	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** **Nº Páginas: 3**

El alumno deberá escoger libremente CINCO problemas completos de los DIEZ propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ:

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$ **(1,2 puntos)**

a) Resolverlo para $\lambda = 1$. **(0,8 puntos)**

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}$

a) Encontrar los valores de *m* y *n* para que se verifique:

$A^2 = A^t$ ($A^t \equiv$ *la traspuesta de* A) **(1,2 puntos)**

b) ¿Para qué valores de *m* y *n* la matriz A no es invertible? **(0,8 puntos)**

E3.- (Geometría)

Dado el punto $P = (2,1,1)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-4}{-3}$,

a) Hallar la recta paralela a *r* que pase por *P* **(0,8 puntos)**

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto *P* y contiene a la recta *r*. **(1,2 puntos)**

E4.- (Geometría)

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2, 3) y es paralela a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$ **(1 punto)**

b) Calcular el punto simétrico del (1, 2, 3) respecto del plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$. **(1 punto)**

E5.- (Análisis)

Determinar la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, conociendo que tiene un punto de inflexión en $x = 1$ y que la recta tangente a su gráfica en el punto (–1, 0) es el eje de abscisas. **(2 puntos)**

E6.- (Análisis)

Demuestre que la ecuación $x^4+3x=1+senx$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0,2]$. Probar que la solución es única. **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

a) Calcular $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x}$. **(1 punto)**

b) Dada la función $f(x)=\dfrac{2x-e^{-x}}{x^2+e^{-x}}$, hallar la función primitiva suya *F(x)* que verifique *F(0) = 3*.

(1 punto)

E8.- (Análisis)

a) Dada la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. Encontrar sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Dada la función $f(x)=x^2-2x$. Estudiar el signo de la función en el intervalo $[1,3]$ y encontrar el área del recinto comprendido entre su gráfica, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=3$.

(1 punto)

E9- (Probabilidad y estadística)

El consumo de azúcar en un determinado país, calculado en Kg (kilogramos) por persona y año, varía según una distribución normal de media 15 y desviación típica 5.

a) ¿Qué porcentaje de personas de ese país consumen menos de 10 Kg de azúcar al año?

(1 punto)

b) ¿Cuál es el porcentaje de personas del país cuyo consumo anual de azúcar es superior a 25 Kg? **(1 punto)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

Los estudiantes, que comienzan los estudios de Medicina, en el conjunto formado por las comunidades autónomas de Andalucía, Baleares y Castilla y León, se distribuyen de la siguiente forma: un 50% de Andalucía, un 15% de Baleares y un 35% provienen de Castilla y León. Los porcentajes de dichos estudiantes que no consiguen el título de Médico son los siguientes: 15% de Andalucía, 10% de Baleares y 5% de Castilla y León

a) Calcular la probabilidad de que uno de dichos estudiantes, elegido al azar, no consiga el título de Licenciado en Medicina. **(1 punto)**

b) Si un alumno no consigue el título de Licenciado en Medicina, ¿es más probable que provenga de Andalucía o de Castilla y León? **(1 punto)**

SOLUCIONES

E1.- (Álgebra)
a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ:

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para $\lambda = 1$. **(0,8 puntos)**

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Con determinante $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 - 1 - \lambda = \lambda^2 - \lambda$. Igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Estudiamos 3 situaciones distintas.

CASO 1. $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $\lambda = 0$

El sistema queda:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 1} \\ x + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ x + 1 + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{¡}IMPOSIBLE\text{!}$$

Resolviendo el sistema se llega a una situación imposible pues una expresión ($x + y$) no puede dar dos valores diferentes (1 y 2).
El sistema es incompatible.

CASO 3. $\lambda = 1$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª = Ecuación 3ª} \\ \text{Quito ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1 - y} \\ x + z = 2 - y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - y + z = 2 - y \Rightarrow \boxed{z = 1}$$

El sistema es compatible indeterminado.
Tiene infinitas soluciones: $x = 1 - t;\ y = t;\ z = 1 \quad con\ t \in \mathbb{R}$

b) Para $\lambda = 1$ las soluciones son $x = 1 - t;\ y = t;\ z = 1 \quad con\ t \in \mathbb{R}$. Resuelto en apartado a) CASO 3.

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ m & n\end{pmatrix}$

a) Encontrar los valores de *m* y *n* para que se verifique:

$A^2 = A^t$ ($A^t \equiv la\ traspuesta\ de\ A$) **(1,2 puntos)**

b) ¿Para qué valores de *m* y *n* la matriz A no es invertible? **(0,8 puntos)**

a)

$$\left.\begin{array}{r} A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ m & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ m & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ m+nm & n^2\end{pmatrix} \\ A^t=\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & n\end{pmatrix} \\ A^2=A^t \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ m+nm & n^2\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1=1 \\ m=0 \\ 0=m+nm \\ n=n^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{m=0} \\ 0=m+nm \\ n=n^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0=0+0 \\ n=n^2 \end{array}\right\} \Rightarrow n=n^2 \Rightarrow n^2-n=0 \Rightarrow n(n-1)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{n=0} \\ o \\ \boxed{n=1} \end{array}\right.$$

Los valores son: $m=n=0 \quad o \quad m=0\ y\ n=1$

b) Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero, para averiguar esos valores para los que la matriz A no es invertible.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ m & n\end{vmatrix}=n$$

$$|A|=0 \Rightarrow n=0$$

Para $n=0$ y cualquier valor de *m* la matriz no es invertible.

E3.- (Geometría)

Dado el punto $P=(2,1,1)$ y la recta $r\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-4}{-3}$,

a) Hallar la recta paralela a *r* que pase por *P* **(0,8 puntos)**

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto *P* y contiene a la recta *r*. **(1,2 puntos)**

a) Si la recta *s* es paralela a la recta *r* tiene el mismo vector director.

$$\vec{v_s}=\vec{v_r}=(1,-1,-3)$$

Hallamos la ecuación de la recta *s* paralela a *r* que pasa por $P=(2,1,1)$:

$$\left.\begin{array}{l} P=(2,1,1)\in s \\ \vec{v_s}=\vec{v_r}=(1,-1,-3)\end{array}\right\}\Rightarrow s\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-3}$$

b) Si el plano π contiene al punto P y a la recta *r* entonces debe tener como vectores directores el director de la recta $\vec{v_r}$ y también el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo Q un punto cualquiera de la recta *r*.

$$r\equiv\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-4}{-3}\Rightarrow Q=(2,3,4)$$

$$\overrightarrow{PQ}=(2,3,4)-(2,1,1)=(0,2,3)$$

$$\left.\begin{array}{l} P=(2,1,1)\in\pi \\ \vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(0,2,3) \\ \vec{v}=\vec{v_r}=(1,-1,-3)\end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix}=0$$

$$-6x+12+3y-3-2z+2+3x-6=0$$

$$\boxed{\pi\equiv -3x+3y-2z+5=0}$$

E4.- (Geometría)

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2, 3) y es paralela a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x+y+z-3=0 \end{cases}$$ **(1 punto)**

b) Calcular el punto simétrico del (1, 2, 3) respecto del plano $\pi \equiv 3x+2y+z+4=0$. **(1 punto)**

a) Hallamos el vector director de la recta *r* mediante el producto escalar de los vectores normales de los planos que la definen.

$$\vec{v_r} = \vec{n} \times \vec{n'} = (1,-1,-1)\times(1,1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i-j+k+k-j+i = -2j+2k = (0,-2,2)$$

La recta s paralela a r que pasa por (1, 2, 3) tiene ecuación:

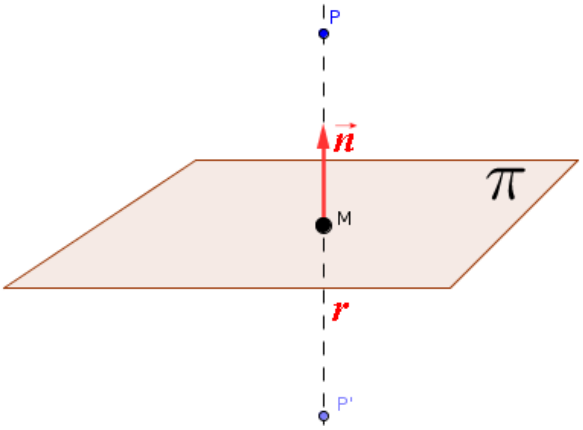
$$\left.\begin{array}{l} (1,\ 2,\ 3) \in s \\ \vec{v_s} = (0,-2,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{2}}$$

b) Hallamos la ecuación de la recta *t* perpendicular al plano $\pi \equiv 3x+2y+z+4=0$ que pasa por el punto P(1, 2, 3).

$$\left.\begin{array}{l} (1,2,3) \in t \\ \vec{v_t} = \vec{n} = (3,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 1+3\alpha \\ y = 2+2\alpha \\ z = 3+\alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte M de la recta *t* y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} t \equiv \begin{cases} x = 1+3\alpha \\ y = 2+2\alpha \\ z = 3+\alpha \end{cases} \\ \pi \equiv 3x+2y+z+4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow 3(1+3\alpha)+2(2+2\alpha)+3+\alpha+4=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3+9\alpha+4+4\alpha+3+\alpha+4=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 14\alpha+14=0 \Rightarrow 14\alpha=-14 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha=-1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1-3=-2 \\ y = 2-2=0 \\ z = 3-1=2 \end{cases} \Rightarrow M(-2,0,2)$$

El punto simétrico *P´(a,b,c)* es un punto tal que el vector $\overrightarrow{P'M} = \overrightarrow{MP}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P'M} = (-2,0,2)-(a,b,c) = (-2-a,-b,2-c) \\ \overrightarrow{MP} = (1,2,3)-(-2,0,2) = (3,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow (-2-a,-b,2-c) = (3,2,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2-a=3 \rightarrow a=-5 \\ -b=2 \rightarrow b=-2 \\ 2-c=1 \rightarrow c=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P'(-5,-2,1) \text{ Simétrico de P respecto del plano } \pi}$$

E5.- (Análisis)
Determinar la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, conociendo que tiene un punto de inflexión en $x = 1$ y que la recta tangente a su gráfica en el punto (–1, 0) es el eje de abscisas. **(2 puntos)**

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow f''(x)=6x+2a \Rightarrow f'''(x)=6$$

Al tener un punto de inflexión en $x = 1$ significa que se anula la derivada segunda y la tercera es no nula.

$$\left.\begin{array}{l} f''(1)=6+2a=0 \\ f'''(1)=6\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6+2a=0 \Rightarrow \boxed{a=-3}$$

La función tiene la expresión $f(x)=x^3-3x^2+bx+c$ y la derivada es $f'(x)=3x^2-6x+b$

Falta determinar el valor de "b" y "c".

Si la recta tangente a su gráfica en el punto (–1, 0) es el eje de abscisas ($y=0$) significa que $f(-1)=0$ y que $f'(-1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+b(-1)+c \Rightarrow -1-3-b+c=0 \Rightarrow c-b=4 \\ f'(-1)=3(-1)^2-6(-1)+b=0 \Rightarrow 3+6+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-9} \end{array}\right\} \Rightarrow c+9=4 \Rightarrow \boxed{c=-5}$$

Las constantes son $a=-3$; $b=-9$; $c=-5$ y la función es $\boxed{f(x)=x^3-3x^2-9x-5}$

E6.- (Análisis)
Demuestre que la ecuación $x^4+3x=1+senx$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0,2]$. Probar que la solución es única. **(2 puntos)**

A partir de la ecuación planteada consideramos la función $f(x)=x^4+3x-1-senx$.
En $x=0$ la función vale $f(0)=0^4+0-1-sen0=-1<0$.
En $x=2$ la función vale $f(2)=2^4+6-1-sen2=21-sen2>0$.

La función $f(x)=x^4+3x-1-senx$ es continua en $[0,2]$ y toma valores de distinto signo en cada extremo del intervalo, por el teorema de Bolzano existe $c\in[0,2]$ tal que $f(\mathrm{c})=0$.
Esto implica que existe $c\in[0,2]$ tal que $f(\mathrm{c})=c^4+3c-1-senc=0\Rightarrow c^4+3c=1+senc$

Además esta solución es única, ya que si hubiese otro valor $d\in[0,2]$ tal que $f(d)=0$.
Podríamos aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)=x^4+3x-1-senx$ en el intervalo $[c,d]$, pues la función es derivable en (c,d), continua en $[\mathrm{c},\mathrm{d}]$.
El teorema de Rolle nos asegura la existencia de un valor $e\in(c,d)$ tal que $f\,'(e)=0$.
Pero la derivada de la función es $f\,'(x)=4x^3+3-\cos x$, si la igualamos a cero obtenemos:

$$f\,'(x)=0\Rightarrow 4x^3+3-\cos x=0\Rightarrow 4x^3=-3+\cos x.$$

Esta igualdad es imposible para $x\in(0,2)$ pues $\left.\begin{array}{r}4x^3>0\\ \cos x\le 1\Rightarrow -3+\cos x<0\end{array}\right\}$

La contradicción obtenida permite afirmar que la solución de la ecuación inicial es única.

E7.- (Análisis)

a) Calcular $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x}$. **(1 punto)**

b) Dada la función $f(x)=\frac{2x-e^{-x}}{x^2+e^{-x}}$, hallar la función primitiva suya *F(x)* que verifique *F(0) = 3*.

(1 punto)

a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{2x-1}}{1-x}=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{1}}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}-\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}}{-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-2x+1}{2\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}=\frac{-1}{2}+\frac{2}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

b) Como la derivada de x^2+e^{-x} **es** $2x-e^{-x}$**:**

$$F(x)=\int f(x)dx=\int\frac{2x-e^{-x}}{x^2+e^{-x}}dx=\ln\left(x^2+e^{-x}\right)+K$$

Como debe cumplirse que *F(0) = 3* entonces $\ln\left|0^2+e^{-0}\right|+K=3\Rightarrow K=3$**.**

$$\boxed{F(x)=\ln\left(x^2+e^{-x}\right)+3}$$

E8.- (Análisis)

a) Dada la función $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Encontrar sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Dada la función $f(x)=x^2-2x$. Estudiar el signo de la función en el intervalo $[1,3]$ y encontrar el área del recinto comprendido entre su gráfica, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=3$. **(1 punto)**

a) El dominio de la función es $(0,+\infty)$**,** pues no existe el logaritmo de un número negativo.

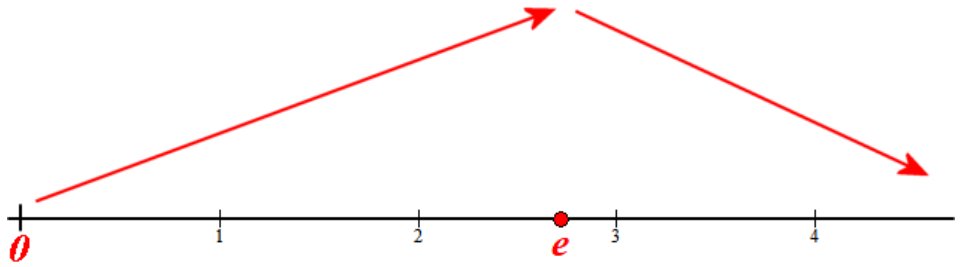
$$f(x)=\frac{\ln x}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow 1-\ln x=0\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow x=e$$

Estudiamos el comportamiento de la función antes y después de $x = e$.

- En $(0,e)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\frac{1-\ln 1}{1^2}=1>0$. La función crece en $(0,e)$.
- En $(e,+\infty)$ tomamos $x = e^2$ y la derivada vale $f'(e^2)=\frac{1-\ln e^2}{e^4}=\frac{-1}{e^4}<0$. La función decrece en $(e,+\infty)$.



La función crece en $(0,e)$ y decrece en $(e,+\infty)$.

Tiene un máximo relativo en $x = e$.

Como $f(\mathrm{e})=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$ el punto $\left(e,\frac{1}{e}\right)$ es un máximo relativo de la función.

b) Vemos donde se anula la función.

$$f(x)=0\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$$

$x = 2$ pertenece al intervalo $[1,3]$ por lo que se divide en dos partes, vemos el signo de la función en cada una de ellas.

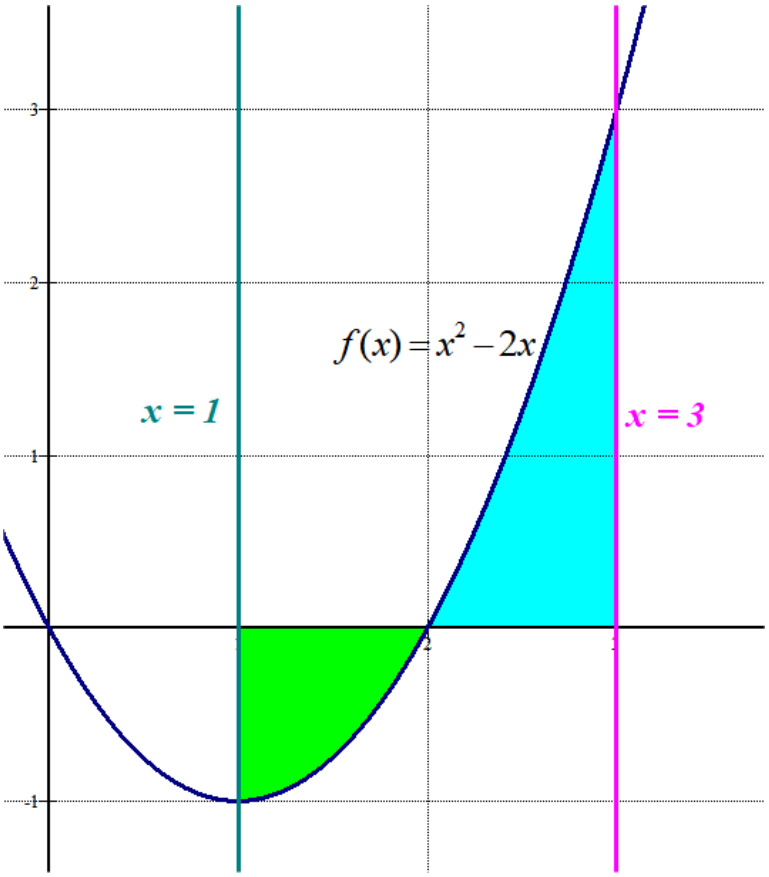
- En $[1,2)$ tomamos $x = 1{,}5$ y la función vale $f(1{,}5)=1{,}5^2-3=-0{,}75<0$. Es negativa en el intervalo $[1,2)$.
- En $(2,3]$ tomamos $x = 2{,}5$ y la función vale $f(2{,}5)=2{,}5^2-5=1{,}25>0$. Es positiva en el intervalo $(2,3]$.

El área del recinto es la suma de las integrales definidas siguientes:

$$Área = \int_1^2 -\left(x^2-2x\right)dx + \int_2^3 x^2-2xdx = \left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3 =$$

$$= \left[-\frac{2^3}{3}+2^2\right] - \left[-\frac{1^3}{3}+1^2\right] + \left[\frac{3^3}{3}-3^2\right] - \left[\frac{2^3}{3}-2^2\right] =$$

$$= -\frac{8}{3}+4+\frac{1}{3}-1+9-9-\frac{8}{3}+4 = -\frac{15}{3}+7 = \boxed{2\,u^2}$$



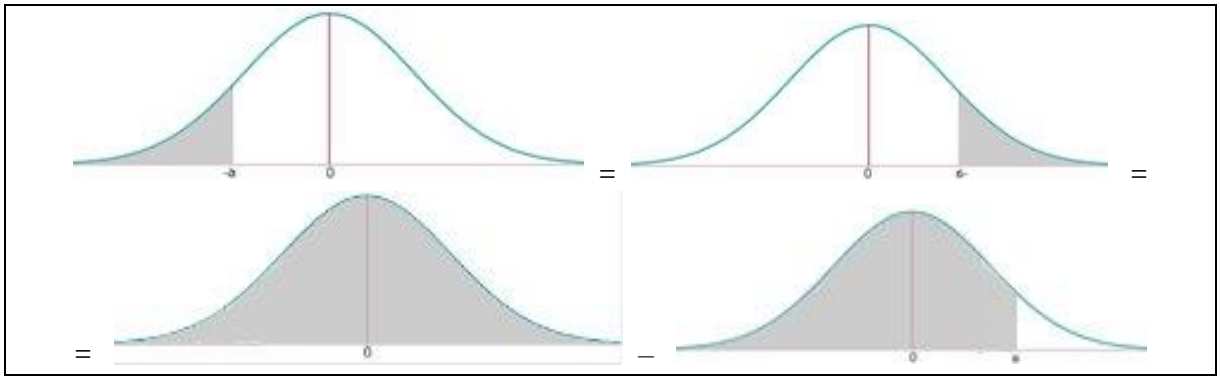
Si contamos cuadraditos en el dibujo (cada cuadradito es 1 unidad cuadrada) vemos que es coherente con el resultado obtenido (aproximadamente 2 cuadraditos)

E9- (Probabilidad y estadística)
El consumo de azúcar en un determinado país, calculado en Kg (kilogramos) por persona y año, varía según una distribución normal de media 15 y desviación típica 5.
a) ¿Qué porcentaje de personas de ese país consumen menos de 10 Kg de azúcar al año? **(1 punto)**
b) ¿Cuál es el porcentaje de personas del país cuyo consumo anual de azúcar es superior a 25 Kg? **(1 punto)**

X = Consumo de azúcar (kg/año) en un país. X = N(15, 5).

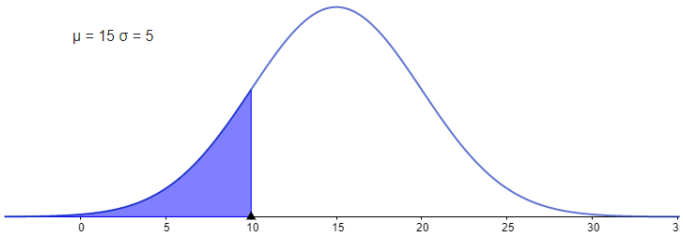
a)

$$P(X \le 10) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \le \frac{10-15}{5}\right) = P(Z \le -1) = \ldots$$



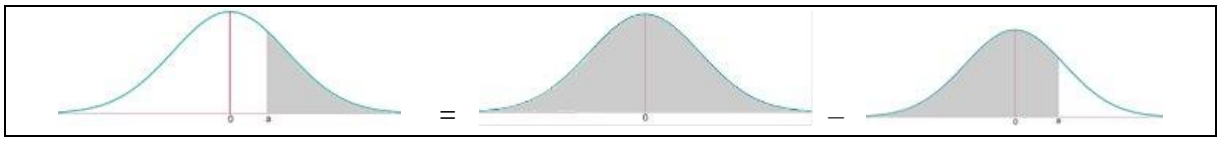
$$\ldots = P(Z \ge 1) = 1 - P(Z \le 1) = \{\text{Buscamos en la tabla N(0,1)}\} = 1 - 0{,}8413 = \boxed{0{,}1587}$$

Un porcentaje del 15,87% de personas consumen menos de 10 kg de azúcar al año.



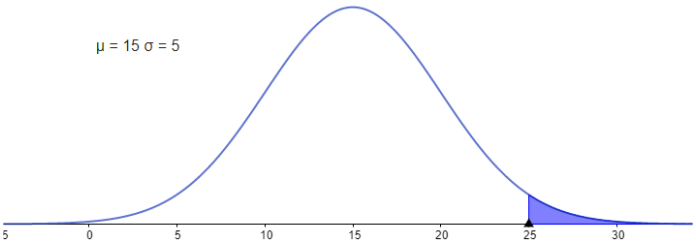
b)

$$P(X \ge 25) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \ge \frac{25-15}{5}\right) = P(Z \ge 2) = \ldots$$



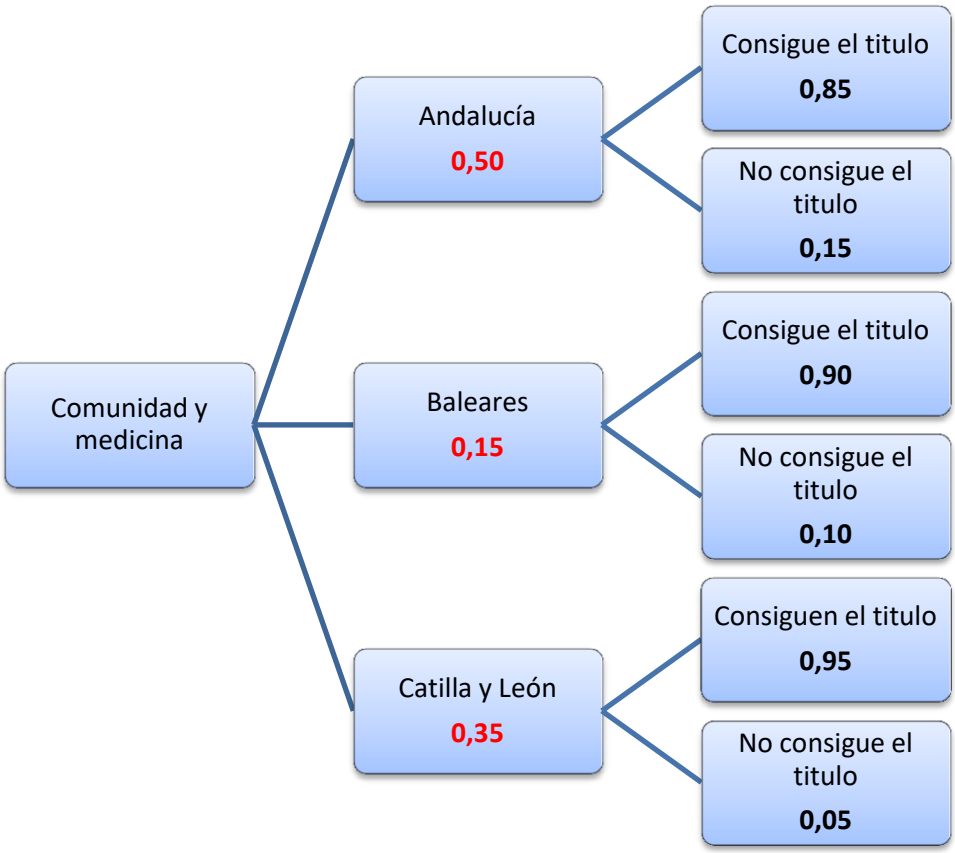
$$\ldots = 1 - P(Z \le 2) = \{\text{Buscamos en la tabla N(0, 1)}\} = 1 - 0{,}9772 = \boxed{0{,}0228}$$

Un porcentaje de 2,28% de personas consumen más de 25 kg de azúcar al año.



E10.- (Probabilidad y estadística)
Los estudiantes, que comienzan los estudios de Medicina, en el conjunto formado por las comunidades autónomas de Andalucía, Baleares y Castilla y León, se distribuyen de la siguiente forma: un 50% de Andalucía, un 15% de Baleares y un 35% provienen de Castilla y León. Los porcentajes de dichos estudiantes que no consiguen el título de Médico son los siguientes: 15% de Andalucía, 10% de Baleares y 5% de Castilla y León
a) Calcular la probabilidad de que uno de dichos estudiantes, elegido al azar, no consiga el título de Licenciado en Medicina. **(1 punto)**
b) Si un alumno no consigue el título de Licenciado en Medicina, ¿es más probable que provenga de Andalucía o de Castilla y León? **(1 punto)**

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total y sumamos las probabilidades de las tres ramas donde "no se consigue el título de médico".

$$P(\text{No consigue el titulo}) = P(\text{Es de Andalucía})P(\text{No consigue el titulo/Es de Andalucía}) +$$
$$+P(\text{Es de Baleares})P(\text{No consigue el titulo/Es de Baleares}) +$$
$$+P(\text{Es de Castilla y León})P(\text{No consigue el titulo/Es de Castilla y León}) =$$
$$= 0,5 \cdot 0,15 + 0,15 \cdot 0,10 + 0,35 \cdot 0,05 = 0,0750 + 0,0150 + 0,0175 = \boxed{0,1075}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes para calcular las probabilidades de que sea de Andalucía o de Castilla y León.

$$P(\text{Sea de Andalucía / No ha conseguido el titulo}) =$$
$$= \frac{P(\text{Sea de Andalucía} \cap \text{No ha conseguido el titulo})}{P(\text{No ha conseguido el titulo})} = \frac{0,50 \cdot 0,15}{0,1075} = \frac{30}{43} = 0,6976$$

$$P\left(\text{Sea de Castilla y León / No ha conseguido el titulo}\right)=$$
$$=\frac{P\left(\text{Sea de Castilla y León } \cap \text{ No ha conseguido el titulo}\right)}{P\left(\text{No ha conseguido el titulo}\right)}=$$
$$=\frac{0,35\cdot 0,05}{0,1075}=\frac{7}{43}=0,1627$$

Comparando las probabilidades de que sea de Andalucía (30/43) y la de que sea de Castilla y León (7/43) concluimos que es más probable que sea de la comunidad autónoma andaluza.