcular la probabilidad de que un niño elegido al azar no practique ni natación ni baloncesto.
b) Calcular la probabilidad de que un niño practique natación si juega al baloncesto.

Realizamos una tabla de contingencia para obtener los números de cada opción.

	Baloncesto	No baloncesto	TOTALES
Natación	5		50
No natación			
TOTALES	20		100

Completamos la tabla.

	Baloncesto	No baloncesto	TOTALES
Natación	5	**45**	50
No natación	**15**	**35**	**50**
TOTALES	20	**80**	100

a) P(no practique natación ni baloncesto) = 35% = $\boxed{0,35}$ Mirando en la tabla.

b) Como hay 20 que juegan al baloncesto y de estos 5 además practican natación, la probabilidad pedida es:

$$P(\text{Practique natación / Juega baloncesto})=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}=\boxed{0,25}$$

10.- (2 puntos) Se sabe que dos poblaciones distintas X e Y se distribuyen según una Normal de media 25. Además $P(X \geq 27) = P(Y \geq 30) = 0{,}1587$. Calcular sus respectivas varianzas.

Supongamos que X=N(25,σ) y que Y=N(25,σ´).

$$P(X \geq 27) = 0{,}1587 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{27-25}{\sigma}\right) = 0{,}1587 \Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{2}{\sigma}\right) = 0{,}1587$$

$$P\left(Z < \frac{2}{\sigma}\right) = 0{,}8413 \Rightarrow \{\text{Buscamos en la tabla}\} \Rightarrow \frac{2}{\sigma} = 1 \Rightarrow \sigma = 2 \Rightarrow \boxed{Varianza = 2^2 = 4}$$

$$P(Y \geq 30) = 0{,}1587 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{30-25}{\sigma'}\right) = 0{,}1587 \Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{5}{\sigma'}\right) = 0{,}1587$$

$$P\left(Z < \frac{5}{\sigma'}\right) = 0{,}8413 \Rightarrow \{\text{Buscamos en la tabla}\} \Rightarrow \frac{5}{\sigma'} = 1 \Rightarrow \sigma' = 5 \Rightarrow \boxed{Varianza' = 5^2 = 25}$$