

EXAMEN 1º BACHILLERATO CIENCIAS – Sucesiones y logaritmos

(RESUELTO)

Ejercicio 1. (1 pto.)

Escribe el término general para las siguientes sucesiones:

a) 5; 8; 11; 14; 17; ...

b) $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{1}{16}; \frac{1}{25}; \dots$

c) 1; 5; 9; 13; 17; ...

d) $\frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{4}{7}; \frac{5}{9}; \frac{6}{11}; \dots$

a) 5; 8; 11; 14; 17; ... $\Rightarrow a_n = 3n + 2$ (progresión aritmética)

b) $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{1}{16}; \frac{1}{25}; \dots \Rightarrow b_n = \frac{1}{n^2}$

c) 1; 5; 9; 13; 17; ... $\Rightarrow c_1 = 1; c_n = (c_{n-1} + 4)$ o $c_n = 4n - 3$

d) $\frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{4}{7}; \frac{5}{9}; \frac{6}{11}; \dots \Rightarrow d_n = \frac{n + 1}{2n + 1}$

(cociente de dos progresiones aritméticas)

Recuerda que una sucesión de números reales es una aplicación entre números naturales y números reales: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}; n \rightarrow a_n$, donde el término de la sucesión es cada uno de los elementos que la componen. El término general de una sucesión a_n es la expresión que representa al término que ocupa el lugar enésimo y sirve para denotar cualquier término de la misma.

Ejercicio 2. (1 pto.)

Para las sucesiones siguientes explica su monotonía y acotación.

a) 3; 6; 9; 12; ...

b) $\frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{12}; \frac{1}{16}; \dots$

c) $\frac{1}{3}; \frac{1}{3} + \frac{1}{6}; \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}; \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12}; \dots$

d) -1; 1; -1; 1; -1; ...

a) 3; 6; 9; 12; ... \Rightarrow Monótona creciente, no está acotada (tiende a ∞)

b) $\frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{12}; \frac{1}{16}; \dots \Rightarrow$ Monótona decreciente, está acotada

inferiorememente por cero (tiende a cero) y superiormente por $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{3}; \frac{1}{3} + \frac{1}{6}; \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}; \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}; \dots \Rightarrow$ Monótona creciente, está acotada inferiormente por $\frac{1}{3}$ y superiormente por $\frac{2}{3}$

d) $-1; 1; -1; 1; -1; \dots \Rightarrow$ NO es monótona, está acotada entre -1 y 1

Recuerda que una sucesión está acotada si existe un número $k \in \mathbb{R}$; tal que $|a_n| < k$ para todo n .

Una sucesión a_n es monótona creciente en el sentido estricto si para todo n se verifica que $a_n < a_{n+1}$

Una sucesión a_n es monótona decreciente en el sentido estricto si para todo n se verifica que $a_n > a_{n+1}$

Ejercicio 3. (2 ptos.)

Di de las siguientes sucesiones cual es una progresión aritmética y cual geométrica, calcula sus primeros 5 términos. Para a) y b) halla la suma de sus primeros 15 términos S_{15} .

a) $a_n = -2n + 4$

b) $b_n = 3^{n-1}$

c) $c_n = 9n - 1$

d) $d_n = \frac{2^{n-1}}{3}$

a) $a_n = -2n + 4 \Rightarrow$ **progresión aritmética**

$$a_1 = -2 \cdot 1 + 4 = \boxed{2}; \quad a_2 = -2 \cdot 2 + 4 = 0; \quad a_3 = -2 \cdot 3 + 4 = -2;$$

$$a_4 = -2 \cdot 4 + 4 = -4; \quad a_5 = -2 \cdot 5 + 4 = -6$$

$$\text{Hallando } a_{15} = -2 \cdot 15 + 4 = -30 + 4 = \boxed{-26}$$

$$\text{Hallando: } S_{15} = \frac{n(a_1 + a_{15})}{2} \Rightarrow S_{15} = \frac{15 \cdot (2 + (-26))}{2} = -180$$

Una progresión aritmética es una sucesión de números reales en la que la diferencia entre cada término es constante, este número se llama d diferencia de la progresión, que puede ser positivo o negativo:

$$(a_{n+1} = a_n + d)$$

El término general a_n de una progresión aritmética cuyo primer término es a_1 y cuya diferencia es d es: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

La suma S_n de los n primeros términos de una progresión aritmética es:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

b) $b_n = 3^{n-1} \Rightarrow$ **progresión geométrica**

$$b_1 = 3^{1-1} = 3^0 = \boxed{1}; \quad b_2 = 3^{2-1} = 3^1 = 3; \quad b_3 = 3^{3-1} = 3^2 = 9;$$

$$b_4 = 3^{4-1} = 3^3 = 27; \quad b_5 = 3^{5-1} = 3^4 = 81$$

$$\text{Hallando } r = \frac{b_2}{b_1} = \frac{3}{1} = \boxed{3}$$

$$\text{Hallando: } S_{15} = \frac{b_1 \cdot (r^{15} - 1)}{r - 1} \Rightarrow S_{15} = \frac{1 \cdot (3^{15} - 1)}{3 - 1} = 7\,174\,453$$

Una progresión geométrica es una sucesión de números reales en la que el cociente entre un término y el anterior es constante llamado r razón de la progresión. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ (para $a_n \neq 0$)

El término general de una progresión geométrica cuyo primer término es a_1 y cuya razón es r es: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

La suma S_n de los n primeros términos de una progresión geométrica es:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

c) $c_n = 9n - 1 \Rightarrow$ **progresión aritmética**

$$c_1 = 9 \cdot 1 - 1 = \mathbf{8}; \quad c_2 = 9 \cdot 2 - 1 = \mathbf{17}; \quad c_3 = 9 \cdot 3 - 1 = \mathbf{26};$$

$$c_4 = 9 \cdot 4 - 1 = \mathbf{35}; \quad c_5 = 9 \cdot 5 - 1 = \mathbf{44}$$

d) $d_n = \frac{2^{n-1}}{3} \Rightarrow$ **progresión geométrica**

$$d_1 = \frac{2^{1-1}}{3} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}; \quad d_2 = \frac{2^{2-1}}{3} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}; \quad d_3 = \frac{2^{3-1}}{3} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}};$$

$$d_4 = \frac{2^{4-1}}{3} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}; \quad d_5 = \frac{2^{5-1}}{3} = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}$$

Ejercicio 4. (2 ptos.)

Ana acude a un banco para informarse como invertir una herencia recibida de su abuela de unos 10 000€. El asesor financiero del banco le plantea a Ana dos posibles opciones:

Opción 1. Mantener el capital por 7 años al 4% de interés anual.

Opción 2. Mantener el capital los primeros 4 años al 5% anual y los 3 años restantes al 3,5% anual.

¿Cuál es la mejor opción para Ana si quiere tener el mayor capital al final de los 7 años?

El interés compuesto puede calcularse como una progresión geométrica.

Recuerda que si depositamos en una entidad financiera una cantidad de dinero C_0 durante un tiempo t , y un rédito r (dado en tanto por uno), se obtiene un beneficio denominado interés $I = C_0 \cdot t \cdot r$

El capital final obtenido después de t años, dado un capital inicial C_0 y un rédito r (dado en tanto por uno) es: $C = C_0 \cdot (1 + r)^t$

Opción 1:

$r = 0,04 \Rightarrow 4\%$ anual por 7 años

$$C = C_0 \cdot (1 + r)^t \Rightarrow C = 10\,000\text{€} \cdot (1 + 0,04)^7 \approx 13\,159,32\text{€} \Rightarrow 7 \text{ años}$$

Opción 2:

$r_1 = 0,05 \Rightarrow 5\%$ anual por 4 años

$$C_1 = C_0 \cdot (1 + r_1)^t \Rightarrow C_1 = 10\,000\text{€} \cdot (1 + 0,05)^4 \approx 12\,155,06\text{€}$$

$r_2 = 0,035 \Rightarrow 3,5\%$ anual por 3 años restantes

$$C_2 = C_1 \cdot (1 + r_2)^t \Rightarrow C_2 = 12\,155,06\text{€} \cdot (1 + 0,035)^3 \approx 13\,476,53\text{€}$$

La mejor opción a implementar es la 2 ya que el capital final obtenido es mayor de 13 476,53€

Ejercicio 5. (2 ptos.)

Calcula los límites de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \frac{3n + 2}{5(n + 1)}$

b) $a_n = \frac{8}{2^n}$

c) $a_n = \frac{n^3 + 2n}{2n + 1}$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 2}{5(n + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 2}{5n + 5} = \frac{3}{5}$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{\infty} = 0$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n}{2n + 1}$$

⇒ **no es convergente tiende a ∞** (mayor grado en numerador)

Recuerda que las sucesiones no son funciones continuas y puedes ser:

1) *no convergentes y tender a infinito*

2) *pueden tender a 0*

3) *pueden converger a un número.*

Ejercicio 6. (2 ptos.)

Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $3^{2x+5} = 27$

b) $\sqrt[6]{4^x} = \sqrt[3]{4}$

c) $\ln(3x - 7) = \ln(2)$

$$a) 3^{2x+5} = 27 \Rightarrow 3^{2x+5} = 3^3 \Rightarrow 2x + 5 = 3 \Rightarrow 2x = 3 - 5 \Rightarrow 2x = -2 \\ \Rightarrow x = \frac{-2}{2} = -1$$

$$b) \sqrt[6]{4^x} = \sqrt[3]{4} \Rightarrow 4^{\frac{x}{6}} = 4^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$$

Para resolver ecuaciones exponenciales hay que conseguir que las bases sean iguales y luego igualar los exponentes.

$$c) \ln(3x - 7) = \ln(2) \Rightarrow 3x - 7 = 2 \Rightarrow 3x = 2 + 7 \Rightarrow 3x = 9 \\ \Rightarrow x = \frac{9}{3} = 3$$

Para resolver ecuaciones logarítmicas hay que despejar el logaritmo en ambos miembros y luego igualamos.