## CAMPO GRAVITATORIO FCA 10 ANDALUCÍA

**1.** a) Explique qué se entiende por velocidad de escape y deduzca razonadamente su expresión.
b) Razone qué energía habría que comunicar a un objeto de masa m, situado a una altura h sobre la superficie de la Tierra, para que se alejara indefinidamente de ella.

**2.** Dos masas puntuales $m_1 = 5$ kg y $m_2 = 10$ kg se encuentran situadas en los puntos (-3, 0) m y (3, 0) m, respectivamente.
a) Determine el punto en el que el campo gravitatorio es cero.
b) Compruebe que el trabajo necesario para trasladar una masa m desde el punto A (0, 4) m al punto B (0, -4) m es nulo y explique ese resultado.

**3.** a) Indique las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales.
b) Explique en qué punto, entre dos masas puntuales, puede encontrarse en equilibrio una tercera masa puntual y cuál sería su energía potencial.

**4.** Un satélite de 200 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra con un periodo de dos horas.
a) Calcule razonadamente el radio de su órbita.
b) ¿Qué trabajo tendríamos que realizar para llevar el satélite hasta una órbita de radio doble.
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m$^2$ kg$^{-2}$ ; $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg

**5.** La masa de la Tierra es 81 veces la de la Luna y la distancia entre sus centros es $3{,}84 \cdot 10^5$ km.
a) Calcule en qué punto, entre la Tierra y la Luna se encontraría en equilibrio un meteorito de 200 kg.
b) ¿Cuál sería la energía potencial del meteorito en ese punto?
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m$^2$ kg$^{-2}$, $M_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg

**6.** a) Enuncie las leyes de Kepler.
b) Demuestre la tercera ley de Kepler a partir de la ley de gravitación universal de Newton para un órbita circular.

**7.** a) Explique qué se entiende por velocidad orbital y deduzca su expresión para un satélite que describe una órbita circular alrededor de la Tierra.
b) Razone cómo variaría la energía mecánica del satélite si se duplicara su masa.

**CAMPO GRAVITATORIO      FCA 10      ANDALUCÍA**

**8.** Dos masas puntuales m = 10 kg y m' = 5 kg están situadas en los puntos (0,3) m y (4,0) m, respectivamente.
a) Dibuje el campo gravitatorio producido por cada una de las masas en el punto A (0,0) m y en el punto B (4,3) m y calcule el campo gravitatorio total en ambos puntos.
b) Determine el trabajo necesario para desplazar una partícula de 0,5 kg desde el punto B hasta el A. Discuta el signo de este trabajo y razone si su valor depende de la trayectoria seguida.
$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m$^2$ kg$^{-2}$

**9.** Un satélite de $3 \cdot 10^3$ kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de $5 \cdot 10^4$ km de radio.
a) Determine razonadamente su velocidad orbital.
b) Suponiendo que la velocidad del satélite se anulara repentinamente y empezara a caer sobre la Tierra, ¿con qué velocidad llegaría a la superficie terrestre? Considere despreciable el rozamiento del aire.
$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m$^2$ kg$^{-2}$ ; $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T$ = 6370 km

**CAMPO GRAVITATORIO FCA 10 ANDALUCÍA**

**1.- a)** Es la velocidad mínima que hay que comunicarle a un cuerpo situado en la superficie de cualquier astro para que abandone de manera definitiva el campo gravitatorio de este.
Suponiendo que dicho astro fuese la Tierra el cuerpo que se halla en la superficie del planeta con la correspondiente energía potencial

$$E_P = -G\frac{m_T m}{r_T}$$

es dotado de la energía cinética necesaria para que llegue a una distancia infinita ($E_P = 0$) donde su velocidad y por consiguiente su energía cinética, se haga cero. El principio de conservación de la energía mecánica exige que

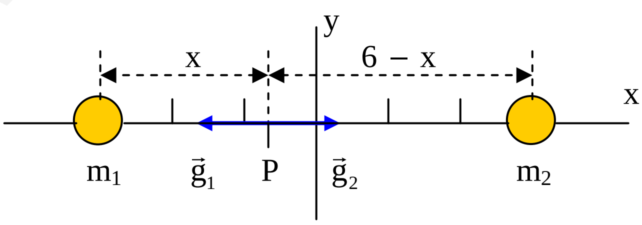
$$\frac{1}{2}mv_{escp}^2 + \left(-G\frac{m_T m}{r_T}\right) = 0 \quad \text{despejando} \quad v_{escp} = \sqrt{\frac{2Gm_T}{r_T}}$$

**b)** Antes de resolver este apartado, hemos de suponer dos cosas, primero, que el cuerpo inicialmente está parado con respecto a la Tierra ($E_c = 0$) a una altura h de su superficie ya que el enunciado del problema no dice que esté en orbita, segundo, que el sentido de la frase “alejarlo indefinidamente” significa, sacarlo de la influencia de su campo gravitatorio, es decir, ponerlo en el infinito ($E_p = 0$) a velocidad cero ($E_c = 0$). Si llamamos E a la energía que hay que comunicarle, el principio de conservación de la energía nos dice

$$E_p(h) + E = 0 \qquad -G\frac{m_T m}{r_T + h} + E = 0$$

$$E = G\frac{m_T m}{r_T + h}$$

**2.- a)** $m_1 = 5$ kg en el punto (-3,0) y $m_2 = 10$ kg en el punto (3,0)




Como vemos en la figura el campo gravitatorio se anula en el punto P (más cercano a $m_1$ ya que esta es más pequeña), donde ambos campos se anulan al ser iguales en módulo y de sentido contrario. Si llamamos x a la distancia entre $m_1$ y P, la distancia entre $m_2$ y P será, $6 - x$. Planteamos la ecuación de la igualdad entre módulos

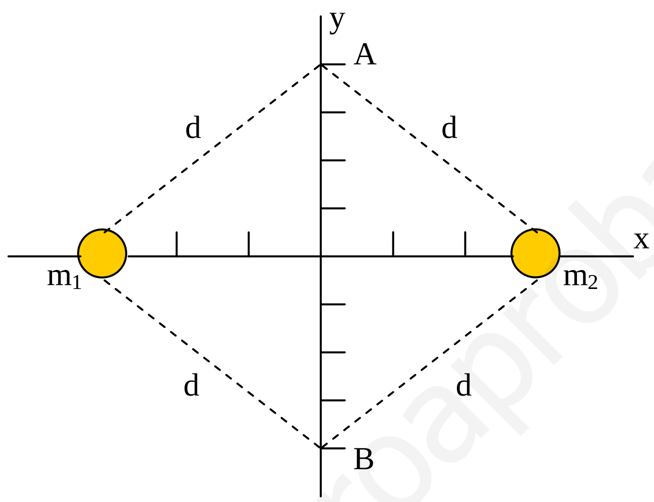
$$g_1 = g_2 \qquad G\frac{m_1}{x^2} = G\frac{m_2}{(6-x)^2}$$

**2.- a)** (continuación)

$$\frac{5}{x^2} = \frac{10}{36 - 12x + x^2} \qquad 5x^2 + 60x - 180 = 0$$

resolviendo y escogiendo la solución adecuada nos sale x = 2,48 m, por lo tanto el punto P será ( − 0,52, 0)

**b)**




Como vemos en la figura, las cuatro distancias marcadas entre los puntos A y B y ambas masas son iguales, aplicando Pitágoras obtenemos

$$d = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,m$$

calculamos el potencial en A sumando los potenciales que crean en dicho punto las masas $m_1$ y $m_2$

$$V_A = V_{1A} + V_{2A} = -G\frac{m_1}{d} - G\frac{m_2}{d} = -\frac{G}{d}(m_1 + m_2)$$

calculamos el potencial en A sumando los potenciales que crean en dicho punto las masas $m_1$ y $m_2$

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} = -G\frac{m_1}{d} - G\frac{m_2}{d} = -\frac{G}{d}(m_1 + m_2)$$

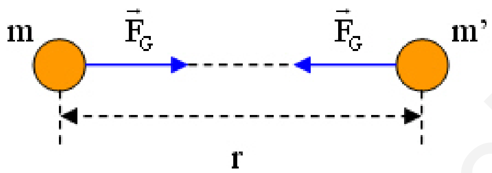
como vemos ambos potenciales son iguales y por lo tanto el trabajo para trasladar una masa m desde A hasta B es nulo porque es nula la diferencia de potencial.

**CAMPO GRAVITATORIO      FCA 10      ANDALUCÍA**

**3.- a)** La interacción gravitatoria entre dos cuerpos es atractiva y puede expresarse mediante una fuerza central directamente proporcional al producto de las masas de los cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. La constante de proporcionalidad es la llamada **constante de gravitación universal G,** vectorialmente, expresamos esta fuerza de la siguiente manera:

$$\vec{F}_G = -G\frac{m \cdot m'}{r^2}\vec{u}_r$$

es la ley de gravitación universal desarrollada por Newton.




La fuerza que actúa sobre m es igual que la actúa sobre m', pero dirigida en sentido contrario.

**b)** El punto entre dos masas puntuales en que puede encontrarse en equilibrio una tercera masa puntual es aquel en que las fuerzas gravitatorias que ejercen cada una de las masas sobre la tercera, que se encuentra entre ellas, son iguales y de sentido contrario con lo que se anulan entre ellas y la resultante es cero. La energía potencial de la tercera masa en ese punto sería mínima con respecto a la que tendría en cualquier otra posición del eje X ya que se encuentra en equilibrio.

**4.- a)** Para calcular el radio de la órbita aplicamos la tercera ley de Kepler teniendo en cuenta que la constante que aparece en esta ley sólo depende de la masa del cuerpo sobre el que se orbita, en este caso, la Tierra y que el periodo es de dos horas (7200 s)

$$T^2 = k \cdot r^3 \qquad k = \frac{4\pi^2}{GM_T} \qquad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T}r^3$$

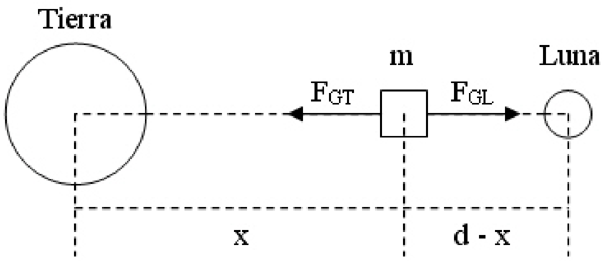
$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_T}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{7200^2\ s^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{24}\ kg}{4\pi^2}} = 8,07 \cdot 10^6\ m$$

**b)** El trabajo lo calculamos como la diferencia de energía mecánica del satélite entre las dos órbitas de radio 2r y r ($r = 8,07 \cdot 10^6$ m)

$$W = \Delta E_m = E_m(2r) - E_m(r) = -G\frac{m_T m}{2(2r)} - \left(-G\frac{m_T m}{2r}\right)$$

$$W = G\frac{m_T m}{2r} - G\frac{m_T m}{4r} = G\frac{m_T m}{4r} = 2,48 \cdot 19^9\ J$$

**5.- a)**




Para que el meteorito se encuentre en equilibrio, la fuerza resultante ha de ser nula y los módulos de la fuerza gravitatoria de la Tierra y de la Luna han de ser iguales

$$F_{GT} = F_{GL} \qquad G \cdot \frac{m_T \cdot m}{x^2} = G \cdot \frac{m_L \cdot m}{(d-x)^2} \qquad m_T \cdot (d-x)^2 = m_L \cdot x^2$$

desarrollando obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado
($m_T$ = 81$m_L$ = 5.95·$10^{24}$ kg)

$$(m_T - m_L) \cdot x^2 - 2 \cdot m_T \cdot d \cdot x + m_T \cdot d^2 = 0$$

$$5{,}91 \cdot 10^{24} \cdot x^2 - 4{,}59 \cdot 10^{33} \cdot x + 8{,}82 \cdot 10^{41} = 0$$

$$x = \frac{4{,}59 \cdot 10^{33} \pm \sqrt{\left(4{,}59 \cdot 10^{33}\right)^2 - 4 \cdot 5{,}91 \cdot 10^{24} \cdot 8{,}82 \cdot 10^{41}}}{2 \cdot 5{,}91 \cdot 10^{24}}$$

siendo los dos resultados $x_1 = 4{,}28 \cdot 10^8\ m$ y $x_2 = 3{,}49 \cdot 10^8\ m$ como x ha de ser menor que d, en este caso el resultado que se nos pide es $x = 3{,}49 \cdot 10^8\ m$ medidos desde la Tierra.

**b)** La energía potencial del meteorito en ese punto es la suma de la energía potencial del meteorito con respecto a la Tierra y la que tiene con respecto a la Luna

$$E_p = -G\frac{m_T m}{x} - G\frac{m_L m}{d-x} = -2{,}55 \cdot 10^8\ J$$

**6.- a)** Ver teoría

**b)** Consideremos un planeta de masa m que orbita en torno al Sol (de masa $m_S$) a una distancia r, si tenemos en cuenta que la fuerza gravitacional es centrípeta

$$G\frac{m_S m}{r^2} = m\omega^2 r$$

**6.- b)** (continuación) como $\omega = 2\pi / T$, entonces

$$G\frac{m_S m}{r^2} = m\frac{4\pi^2}{T^2}r$$

reorganizando la anterior igualdad se obtiene

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_S}r^3$$

llamando k a los valores constantes obtenemos la tercera ley de kepler

$$k = \frac{4\pi^2}{Gm_S} \qquad T^2 = kr^3$$

**7.- a)** La velocidad orbital de un satélite, es aquella que debe tener para que su órbita sea estable y ha de cumplirse que la fuerza gravitatoria que le ejerce la Tierra sea la fuerza centrípeta

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{m_T m}{r^2} \qquad \text{despejando} \qquad v_{orbital} = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}}$$

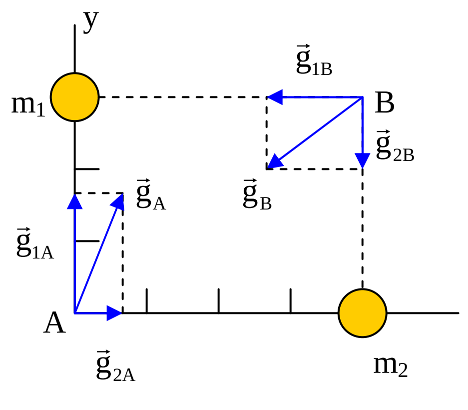
siendo r el radio de la órbita medida desde el centro de la Tierra ($r = r_T + h$)

**b)** La energía mecánica del satélite en orbita viene dada por la siguiente expresión

$$E_m = -G\frac{m_T m}{2r}$$

si se duplicara la masa del satélite, se duplicaría la energía mecánica.

**8.- a)** $m_1 = 10$ kg   $m_2 = 5$ kg




Calculamos las intensidades de campo creadas por las masas $m_1$ y $m_2$ en el punto A (0,0)

**8.- a)** (continuación)

$$\vec{g}_{1A} = -G\frac{m_1}{{r_{1A}}^2}\cdot\vec{i} = 7,41\cdot 10^{-11}\cdot\vec{j}\ \frac{N}{Kg}$$

$$\vec{g}_{2A} = -G\frac{m_2}{{r_{2A}}^2}\cdot\vec{j} = 2,08\cdot 10^{-11}\cdot\vec{i}\ \frac{N}{Kg}$$

sumando vectorialmente obtenemos

$$\vec{g}_{A} = 2,08\cdot 10^{-11}\cdot\vec{i} + 7,41\cdot 10^{-11}\cdot\vec{j}\ \frac{N}{Kg}$$

Calculamos las intensidades de campo creadas por las masas $m_1$ y $m_2$ en el punto B (4,3)

$$\vec{g}_{1B} = -G\frac{m_1}{{r_{1B}}^2}\cdot\vec{i} = -4,17\cdot 10^{-11}\cdot\vec{i}\ \frac{N}{Kg}$$

$$\vec{g}_{2AB} = -G\frac{m_2}{{r_{2B}}^2}\cdot\vec{j} = -3,7\cdot 10^{-11}\cdot\vec{j}\ \frac{N}{Kg}$$

sumando vectorialmente obtenemos

$$\vec{g}_{B} = -4,17\cdot 10^{-11}\cdot\vec{i} - 3,7\cdot 10^{-11}\cdot\vec{j}\ \frac{N}{Kg}$$

**b)** Calculamos el potencial gravitatorio creado por las masas $m_1$ y $m_2$ en los puntos (0,0) y (4,3)

$$V_{(0,0)} = -G\left(\frac{m_1}{r_{1A}} + \frac{m_2}{r_{2A}}\right) = -6,67\cdot 10^{-11}\left(\frac{10}{3} + \frac{5}{4}\right) = -3,05\cdot 10^{-10}\ \frac{J}{Kg}$$

$$V_{(4,3)} = -G\left(\frac{m_1}{r_{1B}} + \frac{m_2}{r_{2B}}\right) = -6,67\cdot 10^{-11}\left(\frac{10}{4} + \frac{5}{3}\right) = -2,78\cdot 10^{-10}\ \frac{J}{Kg}$$

calculamos el trabajo para trasladar una carga de 0,5 Kg desde el punto (4,3) hasta el punto (0,0) mediante la expresión que lo relaciona con la diferencia de potencial

$$W = m\left(V_{(0,0)} - V_{(4,3)}\right) = 0,5\,Kg\cdot\left(-3,05\cdot 10^{-10} + 2,78\cdot 10^{-10}\right) J/Kg = -1,35\cdot 10^{-11}\ J$$

el signo negativo nos indica que la energía potencial aumenta ($W = -\Delta E_p$), es decir, que el trabajo se realiza contra las fuerzas del campo. Puesto que es un campo conservativo, su valor no depende de la trayectoria seguida.

**9.- a)** La velocidad orbital de un satélite, es aquella que debe tener para que su órbita sea estable y ha de cumplirse que la fuerza gravitatoria que le ejerce la Tierra sea la fuerza centrípeta

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{m_T m}{r^2} \qquad \text{despejando} \qquad v_{orbital} = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}}$$

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{6,67\cdot10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}\cdot6\cdot10^{24}\ kg}{5\cdot10^7\ m}} = 2829\,ms^{-1}$$

**b)** Si la velocidad del satélite se anulara repentinamente, en ese instante sólo tendría energía potencial $E_p(r)$, al llegar a la superficie de la Tierra tendría energía cinética $E_c$ y energía potencial $E_p(r_T)$, aplicando el principio de conservación de la energía mecánica

$$E_p(r) = E_c + E_p(r_T) \qquad E_c = E_p(r) - E_p(r_T)$$

$$E_c = -G\frac{m_T m}{r} + G\frac{m_T m}{r_T} = 3,03\cdot10^{11}\ J$$

sustituyendo la energía cinética por su expresión calculamos la velocidad

$$\frac{1}{2}mv^2 = 3,03\cdot10^{11}\ J \qquad v = \sqrt{\frac{2\cdot3,03\cdot10^{11}\ J}{3\cdot10^3\ kg}} = 14212\,ms^{-1}$$