

1. Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 en Alemania y 30 en Suiza. En comidas cada uno ha gastado 20 euros diarios en Francia, 15 en Alemania y 25 en Suiza. Además, el transportista ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total por persona ha sido 765 euros, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que han estado en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada país.

s = días en Suiza
 f = días en Francia
 a = días en Alemania

$$\begin{cases} f + a + s = 15 \\ 48f + 48a + 63s = 765 \\ f - 2s = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 15 \\ 0 & 0 & 15 & | & 45 \\ 0 & -1 & -3 & | & -15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f = 2s \\ f + a + s = 15 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 15 \\ 48 & 48 & 63 & | & 765 \\ 1 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -48 \cdot 1f + 7f \\ -1 \cdot 1f + 3f \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15s = 45 \Rightarrow s = \frac{45}{15} = 3 \\ -a - 9 = -15 \Rightarrow -a = -6 \Rightarrow a = 6 \end{cases}$$

$$f = 15 - 9 = 6$$

Solución 3 días en Suiza, 6 días en Francia y 6 en Alemania

2. A un florista le han encargado preparar 5 ramos iguales para cinco eventos. El precio total acordado es 610 euros. Ha decidido emplear rosas, tulipanes y lilas. Cada ramo llevará 24 flores y el número de rosas empleado doblará al de flores de las otras especies. ¿Cuál es el número de rosas, tulipanes y lilas que utilizará sabiendo que los precios por unidad son 6, 4 y 3 euros respectivamente?

R = Rosas
 T = tulipanes
 L = Lilas

$$\frac{610 \text{ €}}{5} = 122 \text{ €}$$

$$\begin{cases} R + T + L = 24 \\ R = 2(T + L) \\ 6R + 4T + 3L = 122 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R + T + L = 24 \\ R - 2T - 2L = 0 \\ 6R + 4T + 3L = 122 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R + T + L = 24 \\ 3T + 3L = 24 \\ -2T - 3L = -22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R + T + L = 24 \\ 3T + 3L = 24 \\ -3L = -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = 24 - 2 - 6 = 16 \\ \rightarrow 3T = 24 - 18 \Rightarrow 3T = 6 \Rightarrow T = 2 \\ \rightarrow L = 6 \end{cases}$$

Solución 16 Rosas, 2 tulipanes y 6 Lilas

3. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} (a+2)x + (a+1)y = -6 \\ x + 5y = a \\ x + y = -5 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} a+2 & a+1 & | & -6 \\ 1 & 5 & | & a \\ 1 & 1 & | & -5 \end{pmatrix}$$

$$|\Delta^*| = 0$$

$$\begin{aligned} -25(a+2) + a(a+1) - 6 + 30 + 5(a+1) - a(a+1) &= 0 \\ -25a - 50 + a^2 + a - 6 + 30 + 5a + 5 - a^2 - 2a &= 0 \end{aligned}$$

$$-21a = 21$$

$$a = -1$$

Si $a = -1$ $\text{Ran}(\Delta^*) = 2$

Si $a \neq -1$ $\text{Ran}(\Delta^*) = 3$

$\text{Ran}(\Delta) = 2$

$\text{Ran}(\Delta) = 2$

S. Compatible Determinado

S. INCOMPATIBLE

Resolvemos para $a = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 4 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} x = -6 \\ -5y = -5 \rightarrow y = 1 \end{array}$$

Solución $x = -6$ $y = 1$

4. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcl} 2x + ky + & kz = 1 - k \\ x + y + (k-1)z = -2k \\ (k-1)x + y + & z = k-1 \end{array}$$

a) Discute según los valores de k .

b) Resuelve si $k = 1$.

c) Resuelve si $k = -1$.

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & k & k \\ 1 & 1 & k-1 \\ k-1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad |\Delta| = 0$$

$$2 + k(k-1)^2 + k - 1(k-1) - 2(k-1) - k = 0$$

$$2 + k(k^2 + 1 - 2k) + k - k^2 + k - 2k + 2 - k = 0$$

$$2 + k^3 + k - 2k^2 - k^2 + 2 - k = 0$$

$$k^3 - 3k^2 + 4 = 0$$

$$(k+1)(k-2)^2 = 0$$

$$k+1=0 \Rightarrow k = -1$$

$$(k-2)^2 = 0 \quad k-2=0 \quad k = 2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ & & -1 & +4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & & 2 & -4 & \\ \hline & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

Si $k = -1$ $\text{Ran}(\Delta) < 3 \Rightarrow \text{Ran}(\Delta) = 2$

$$\Delta^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\text{Ran}(\Delta^*) = 2$

SISTEMA COMPATIBLE
INDETERMINADO

Si $k = 2$ $\text{Ran}(\Delta) < 3 \Rightarrow \text{Ran}(\Delta) = 1$ (2 filas son comb. lineal)

$$\Delta^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

$\text{Ran}(\Delta^*) = 3$

SISTEMA
INCOMPATIBLE

Si $k \neq 2$ y $k \neq -1$ $\text{Ran}(\Delta) = \text{Ran}(\Delta^*) = 3$

SISTEMA COMPATIBLE
DETERMINADO

Resolvemos para $k = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} z = h \\ -3y + 3h = -2 \\ +3y = -2 + 3h \end{array}$$

$$x + \frac{2}{3} + h - 2h = 2$$

$$x = 2 - \frac{2}{3} + h$$

$$x = h + \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{-2+3h}{3}$$

$$y = \frac{2}{3} + h$$

Solución $(h + \frac{4}{3}, h + \frac{2}{3}, h)$

Resolvamos para $k=1$

$$\begin{pmatrix} 2x + y + z = 0 \\ x + y = -2 \\ y + z = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} 2z = 4 \quad z = 2 \\ -y + z = 4 \quad y = -2 \end{array}$$

$$x - z = -2 \quad x = 0$$

Solución $(0, -2, 2)$

3. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 3x + y = -a \\ -3x + 2ay = 7 \end{array}$$

a) Discute según los valores de a

b) Resuelve cuando sea posible.

$$\Delta = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -a \\ -3 & 2a & 7 \end{array} \right)$$

$$|\Delta| = 0$$

$$7 + 6a + 6a + 3 - 42 + 2a^2 = 0 \Rightarrow 2a^2 + 12a - 32 = 0 \quad a^2 + 6a - 16 = 0$$

$$a = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} = \begin{array}{l} 2 \\ -8 \end{array}$$

$$\text{Si } a = 2 \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} \right| \neq 0$$

$$\text{Ran}(\Delta^v) = 2$$

Sistema Compatible
DETERMINADO

$$\Delta = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 7 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 10 & 10 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\text{Ran}(\Delta) = 2$$

Resolvamos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 7 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 10 & 10 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 - 2 = -1 \\ -5y = -5 \quad y = 1 \end{array}$$

Solución $(-1, 1)$

$$\text{Si } a = -8 \Rightarrow \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} \right| \neq 0$$

$$\text{Ran}(\Delta^v) = 2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \\ -3 & -16 & 7 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -10 & 10 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\text{Ran}(\Delta) = 2$$

S. Compatible DETERMINADO

Resolvamos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$-5y = 5 \quad y = -1 \quad x - 2 = 1 \quad x = 3$$

Solución $(3, -1)$

6 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcl} x + & y + & mz = m + 2 \\ 2x + (m+1)y + & (m+1)z = -2k \\ (m+2)x + & 3y + (2m+1)z = 3m+4 \end{array}$$

a) Discute según los valores de k.

b) Resuelve cuando tenga infinitas soluciones

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & m+1 & m+1 \\ m+2 & 3 & 2m+1 \end{pmatrix} \quad |\Delta| = 0$$

$$(m+1)(2m+1) + 6m + (m+1)(m+2) - m(m+1)(m+2) - 3(m+1) - 2(2m+1) = 0$$

$$\cancel{2m^2} + \cancel{m} + \cancel{2m} - \cancel{1} + \cancel{6m} + \cancel{m^2} + \cancel{2m} + \cancel{m} + \cancel{2} - \cancel{m^3} - \cancel{2m^2} - \cancel{m} - \cancel{2m} - \cancel{3} - \cancel{4m} - \cancel{2} = 0$$

$$-m^3 + 3m - 2 = 0$$

$$(m+2)(m-1)(-m+1) = 0 \quad \begin{cases} m = -2 \\ m = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & & 2 & -4 & +2 \\ \hline -1 & 2 & -1 & 0 \\ \hline 1 & & -1 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \end{array}$$

Si $m = -2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \boxed{\text{Ran}(\Delta) = 2}$

SISTEMA INCOMPATIBLE

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$\boxed{\text{Ran}(\Delta^v) = 3}$$

Si $m = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \boxed{\text{Ran}(\Delta) = 1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \quad \boxed{\text{Ran}(\Delta^v) = 2}$$

SISTEMA
INCOMPATIBLE