EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2019–2020

MATERIA: MATEMÁTICAS II	(3)
	Convocatoria: JULIO

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B.
- En caso de presentar más de cuatro preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras.

. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo el proceso.

. Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a internet.

GRUPO A

1. Consideremos la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$, donde *ln* denota el logaritmo neperiano. Resuelva justificadamente los siguientes apartados:
   a. Presente el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles extremos relativos de la función *f(x)*. 1.25 ptos
   b. Calcule el valor de la integral: $\int_1^e f(x)dx$ 1.25 ptos

2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{pmatrix}$
   a. Halle los valores del parámetro *k* para los que la matriz *A* tiene inversa. 1 pto
   b. Tomando el valor $k=-1$ en la matriz *A*, calcule la matriz *X* que verifica que: $A\cdot X=24\cdot I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3. 1,5 ptos

3. Dadas las rectas siguientes $r:\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x=2 \\ y+5=0 \end{cases}$
   a. Estudie la posición relativa de *r* y *s*. 1,5 ptos
   b. Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta *r*, y que contiene el punto *A(11, –2, 5)* 1 pto

4. El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.
   a. ¿Qué porcentaje de esas impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento? 1.25 ptos
   b. ¿Qué porcentaje de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso? 1.25 ptos

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2019–2020

MATERIA: MATEMÁTICAS II	(3)
	Convocatoria: JULIO

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B.
- En caso de presentar más de cuatro preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras.

. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo el proceso.

. Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a internet.

GRUPO B

1. Sean las funciones $f(x) = 2x^4 + ax^2 + b$ y $g(x) = -2x^3 + c$.
   a. Calcule los valores *a*, *b* y *c* de manera que las gráficas de *f(x)* y *g(x)* cumplan las dos condiciones siguientes: 1.5 ptos
      - Se cortan en el punto *P(1, 1)*
      - En dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes.

      Dar las expresiones de las funciones resultantes.

   b. Suponiendo $a = b = 1$ en *f(x)*, halle las asíntotas de la función:
   $$h(x) = \frac{f(x)}{x^3 - 1}$$ 1 pto

2. Una pequeña bombonería tiene en su almacén 24 kg de chocolate y 60 litros de leche, con los que elabora tres productos distintos: cajas de bombones, tabletas de chocolate y paquetes de chocolate en polvo. Del resto de los ingredientes se tienen reservas suficientes.
   Se sabe que las cajas de bombones requieren 2 kg de chocolate y 6 litros de leche, las tabletas de chocolate requieren 4 kg de chocolate y 4 litros de leche, y cada paquete de chocolate en polvo requiere 1 kg de chocolate y 4 litros de leche. Se quiere fabricar un total de 12 unidades y con ello se consume todo el chocolate y toda la leche almacenados. ¿Cuántas unidades deben fabricarse de cada tipo de producto? 2.5 ptos

3. Consideremos la recta $r: \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x - 4z = -1 \end{cases}$, y el plano $\pi_1 \equiv x - y + 3z = 12$
   a. Calcule la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta *r* y es perpendicular al plano π_1. 1.25 ptos
   b. Sabiendo que la recta *r* corta el plano π_1 averigüe el punto de intersección. 1.25 ptos

4. Se sabe que el 8% de los análisis de comprobación del níquel en una aleación de acero son erróneos. Se realizan 10 análisis.
   a. Se afirma que la probabilidad de que 3 o más análisis sean erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto. 1.25 ptos
   b. Se afirma que la probabilidad de obtener exactamente 3 análisis erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto. 0.75 ptos
   c. Si se realizan 100 análisis, justifique si el número esperado de análisis correctos es igual a 8. 0.5 ptos

SOLUCIONES

GRUPO A

1. Consideremos la función $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, donde *ln* denota el logaritmo neperiano. Resuelva justificadamente los siguientes apartados:

a. Presente el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles extremos relativos de la función *f(x)*. 1.25 ptos

b. Calcule el valor de la integral: $\int_1^e f(x)dx$ 1.25 ptos

a. El dominio de un logaritmo son los valores positivos (*x* > *0*) y el denominador de la fracción (x^2) no se anula en dichos valores, por lo que el dominio de la función $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ es $(0,+\infty)$.

Para realizar el estudio de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función necesitamos la expresión de su derivada.

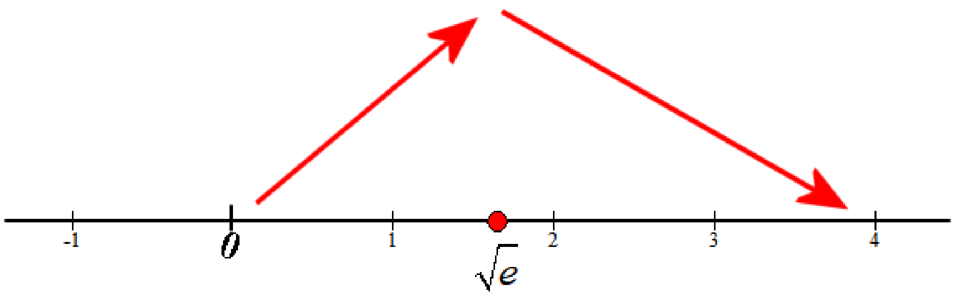
$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{\left(x^2\right)^2}=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{x\left(1-2\ln x\right)}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

Si igualamos a cero la derivada.

$$f\,'(x)=0\Rightarrow\frac{1-2\ln x}{x^3}=0\Rightarrow 1-2\ln x=0\Rightarrow 2\ln x=1\Rightarrow \ln x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

Estudiamos si la función crece o decrece en cada una de las dos partes en que se divide el dominio $(0,+\infty)$.

- En $\left(0,\sqrt{e}\right)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f\,'(1)=\frac{1-2\ln 1}{1^3}=1>0$. La función crece en $\left(0,\sqrt{e}\right)$.
- En $\left(\sqrt{e},+\infty\right)$ tomamos $x=e$ y la derivada vale $f\,'(\mathrm{e})=\frac{1-2\ln\mathrm{e}}{e^3}=\frac{-1}{e^3}<0$. La función decrece en $\left(\sqrt{e},+\infty\right)$.



A partir del esquema anterior la función presenta un máximo relativo en $x=\sqrt{e}$.

b.

$$\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx$$

Calculamos primero la primitiva y luego la integral definida.

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \int \frac{1}{x^2}\ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes } \int u\, dv = uv - \int v\, du \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = \frac{1}{x^2}dx \rightarrow v = \int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = -x^{-1} = \frac{-1}{x} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{-1}{x}\ln x - \int \frac{-1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{-\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = \frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{-1-\ln x}{x}$$

Seguimos con la integral definida.

$$\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[\frac{-1-\ln x}{x}\right]_1^e = \left[\frac{-1-\ln e}{e}\right] - \left[\frac{-1-\ln 1}{1}\right] = \boxed{\frac{-2}{e}+1}$$

2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{pmatrix}$

a. Halle los valores del parámetro *k* para los que la matriz *A* tiene inversa. 1 pto

b. Tomando el valor $k=-1$ en la matriz *A*, calcule la matriz *X* que verifica que: $A\cdot X=24\cdot I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3. 1,5 ptos

a. Para que tenga inversa tiene que tener determinante no nulo. Calculamos su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{vmatrix}=k(k-1)(k-3)-k(k-1)-k(k-1)$$

$$|A|=k(k-1)((k-3)-1-1)=k(k-1)(k-5)$$

Si igualamos a cero el determinante.

$$|A|=0\Rightarrow k(k-1)(k-5)=0\Rightarrow\begin{cases} k=0 \\ k=1 \\ k=5 \end{cases}$$

Existe la inversa de la matriz *A* cuando *k* es distinto de 0, 1 y 5.

b. Para $k=-1$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ y tiene inversa pues su determinante es no nulo.

Hallamos la inversa para poder despejar en la ecuación matricial planteada.

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix}=-8-2-2=-12\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}}{-12}=\frac{-1}{12}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{-1}{12}\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Despejamos en $A\cdot X=24\cdot I_3\Rightarrow X=A^{-1}24\cdot I_3=24\cdot A^{-1}$

$$X=24\cdot A^{-1}=24\cdot\frac{-1}{12}\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -20 & -2 & -4 \\ -4 & -10 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Dadas las rectas siguientes $r:\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x=2 \\ y+5=0 \end{cases}$

a. Estudie la posición relativa de *r* y *s*. 1,5 ptos

b. Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta *r*, y que contiene el punto *A(11, –2, 5)* 1 pto

a. Pasamos las ecuaciones de las rectas a paramétricas y obtenemos un punto y un vector director de cada una de ellas.

$$r:\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=4 \\ x=7-2y \end{cases} \Rightarrow 7-2y+y-z=4 \Rightarrow -y-z=-3 \Rightarrow z=3-y$$

$$r:\begin{cases} x=7-2y \\ y=y \\ z=3-y \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=7-2t \\ y=0+t \\ z=3-t \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} P_r(7,0,3) \\ \overrightarrow{v_r}=(-2,1,-1) \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} x=2 \\ y+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} x=2+0t \\ y=-5+0t \\ z=0+t \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} P_s(2,-5,0) \\ \overrightarrow{v_s}=(0,0,1) \end{cases}$$

Los vectores directores de ambas rectas no tienen coordenadas proporcionales:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(-2,1,-1) \\ \overrightarrow{v_s}=(0,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-2}{0}=\frac{1}{0}\neq\frac{-1}{1}$$

No son rectas coincidentes ni paralelas.
Solo pueden cruzarse o cortarse en un punto.

Para decidir en qué situación estamos calculamos el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{v_r}=(-2,1,-1)$, $\overrightarrow{v_s}=(0,0,1)$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$. Si es nulo se cortan y si no es nulo se cruzan.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(-2,1,-1) \\ \overrightarrow{v_s}=(0,0,1) \\ \overrightarrow{P_rP_s}=(2,-5,0)-(7,0,3)=(-5,-5,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right]=\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -5 & -3 \end{vmatrix}=-5-10=-15\neq 0$$

Las rectas se cruzan.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO.
Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las rectas.

$$\begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \\ x=2 \\ y+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \\ x=2 \\ y=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-5-z=4 \\ 2-10=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -z=7 \\ -8=7 \end{cases}$$

Obtenemos una igualdad imposible, por lo que las rectas no tienen puntos en común, entonces son paralelas o se cruzan.
Obtenemos los vectores directores de las rectas y comprobamos que no son paralelas igual que hemos hecho con anterioridad. Por lo tanto se cruzan.

b. Si el plano es perpendicular a la recta *r*, entonces ese plano tiene como vector normal el director de la recta $\vec{n} = \vec{v_r} = (-2,1,-1)$. La ecuación del plano es $-2x + y - z + D = 0$.
Como además contiene al punto *A(11, –2, 5)* → $-22 - 2 - 5 + D = 0$ → $D = 29$

El plano tiene ecuación $\boxed{-2x + y - z + 29 = 0}$

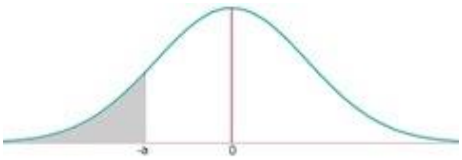
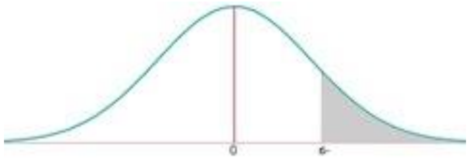
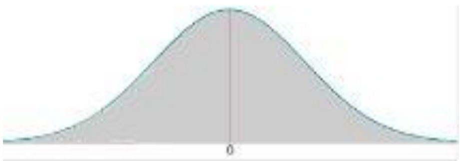
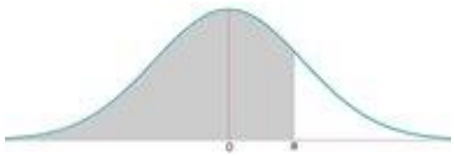
4. El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.
a. ¿Qué porcentaje de esas impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento? 1.25 ptos
b. ¿Qué porcentaje de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso? 1.25 ptos

X = Número de horas hasta la primera avería de una impresora
X = N(1500, 200)

a. Calculamos la probabilidad de que una impresora se averíe antes de 1000 horas. Esta probabilidad debe ser pequeña pues la media es 1500 horas y la desviación típica es 200. 1000 horas está muy por debajo de 1500 – 200 = 1300.

$$P(X < 1000) = \{Tipificamos\} = P\left(Z < \frac{1000-1500}{200}\right) =$$

$$= P(Z < -2,5) = P(Z > 2,5) = 1 - P(Z < 2,5) =$$


=

=

−


$$= \{\text{Buscamos en la tabla N(0, 1)}\} = 1 - 0,9938 = \boxed{0,0062}$$

El porcentaje es 0,62%.

b. Razonamos igual que en el apartado anterior. En este caso la probabilidad es muy alta ya que el intervalo incluye la media y con una amplitud mayor que la desviación típica.

$$P(1000 < X < 2000) = P(X < 2000) - P(X < 1000) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z < \frac{2000-1500}{200}\right) - P\left(Z < \frac{1000-1500}{200}\right) =$$

$$= P(Z < 2,5) - P(Z < -2,5) =$$

$$= P(Z < 2{,}5) - P(Z > 2{,}5) =$$
$$= P(Z < 2{,}5) - \left(1 - P(Z < 2{,}5)\right) =$$
$$= 2P(Z < 2{,}5) - 1 =$$
$$= 2 \cdot 0{,}9938 - 1 =$$
$$= 1{,}9876 - 1 = \boxed{0{,}9876}$$

El porcentaje es del 98,76%

GRUPO B

1. Sean las funciones $f(x) = 2x^4 + ax^2 + b$ y $g(x) = -2x^3 + c$.
a. Calcule los valores *a*, *b* y *c* de manera que las gráficas de *f(x)* y *g(x)* cumplan las dos condiciones siguientes: 1.5 ptos
- Se cortan en el punto *P(1, 1)*
- En dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes.

Dar las expresiones de las funciones resultantes.
b. Suponiendo $a = b = 1$ en *f(x)*, halle las asíntotas de la función:
$h(x) = \dfrac{f(x)}{x^3 - 1}$ 1 pto

a. Se cortan en el punto *P(1, 1)*. Esto implica que las dos pasan por dicho punto.

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(x) = 2x^4 + ax^2 + b \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 2 + a + b \Rightarrow \underline{-1 = a + b}$$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = -2x^3 + c \\ g(1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = -2 + c \Rightarrow \boxed{c = 3}$$

En el punto *P(1, 1)* coinciden las pendientes de las rectas tangentes. Esto implica que $f'(1) = g'(1)$.

$$g(x) = -2x^3 + c \Rightarrow g'(x) = -6x^2 \Rightarrow g'(1) = -6 \cdot 1^2 = -6$$
$$f(x) = 2x^4 + ax^2 + b \Rightarrow f'(x) = 8x^3 + 2ax \Rightarrow f'(1) = 8 \cdot 1^3 + 2a = 8 + 2a$$

Así tenemos que $f'(1) = g'(1) \Rightarrow -6 = 8 + 2a \Rightarrow 2a = -14 \Rightarrow \boxed{a = -7}$

Y sustituyendo en la primera ecuación obtenida al principio del ejercicio:

$$\left.\begin{array}{l} -1 = a + b \\ a = -7 \end{array}\right\} \Rightarrow -1 = -7 + b \Rightarrow \boxed{b = 6}$$

Los valores son $\boxed{a = -7; b = 6; c = 3}$

Las funciones quedan con la expresión: $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 6$ y $g(x) = -2x^3 + 3$

b. La función $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^3 - 1}$ con $a = b = 1$ queda $h(x) = \dfrac{2x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1}$

Hallamos primero el dominio de la función *h(x)*.
Averiguo cuando se anula el denominador.

$$x^3-1=0 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{1}=1$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{1\}$

Asíntota vertical. $x=a$

$$\lim_{x\to 1} h(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}=\frac{4}{0}=\infty$$

La asíntota vertical es $x=1$

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4}{x^3}=\lim_{x\to\infty}2x=\infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+x^2+1}{x^4-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4}{x^4}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(h(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^4+x^2+1}{x^3-1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^4}+x^2+1-\cancel{2x^4}+2x}{x^3-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1+2x}{x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

La asíntota oblicua es $y=2x$

2. Una pequeña bombonería tiene en su almacén 24 kg de chocolate y 60 litros de leche, con los que elabora tres productos distintos: cajas de bombones, tabletas de chocolate y paquetes de chocolate en polvo. Del resto de los ingredientes se tienen reservas suficientes.
Se sabe que las cajas de bombones requieren 2 kg de chocolate y 6 litros de leche, las tabletas de chocolate requieren 4 kg de chocolate y 4 litros de leche, y cada paquete de chocolate en polvo requiere 1 kg de chocolate y 4 litros de leche. Se quiere fabricar un total de 12 unidades y con ello se consume todo el chocolate y toda la leche almacenados. ¿Cuántas unidades deben fabricarse de cada tipo de producto? 2.5 ptos

Es un problema que debemos resolver con un sistema lineal de ecuaciones.
Llamemos "*x*" al número de cajas de bombones, "*y*" al número de tabletas de chocolate, "*z*" al número de paquetes de chocolate en polvo.

"*Se quiere fabricar un total de 12 unidades*" → $x+y+z=12$

Hacemos una tabla para hacer más fácil la obtención de las otras dos ecuaciones.

	Kg de chocolate	Litros de leche
Cajas de bombones (x)	2x	6x
Tabletas de chocolate (y)	4y	4y
Paquetes de chocolate en polvo (z)	z	4z
TOTALES	$2x+4y+z$	$6x+4y+4z$

Solo disponen de 24 kg de chocolate → $2x+4y+z=24$

Solo disponen de 60 litros de leche → $6x+4y+4z=60$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ 2x+4y+z=24 \\ 6x+4y+4z=60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=12 \\ 2x+4y+z=24 \\ 3x+2y+2z=30 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{a} - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^{a} \\ \begin{array}{rrrr} 2x & +4y & +z & =24 \\ -2x & -2y & -2z & =-24 \\ \hline & 2y & -z & =0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{a} - 3 \cdot \text{Ecuación } 1^{a} \\ \begin{array}{rrrr} 3x & +2y & +2z & =30 \\ -3x & -3y & -3z & =-36 \\ \hline & -y & -z & =-6 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{a} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=12 \\ 2y-z=0 \\ -y-z=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{a} + 2 \cdot \text{Ecuación } 3^{a} \\ \begin{array}{rrr} 2y & -z & =0 \\ -2y & -2z & =-12 \\ \hline & -3z & =-12 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{a} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=12 \\ 2y-z=0 \\ -3z=-12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=12 \\ 2y-z=0 \\ \boxed{z=4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+4=12 \\ 2y-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=8 \\ 2y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=8 \\ \boxed{y=2} \end{array}\right\} \Rightarrow x+2=8 \Rightarrow \boxed{x=6}$$

Deben fabricarse 6 cajas de bombones, 2 tabletas de chocolate y 4 paquetes de chocolate en polvo.

3. Consideremos la recta $r:\begin{cases} 2x-y=5 \\ 3x-4z=-1 \end{cases}$, y el plano $\pi_1 \equiv x-y+3z=12$

a. Calcule la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta *r* y es perpendicular al plano π_1. 1.25 ptos

b. Sabiendo que la recta *r* corta el plano π_1 averigüe el punto de intersección. 1.25 ptos

a. Pasamos la ecuación de la recta a paramétricas y obtenemos un punto y un vector director de la recta.

$$r:\begin{cases}2x-y=5\\3x-4z=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-5=y\\3x+1=4z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x\\y=-5+2x\\4z=1+3x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=x\\y=-5+2x\\z=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\end{cases}$$

$$r:\begin{cases}x=0+t\\y=-5+2t\\z=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}t\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}P\left(0,-5,\frac{1}{4}\right)\\\overrightarrow{v_r}=\left(1,2,\frac{3}{4}\right)\end{cases}$$

Como salen con fracciones tanto el punto de la recta tomaremos otro punto.

$$t=1\rightarrow\begin{cases}x=0+1=1\\y=-5+2=-3\Rightarrow Q(1,-3,1)\\z=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1\end{cases}$$

Como el vector director sale con fracciones tomamos otro vector director que sea 4 veces el obtenido antes → $\overrightarrow{u_r}=4\cdot\overrightarrow{v_r}=(4,8,3)$.

El plano π_2 contiene a la recta *r* por lo que tiene como vector director el de la recta $\overrightarrow{u_r}=(4,8,3)$. Es perpendicular al plano π_1 por lo que tiene como vector director el normal del plano π_1 → $\overrightarrow{n_1}=(1,-1,3)$.

También el punto Q de la recta está en el plano π_2.

$$\left.\begin{array}{l}Q(1,-3,1)\in\pi_2\\\overrightarrow{u_2}=\overrightarrow{u_r}=(4,8,3)\\\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{n_1}=(1,-1,3)\end{array}\right\}\Rightarrow\pi_2\equiv\begin{vmatrix}x-1&y+3&z-1\\4&8&3\\1&-1&3\end{vmatrix}=0$$

$$24x-24+3y+9-4z+4-8z+8-12y-36+3x-3=0$$
$$27x-9y-12z-42=0$$
$$\boxed{\pi_2\equiv9x-3y-4z-14=0}$$

b. Resolvemos el sistema que se plantea con las ecuaciones de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l}r:\begin{cases}2x-y=5\\3x-4z=-1\end{cases}\\\pi_1\equiv x-y+3z=12\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2x-y=5\\3x-4z=-1\\x-y+3z=12\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2x-5=y\\3x-4z=-1\\x-y+3z=12\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x-4z=-1\\x-(2x-5)+3z=12\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x-4z=-1\\x-2x+5+3z=12\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x-4z=-1\\-x+3z=7\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x-4z=-1\\3z-7=x\end{array}\right\}\Rightarrow3(3z-7)-4z=-1\Rightarrow9z-21-4z=-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5z = 20 \Rightarrow \boxed{z = 4} \Rightarrow \boxed{x = 3\cdot 4 - 7 = 5} \Rightarrow \boxed{y = 2\cdot 5 - 5 = 5}$$

El punto intersección de recta y plano es $(5,5,4)$

4. Se sabe que el 8% de los análisis de comprobación del níquel en una aleación de acero son erróneos. Se realizan 10 análisis.
a. Se afirma que la probabilidad de que 3 o más análisis sean erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto. 1.25 ptos
b. Se afirma que la probabilidad de obtener exactamente 3 análisis erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto. 0.75 ptos
c. Si se realizan 100 análisis, justifique si el número esperado de análisis correctos es igual a 8. 0.5 ptos

Se trata de un ejercicio de distribución binomial pues se repite 10 veces un proceso cuyo resultado es “éxito” o “fracaso” y la probabilidad de ambos es la misma en cada repetición.

Llamamos “éxito” a “análisis erróneo”.
Probabilidad de “éxito” es 0,08. *p = 0,08. q =0,92*
El número de repeticiones es 10 → *n = 10.*

X = Número de análisis erróneos en 10 análisis.
X = B(10, 0,08)

a. Calculamos la probabilidad y vemos si es menor de 0,03.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \left(P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\right) =$$

$$= 1 - \left(\binom{10}{0} 0,08^0 \cdot 0,92^{10} + \binom{10}{1} 0,08^1 \cdot 0,92^9 + \binom{10}{2} 0,08^2 \cdot 0,92^8\right) =$$

$$= 1 - \left(0,92^{10} + 10\cdot 0,08 \cdot 0,92^9 + 45 \cdot 0,08^2 \cdot 0,92^8\right) = 0,04$$

La probabilidad es del 4%, por lo que **no** es menor que el 3%.

b. Calculamos la probabilidad y vemos si es menor de 0,03.

$$P(X=3) = \binom{10}{3} 0,08^3 \cdot 0,92^7 = \frac{10!}{3!7!} 0,08^3 \cdot 0,92^7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} 0,08^3 \cdot 0,92^7 =$$

$$= 120 \cdot 0,08^3 \cdot 0,92^7 = 0,034$$

La probabilidad es del 3,4 %, por lo que **no** es menor que el 3%.

c. La probabilidad de un análisis correcto es *p = 0,92*. Si repito 100 veces el análisis entonces el número de análisis correctos es una distribución binomial de parámetros *n = 100* y *p = 0,92*.

X = B(100, 0.92)

La media es $n \cdot p = 100 \cdot 0,92 = 92$.
El número esperado de análisis correctos es 92. Y 8 son los que se espera que salgan erróneos.