La masa de un planeta se puede calcular si, mediante observaciones astronómicas, conoce el radio de la órbita y el período de rotación de alguno de sus satélites. Razonar físicamente porqué. (suponer órbitas circulares y utilizar las leyes de la mecánica). ***1 punto***

La fuerza de atracción gravitatoria tiene un módulo cuyo valor es: $F = G\dfrac{M\ m}{r^2}$.

Si la trayectoria del satélite es circular la fuerza centrípeta tiene que valer: $F = m\dfrac{v^2}{r}$.

Igualando ambas expresiones se tiene: $G\dfrac{M\ m}{r^2} = m\dfrac{v^2}{r} \Rightarrow G\dfrac{M}{r} = v^2 \Rightarrow M = \dfrac{v^2 r}{G}$

Finalmente la velocidad de rotación se puede calcular en función del periodo: $v = \dfrac{2p\ r}{T}$.

Sustituyéndolo se tiene: $M = \dfrac{r}{G}\left(\dfrac{2p\ r}{T}\right)^2 \Rightarrow M = \dfrac{4p^2 r^3}{GT^2}$

Determinar la variación de la energía potencial de la Luna, correspondiente a su interacción gravitatoria con el Sol y la Tierra, entre las posiciones de eclipse de Sol (figura 1) y eclipse de Luna (figura 2).
Nota: Supónganse circulares tanto la órbita de la tierra alrededor del sol como la de la luna alrededor de la tierra. ***1,5 puntos***

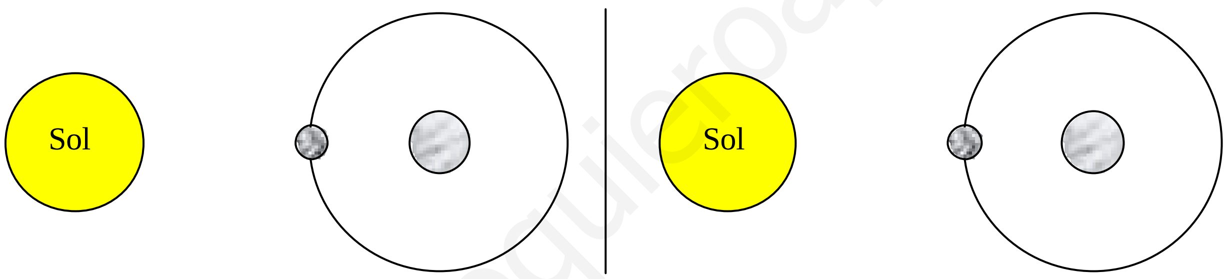


Figura 1 **Figura 2**

Datos:
Radio de la órbita Luna-Tierra: $3{,}8 \cdot 10^8$ m; radio de la órbita Tierra-Sol: $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m; Masa de la Luna: $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg; Masa del Sol: $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2

Dado que la órbita de la Luna es circular la energía potencial Tierra – Luna se mantiene constante. Por tanto la variación de potencial sólo se deberá a la variación de distancia al Sol. Además, dada la gran distancia Tierra – Sol y la comparativamente pequeña Tierra – Luna se puede suponer constante la

$$U = -G\frac{M_{Sol}m_{Luna}}{r_{Sol-Tierra} - r_{Tierra-Luna}} + G\frac{M_{Sol}m_{Luna}}{r_{Sol-Tierra} + r_{Tierra-Luna}} = -GM_{Sol}m_{Luna}\left(\frac{-2r_{Tierra-Luna}}{r^2{}_{Sol-Tierra} - r^2{}_{Tierra-Luna}}\right) =$$

$$= -6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}99\cdot 10^{30}\cdot 7{,}35\cdot 10^{22}\left(\frac{-2\cdot 3{,}8\cdot 10^8}{\left(1{,}5\cdot 10^{11}\right)^2 - \left(3{,}8\cdot 10^8\right)^2}\right) = 3{,}29\cdot 10^{29}\ \mathrm{J}$$

¿Qué se entiende por velocidad de escape de la superficie de un planeta? Deducir su expresión. (1,2 puntos))

1. La velocidad de escape es la que hace que un cuerpo poséa la energía cinética suficiente como para realizar el trabajo necesario para transportar dicho cuerpo desde la superficie del planeta hasta el infinito.

$$W = 0 - \left(-G\frac{Mm}{R} \right) = G\frac{Mm}{R}$$

Igualando este resultado a la expresión de la energía cinética tenemos:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_e = G\frac{M\cancel{m}}{R} \qquad \Rightarrow \qquad v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Un satélite artificial gira alrededor de la Tierra a 3,6 · 10^7 m de su superficie. Calcular (a) la velocidad, (b) la aceleración y (c) el periodo de rotación del satélite alrededor de la Tierra expresado en días. ¿qué nombre reciben los satélites de este tipo? (1,3 puntos)

Datos: $M_{Tierra} = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ Kg; $R_{Tierra} = 6{,}38 \cdot 10^6$ m ; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2

2(a). Para calcular la velocidad de un planeta en una órbita hay que igualar la fuerza centrípeta a la fuerza de atracción gravitatoria.

$$F_C = F_G; \qquad \cancel{m}\frac{v^2}{R} = G\frac{M\cancel{m}}{R^2}; \qquad v = \sqrt{G\frac{M}{R}}$$

$$v = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{5{,}97 \cdot 10^{24}}{4{,}238 \cdot 10^7}} = 3065{,}3\,m/s$$

(b) Un satélite en una órbita no tiene aceleración lineal, la única aceleración que presenta es la normal a la trayectoria por ser esta una curva.

$$a_n = \frac{v^2}{R} = G\frac{M}{R^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{5{,}97 \cdot 10^{24}}{\left(4{,}238 \cdot 10^7\right)^2} = 0{,}22\,m/s^2$$

(c) El periodo de rotación es:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \cdot 4{,}238 \cdot 10^7}{3065{,}3} = 86869{,}6\,s$$

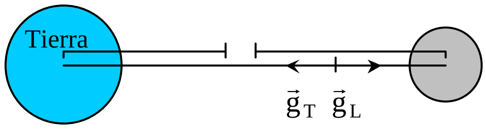
Lo pasamos a días dividiendo por el número de segundos que tiene un día

$$T = \frac{86869{,}6}{86400} = 1{,}005\,\text{días} \approx 1\,\text{día}$$

Estos satélites se denominan geoestacionarios porque al rotar a la misma velocidad que gira la Tierra, están siempre sobre el mismo punto y parece que están parados.

1.- ¿A qué distancia del centro de la Tierra se compensaría el campo gravitatorio terrestre con el lunar? (1 punto) Datos:
$M_{Tierra} = 5,97\cdot10^{24}$ Kg; $M_{Luna} = 7,35\cdot10^{22}$ Kg; Distancia Tierra-Luna = $3,84\cdot10^{8}$ m

1. Tomando referencias en el centro de la Tierr



$$g_T = G\frac{M_T}{r^2}(-1,0)$$

$$g_L = G\frac{M_L}{(r-d)^2}(1,0)$$

$$-G\frac{M_T}{r^2} + G\frac{M_L}{(r-d)^2} = 0$$

$$-(r-d)^2 M_T + r^2 M_L = 0; \qquad (M_T - M_L)r^2 - 2dM_T r + d^2 M_T = 0$$

Sustituyendo:

$$5,897\cdot10^{24} r^2 - 4,585\cdot10^{33} r + 8,803\cdot10^{41} = 0$$

$$r = \frac{4,585\cdot10^{33} \pm \sqrt{2,102\cdot10^{67} - 2,076\cdot10^{67}}}{1,179\cdot10^{25}} = \frac{4,585\cdot10^{33} \pm 5,099\cdot10^{32}}{1,179\cdot10^{25}}; \quad \begin{array}{l} r = 4,38\cdot10^{8} \\ r = 3,456\cdot10^{8} \end{array}$$

La solución $4,38\cdot10^8$ no vale ya que su valor es mayor que la distancia entre la Tierra y la Luna. El punto en el que se anulan los campos gravitatorios se encuentra a $3,456\cdot10^8$ m del centro de la Tierra.

2.- Comenta si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: *"Si la Luna gira alrededor de la Tierra según un movimiento circular uniforme, no tiene aceleración"*. (0,3 puntos)

2. Es falsa ya que en todos los movimientos circulares existe aceleración centrípeta.

La aceleración es una magnitud que mide los cambios que se producen en la velocidad. Como en un movimiento circular la velocidad cambia constantemente de dirección, debe existir una aceleración que produzca esos cambios. Esta es la aceleración centrípeta.

3.-Dos satélites, A y B, giran alrededor de un planeta siguiendo órbitas circulares de radios $2\cdot10^8$ m y $8\cdot10^8$ m respectivamente. Calcula la relación entre sus velocidades (tangenciales) respectivas. (1,2 puntos)

3. cuando un satélite se mantiene en una órbita la fuerza centrípeta es la de atracción gravitatoria.

$$F_C = F_G; \qquad \cancel{m}\frac{v^2}{r} = G\frac{M\cancel{m}}{r^2}; \qquad v = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

Denominando A al que se encuentra en la órbita de radio $2\cdot10^8$ y B al que se encuentra en la órbita de radio $8\cdot10^8$ m se tiene que la relación entre las velocidades es:

$$\frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{GM/R_A}{GM/R_B}} = \sqrt{\frac{R_B}{R_A}} = \sqrt{\frac{8\cdot10^8}{2\cdot10^8}} = \sqrt{4\cdot10^8} = 20000;$$

$$v_A = 20000 v_B$$

1.- ¿ A qué distancia h por encima de la superficie de la tierra la aceleración de la gravedad es la mitad de su valor a nivel del mar? (radio de la tierra: 6370 Km) (1,2 puntos)

1. A pesar de que el campo gravitatorio es un vector, trabajamos con módulos ya que el caráct vectorial no modifica el resultado y complica los cálculos.

$$g = G\frac{M}{R^2}; \qquad g/2 = G\frac{M}{R'^2}$$

$$\frac{\cancel{g}/2}{\cancel{g}} = \frac{\cancel{G}\cancel{M}/R'^2}{\cancel{G}\cancel{M}/R^2}; \qquad \frac{1}{2} = \frac{R^2}{R'^2}; \qquad R'^2 = 2R^2; \qquad R' = \sqrt{2}\,R$$

La altura sobre la superficie de la Tierra, h, será:

$$h = \left(\sqrt{2} - 1\right)R = 0{,}414\,R = 2638{,}5\,\text{km}$$

2.- Un proyectil se dispara verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 8 Km/s. Determinar la altura máxima que alcanza, despreciando la resistencia del aire. (1,3 puntos)

2. Por conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{R+h}$$

$$\frac{1}{2}v^2 = Gm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = GM\frac{R+h-R}{R^2+Rh} = \frac{GMh}{R^2+Rh}$$

despejamos el valor de la altura

$$\frac{1}{2}v^2R^2 + \frac{1}{2}v^2Rh = GMh; \qquad \frac{1}{2}v^2R^2 = \left(GM - \frac{1}{2}v^2R\right)h; \qquad h = \frac{\frac{1}{2}v^2R^2}{GM - \frac{1}{2}v^2R}$$

Manipulamos la ecuación para escribirla en función de otras magnitudes, ya que desconocemos los valores de G y M:

$$h = \frac{\frac{1}{2}v^2}{\frac{GM}{R^2} - \frac{1}{2}\frac{v^2R}{R^2}} = \frac{\frac{1}{2}v^2}{g - \frac{1}{2}\frac{v^2}{R}} = \frac{0{,}5\left(8\cdot10^3\right)^2}{9{,}8 - 0{,}5\cdot\frac{\left(8\cdot10^3\right)^2}{6{,}37\cdot10^6}} = 6{,}7\cdot10^6\ \text{m}$$

3. Un meteorito de 1 000 kg colisiona con otro, a una altura sobre la superficie terrestre de 6 veces el radio de la Tierra, y pierde toda su energía cinética.
a) ¿Cuánto pesa el meteorito e ese punto y cuál es su energía mecánica tras la colisión?
b) Si cae a la Tierra, haga u análisis energético del proceso de caída. ¿Con qué velocidad llega a la superficie terrestre? ¿Dependerá esa velocidad de la trayectoria seguida? Razone las respuestas.
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; $R_T = 6\ 400\ km$; $M_T = 6 \cdot 10^{24}\ kg$

a) El módulo de la fuerza de atracción gravitatoria, a una altura de 6 veces el radio de la Tierr 7 desde su centro es:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M_T}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1000 \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(7 \cdot 6\,400 \cdot 10^3)^2} = 200\ \ N$$

Tras la colisión, toda la energía mecánica del meteorito es energía potencial gravitatoria, cuyo valor es:

$$E_P = -G \cdot \frac{m \cdot M_T}{r} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1000 \cdot 6 \cdot 10^{24}}{7 \cdot 6\,400 \cdot 10^3} = -8{,}9 \cdot 10^9\ \ J$$

b) Según cae sobre la Tierra, parte de su energía potencial se convierte en energía cinética, manera que el cuerpo va ganando velocidad. En ausencia de rozamiento con la atmósfera la velocidad de colisión se puede determinar haciendo uso de la conservación de la energía.

$E_P + E_C = E'_P + E'_C$;

Simplificando la velocidad inicial se tiene que: $-G \cdot \frac{m \cdot M_T}{7 \cdot R_T} = -G \cdot \frac{m \cdot M_T}{R_T} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

Despejando los valores y sustituyendo se tiene la velocidad de choque:

$$v = \sqrt{2 \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T} - 2 \cdot G \cdot \frac{m \cdot M_T}{7 \cdot R_T}} = \sqrt{2 \cdot G \cdot \frac{M_T}{R_T} \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right)} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}}{6{,}4 \cdot 10^6} \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right)} = 10\,354\ m \cdot s^{-1}$$

Esta velocidad de choque, en ausencia de fuerzas de rozamiento, es independiente de la trayectoria que siga el meteorito. Esto se debe a que el campo gravitatorio es conservativo y la energía cinética del meteorito depende de las posiciones iniciales y finales, y no del recorrido.

1. Con la misión de observar la superficie de la Luna, se coloca un satélite de 500 kg en órbita lunar de modo que su altura sobre la superficie de la Luna es de 260 km. Calcular:

a) La velocidad orbital del satélite.

b) El período de revolución del satélite.

c) La energía potencial del satélite debida al campo gravitatorio de la Luna.

d) La energía total del satélite si se considera solo la interacción con la Luna.

Masa de la Luna: $M_L = 7{,}34\cdot 10^{22}$ kg

Radio de la Luna: $R_L = 1.740$ km

$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N· m· kg^{-2}

a) Como el satélite está en una órbita estable alrededor de la Luna debe cumplirs

$$m_s\cdot\frac{v_s^2}{(R_L+h)} = G\cdot\frac{M_L\cdot m_s}{(R_L+h)^2} \Rightarrow v_s = \sqrt{\frac{G\cdot M_L}{R_L+h}} = 1564{,}57\ \mathrm{m/s} = \mathbf{1{,}56\ Km/s}$$

b) El período se calcula mediante la siguiente expresió

$$T = \frac{2\pi(R_L+h)}{v} = 8031\ \mathrm{s} = \mathbf{2{,}23\ horas}$$

c) $Ep = -G\cdot\frac{M_L\cdot m_s}{R_L+h} = \mathbf{-1223945\ KJ}$

d) La energía total se calcula mediante la suma de la energía cinética y la energía potencia

$$E_T = E_C + E_P = \frac{1}{2}\cdot m_s\cdot v_s^2 + E_P = \frac{1}{2}\cdot 500\cdot(1564{,}57)^2 - 1223945000 \quad = \mathbf{-611975178\ J}$$

La aceleración de la gravedad en la superficie de Marte es de 3,7 m/s^2. El radio de la Tierra es de 6 370 km, y la masa de Marte es un 11% la de la Tierra. Calcula:

a) El radio de Marte.

b) La velocidad de escape desde la superficie de Marte.

a) La aceleración de la gravedad asociada a cualquier masa es: $a = G\frac{M}{r^2}$

En la Tierra la aceleración es g: $g = G\frac{M_T}{R_T{}^2}$

Igualando G en ambas ecuaciones se tiene: $g\frac{R_T{}^2}{M_T} = a\frac{r^2}{M}$

Despejando el radio de la segunda masa se tiene:

$$r = \sqrt{\frac{g}{a}\frac{M}{M_T}}R_T = \sqrt{\frac{9{,}8}{3{,}7}\frac{0{,}11M_T}{M_T}}\,6{,}37\cdot 10^6 = 3{,}44\cdot 10^6\ \mathrm{m}$$

b) La velocidad de escape es aquella que anula la energía mecánica de un cuerpo ya que hace que la energía cinética tenga el mismo valor que la potencial gravitatoria cambiada de signo.

$$\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{mM}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2ar}$$

$$v = \sqrt{2\cdot 3{,}7\cdot 3{,}44\cdot 10^6} = 5\,045\ \mathrm{m/s}$$

c) El peso es el producto de la masa por la aceleración de la gravedad:

$$p = m\,a = 80 \cdot 3{,}7 = 296 \text{ N}$$

1. Dos satélites idénticos A y B describ órbitas circulares de diferente radio ($R_A > R_B$) alrededor de la Tierra. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas:
a) ¿cuál de los dos tiene mayor energía cinética?;
b) si los dos satélites estuvieran en la misma órbita ($R_A = R_B$) y tuviesen distinta masa ($m_A < m_B$), ¿cuál de los dos se movería con mayor velocidad?; ¿cuál de ellos tendría más energía cinética?

1. a) Escribimos en primer lugar el valor de la energía cinética de un cuerpo en una órbita en función de su radio.

$$F_G = F_c \qquad G\frac{M_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}; \qquad v_O = \sqrt{G\frac{M_T}{r}}$$

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mG\frac{M_T}{r} = G\frac{M_T m}{2r}$$

Como la energía es inversamente proporcional al radio podemos concluir que cuanto más grande sea el radio de la órbita del planeta, menor será el valor de su energía cinética.
El satélite con mayor energía cinética es el B porque $R_A > R_B$.

b) De la expresión de la velocidad de un satélite en una órbita v_O se puede deducir que ésta depende del radio de la órbita, pero no de la masa de los satélites. Como en esta caso el radio de la órbita es el mismo para los dos satélites, ambos tendrán la misma velocidad.

El caso de la energía cinética es diferente puesto que si depende de la masa "m" de los satélites (como se puede ver en la expresión anterior). De este modo tendrá mayor energía cinética el satélite B que tiene mayor masa.

2. a) Comparando la expresión dada con la ecuación general de una onda encontramos que:

$$y(x,t) = A\cdot \text{sen}(\omega t - kx)$$

- A es la amplitud de la onda que indica el valor máximo de la elongación que sufren los puntos del medio por los que pasa la onda. Sus unidades en el S.I. son los metros.
- b es la pulsación o frecuencia angular, $\left(\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f\right)$, sus unidades en el sistema angular son rad/s.
- c es el número de ondas $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, indica el número de longitudes de onda que hay en la distancia 2π. Sus unidades son rad/m.

b) Tanto la función seno como la función coseno son útiles para definir el movimiento periódico de una partícula en el espacio o en el tiempo ya que ambas varían de igual modo y toman sus valores entre –1 y +1. La única diferencia entre ambas es que se encuentran desfasadas 90º.

El signo del interior del paréntesis indica el sentido de desplazamiento de la onda. Cuando el signo es positivo la onda se desplaza en el sentido negativo del eje de abscisas y cuando el signo es negativo, la onda se desplaza en el sentido positivo.